Es. 1

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-y^5}{y^4}\, x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$f(x,y) = \dfrac{1-y^5}{y^4}\, x$ è di classe C^1 in un intorno U di $(0,2)$; per il teor. di Cauchy-Lipschitz il problema dato ammette un'unica soluzione in un intorno di $(0,2)$.

$y(x) \equiv 2$ non è soluzione.

Risolvo per separazione delle variabili

$$\int_0^x \frac{y^4(t)}{1-y^5(t)}\, y'(t)\, dt = \int_0^x t\, dt$$

$$\left[-\frac{1}{5} \ln|1-y^5(t)| \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$$-\frac{1}{5} \ln|1-y^5(x)| + \frac{1}{5} \ln|1-32| = \frac{x^2}{2}$$

$$\ln|1-y^5(x)| = \ln 31 - \frac{5}{2} x^2$$

$$|1 - y^5(x)| = 1 - y^5(x) > 0 \qquad (*)$$

oppure

$$|1 - y^5(x)| = y^5(x) - 1 > 0 \qquad (**)$$

per decidere quale delle due possibilità devo scegliere, uso la condizione iniziale

$$1 - y^5(0) = 1 - 2^5 = 1 - 32 = -31 < 0$$

$$y^5(0) - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31 > 0$$

quindi scelgo la $(**)$

$$|1 - y^5(x)| = y^5(x) - 1$$

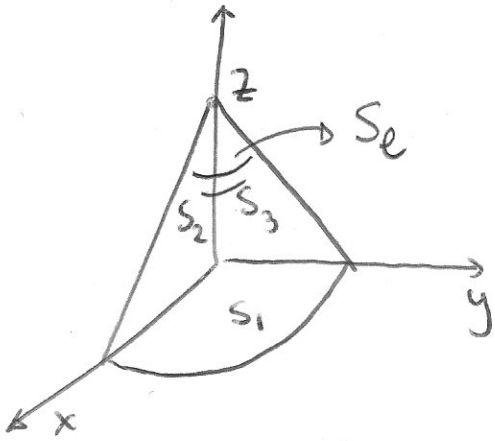
$$\ln(y^5 - 1) = \ln 31 - \frac{5}{2}x^2$$

$$y^5 - 1 = e^{[\ln 31 - \frac{5}{2}x^2]} = e^{\ln 31} \cdot e^{-5/2 x^2} = 31\, e^{-5/2 x^2}$$

$$y^5 = 1 + 31\, e^{-5/2 x^2}$$

$$y = \sqrt[5]{1 + 31\, e^{-5/2 x^2}}$$

Es. 2



$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_D 4z \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_{S_1} dx\, dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 4z \, dz =$$

$$= \iint_{S_1} \left[2z^2 \right]_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy = \iint_{S_1} 2\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\, dy =$$

passo a coord. polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$ $\quad \rho \in [0,1]$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2(1-\rho)^2 \rho \, d\vartheta\, d\rho = \pi \int_0^1 (1-\rho)^2 \rho \, d\rho =$$

$$= \pi \int_0^1 (\rho + \rho^3 - 2\rho^2)\, d\rho = \pi \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{2\rho^3}{3} \right|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

$$\iint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iint_{S_1} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle + \iint_{S_2} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \iint_{S_3} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma +$$

$$+ \iint_{S_\ell} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Su S_1 è $\vec{F} = (0, 0, 0)$.

Su S_2 è $\vec{F} = (zx, 0, z^2)$ e $\vec{n} = (0, -1, 0)$

e perciò $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = 0$

Su S_3 è $\vec{F} = (0, zy, z^2)$ e $\vec{n} = (-1, 0, 0)$

e perciò $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = 0$

Parametrizzo S_e

$$\vec{r}(u,v): \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 1 - \sqrt{u^2+v^2} \end{cases} \qquad (u,v) \in S_1$$

$$\vec{r}_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\vec{r}_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$$

$$\iint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iint_{S_e} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma =$$

$$= \iint_{S_1} \left\langle \vec{F}(\vec{r}(u,v)), \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\cancel{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}} \right\rangle \cancel{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|} \, du \, dv =$$

$$= \iint_{S_1} \left\langle \left(u\left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right), v\left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right), \left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right)^2 \right), \right.$$

$$\left. \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right) \right\rangle du\, dv =$$

$$= \iint_{S_1} \left[\frac{u^2\left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{v^2\left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}} + \left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right)^2 \right] du\, dv =$$

$$= \iint_{S_1} \left[\sqrt{u^2+v^2}\left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right) + \left(1-\sqrt{u^2+v^2}\right)^2 \right] du\, dv =$$

