SOLUZIONI COMPITO DEL 23-01-2017

Esercizio 1 Risolvere il problema

$$\begin{cases} y' = [\sin x]\, y + 4x^3 e^{-\cos x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sia $A(x) = \int_0^x \sin t \, dt = \left[-\cos t\right|_0^x =$

$= -\cos x + 1$

Moltiplico l'equazione differenziale per $e^{-A(x)}$, ottenendo

$$e^{\cos x - 1}\, y'(x) - (\sin x)\, y(x)\, e^{\cos x - 1} = 4x^3 e^{-\cos x}\, e^{\cos x - 1};$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\cos x - 1}\, y(x)\right] = 4x^3 e^{-1};$$

$$\int_0^x \frac{d}{dt}\left[e^{\cos t - 1}\, y(t)\right] dt = \int_0^x 4t^3 e^{-1}\, dt;$$

$$\left[e^{\cos t - 1}\, y(t)\right|_0^x = \left[t^4 e^{-1}\right|_0^x;$$

$$e^{\cos x - 1}\, y(x) - e^{0}\, y(0) = x^4 e^{-1};$$

$$e^{\cos x - 1}\, y(x) = 1 + x^4 e^{-1};$$

$$y(x) = e^{-\cos x}\,(e + x^4).$$

ESERCIZIO 2

Spiegare perché la funzione $f(x,y) = 3x^2 + x^2y - y^2 - y$ possiede massimo e minimo assoluto nell'insieme

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e determinarli.

f è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

C è il cerchio chiuso di centro $(0,0)$ e raggio 2, è un insieme chiuso e limitato.

Allora, per il teorema di Weierstrass, f possiede massimo e minimo assoluto in C.

Cerchiamo eventuali punti critici di f interni a C.

$$\nabla f = (6x + 2xy,\ x^2 - 2y - 1)$$

$$\nabla f = 0 \ ; \quad \begin{cases} 6x + 2xy = 0 \\ x^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(3+y) = 0 \\ x^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2y - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -3 \\ x^2 - 2\cdot(-3) - 1 = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ $y = -3$ indica che siamo esterni a C; non ci interessa

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Studiemo il comportamento di f su ∂C.

La curva ∂C ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$f_{|\partial C} = f(2\cos t, 2\sin t) =$$

$$= 12\cos^2 t + 8\cos^2 t \sin t - 4\sin^2 t - 2\sin t =: g(t)$$

$$g'(t) = -24\cos t \sin t - 16\cos t \sin^2 t + 8\cos^3 t +$$

$$-8\sin t\cos t - 2\cos t =$$

$$= -32\cos t\sin t - 16\cos t\sin^2 t + 8\cos^3 t - 2\cos t.$$

$g'(t) = 0 \iff$

$\iff 2\cos t\,(-16\sin t - 8\sin^2 t + 4\cos^2 t - 1) = 0 \iff$

$\iff \cos t\,(-16\sin t - 8\sin^2 t + 4 - 4\sin^2 t - 1) = 0 \iff$

$\iff \cos t = 0$

$\cup$

$-12\sin^2 t - 16\sin t + 3 = 0$

$\cos t = 0 \quad$ per $\quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Posto $\quad z = \sin t$, risolvo

$$-12z^2 - 16z + 3 = 0$$

$$z = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{-12} = \frac{8 \pm 10}{-12} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ +\frac{1}{6} \end{cases}$$

$\sin t = -\frac{3}{2}$ non è accettabile

$\sin t = \frac{1}{6}$ va considerato.

In conclusione dobbiamo considerare i punti (x,y) della forma $(2\cos t, 2\sin t)$ quando $\cos t = 0$ e perciò $\sin t = \pm 1$;

e i punti (x,y) della forma $(2\cos t, 2\sin t)$ quando $\sin t = \frac{1}{6}$ e perciò $\cos t = \pm\sqrt{1-\frac{1}{36}} = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$.

Risulta

$$f(0,2) = -4-2 = -6$$

$$f(0,-2) = -4+2 = -2$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{35}}{3}, \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{35}{9} + \frac{35}{9}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{9\cdot 35 + 35 - 3 - 9}{27} = \frac{350-12}{27} = \frac{338}{27}$$

Il massimo assoluto è $\frac{338}{27}$ ed è raggiunto nei punti $\left(\pm\frac{\sqrt{35}}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Il minimo assoluto è -6 ed è raggiunto nel punto $(0,2)$.

Esercizio 3 Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(z+2i)^n}{3n \ln(n^2)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n \ln(n^2)}{3(n+1) \ln(n+1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{1} = 1.$$

La serie converge puntualmente in $\mathring{D}(-2i, 1)$.

La serie converge uniformemente in $\overline{D}(-2i, \alpha)$ con $\alpha < 1$.

Studiamo il comportamento delle serie su ∂D.

Su ∂D i punti sono della forma $z = -2i + e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Su tali punti la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(e^{i\vartheta})^n}{3n \ln n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(e^{i\vartheta})^n}{6n \ln n}$$

Per $\vartheta = 0$ si ha $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{6n \ln n} = +\infty$,

quindi non c'è convergenza per $z = 1 - 2i$

Per $\vartheta \neq 0$ si ha

- $\dfrac{1}{6n \ln n}$ è una successione decrescente e infinitesima
- la successione delle somme parziali

$$B_k = \sum_{n=1}^{k} (e^{i\vartheta})^n = \frac{1-e^{i\vartheta(k+1)}}{1-e^{i\vartheta}} \quad \text{è}$$

limitata per ogni k, perché

$$|B_k| = \left| \frac{1-e^{i\vartheta(k+1)}}{1-e^{i\vartheta}} \right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\vartheta}|} \quad \forall k$$

Allora per il criterio di Abel-Dirichlet c'è convergenza sui punti del bordo $z=-2i+e^{i\vartheta}$ tranne per $\vartheta=0$.