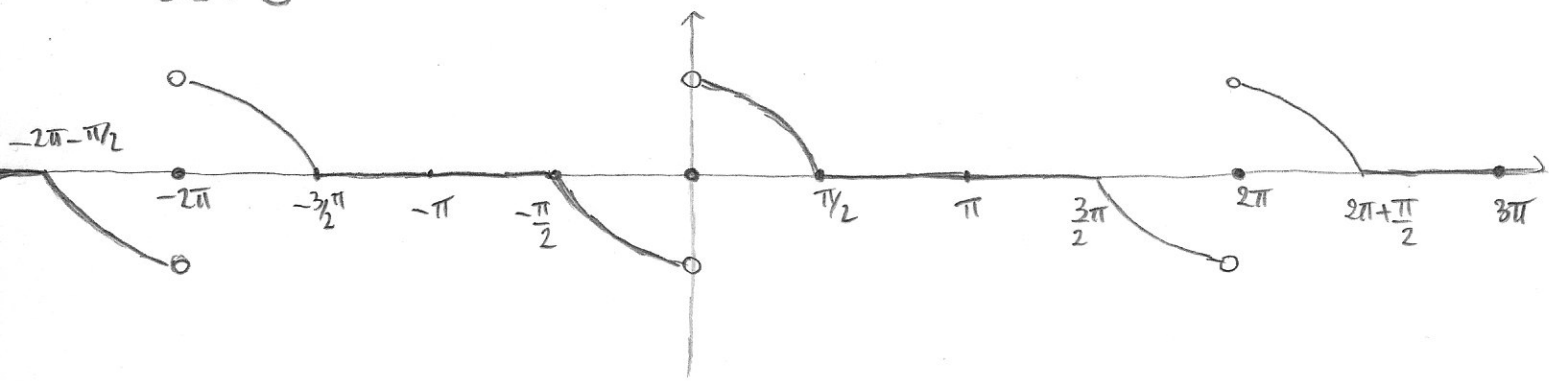
$$\begin{cases} u = \rho\cos\vartheta \\ v = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,1] \\ \vartheta \in [0, \pi/2] \end{array}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[\rho(1-\rho) + (1-\rho)^2 \right] \rho\, d\vartheta\, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left[\rho^2 - \cancel{\rho^3} + \rho + \cancel{\rho^3} - 2\rho^2 \right] d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \right|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

Es. 3



F è dispari, la sua serie di Fourier associata è del tipo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen} kx$$

con

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\operatorname{sen} kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} kx\,dx$$

Calcolo l'integrale "per parti"

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} kx\,dx = \left[\operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx\right|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot k \cdot \cos kx\,dx =$$

$$= \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2} - \left\{\left[-\cos x \cdot k \cdot \cos kx\right|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x \cdot k^2 \cdot (-\sin kx)\,dx\right\} =$$

$$= \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2} - k + \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot k^2 \cdot \sin kx\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} kx\,dx = \frac{\operatorname{sen} k\frac{\pi}{2} - k}{1-k^2}$$

La serie di Fourier associata a F è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen} k\frac{\pi}{2} - k}{1-k^2} \sin kx.$$

Converg. puntuale:

la funzione F verifica la condizione di Dirichlet in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$; infatti nei punti $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ F è derivabile; nei punti della forma $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ F ha una discontinuità di prima specie ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to 2k\pi^+} \frac{f(x)-f(2k\pi)}{x-2k\pi} \qquad \lim_{x \to 2k\pi^-} \frac{f(x)-f(2k\pi)}{x-2k\pi}$$

Pertanto la serie di Fourier associata a F converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$; in particolare converge a $F(x)$ nei punti di continuità di F e converge a $\frac{1}{2}\left[f(2k\pi^+)+f(2k\pi^-)\right]$ nei punti $2k\pi$ in cui F è discontinua.

In questo caso specifico risulta

$$\frac{1}{2}\left[F(2k\pi^+)+F(2k\pi^-)\right] = 0.$$

Convergenza uniforme

La serie di Fourier associata a F converge in tutti i sottointervalli della forma

$[2k\pi+\alpha,\ 2(k+1)\pi-\beta]$ con $\alpha,\beta>0$

poiché in questi sottointervalli F è C^1 tranne in un numero finito di punti nei quali è comunque verificata la condizione di Dirichlet.