COMPITO DI ANALISI MATEMATICA 2

06-02-2017. SCRITTO A

ESERCIZIO 1

L' equazione omogenea associata è

$$* \quad y'' + 36y = 0$$

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 36 = 0$$

che ha soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm 6i$.

Allora l'integrale generale dell'equazione $*$ è

$$y(x) = c_1 \cos 6x + c_2 \sin 6x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa usando il metodo di somiglianza.

Poiché il termine noto è $\cos 6x$ e poiché $0 \pm 6i$ è radice di ordine 1 dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$v(x) = \alpha x \cos 6x + \beta x \sin 6x$$

Risulta

$$v'(x) = \alpha \cos 6x - 6\alpha x \sin 6x + \beta \sin 6x +$$

$$+ 6\beta x \cos 6x$$

$$v''(x) = -6\alpha \sin 6x - 6\alpha \sin 6x - 36\alpha x \cos 6x +$$

$$+ 6\beta \cos 6x + 6\beta \cos 6x - 36\beta x \sin 6x =$$

$$= -12\alpha \sin 6x - 36\alpha x \cos 6x + 12\beta \cos 6x +$$

$$-36\beta x \sin 6x$$

Impongo che v sia soluzione dell'equazione completa e ho

$$-12\alpha \sin 6x - \cancel{36\alpha x \cos 6x} + 12\beta \cos 6x - \cancel{36\beta x \sin 6x} +$$

$$+ \cancel{36\alpha x \cos 6x} + \cancel{36\beta x \sin 6x} := \cos 6x$$

$$\Rightarrow -12\alpha \sin 6x + 12\beta \cos 6x := \cos 6x$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{12}$$

Allora l'integrale generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = c_1 \cos 6x + c_2 \sin 6x + \frac{1}{12} x \sin 6x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali

$$0 = y(0) := c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = c_2 \sin 6x + \frac{1}{12} x \sin 6x$$

$$y'(x) = 6C_2 \cos 6x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{2} x \cos 6x$$

$$0 = y'(0) := 6C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

La soluzione del problema di Cauchy dato è

$$y(x) = \frac{1}{12} x \sin 6x.$$

Esercizio 2

$\vec{r} \in \mathcal{C}^1([0,1])$ e $\vec{r}\,'(t) = \left(-e^{-2t}, e^{2t}, \sqrt{2}\right) \neq (0,0,0)$

per ogni $t \in [0,1]$.

Allora $(\gamma, \vec{r})$ è regolare. Pertanto per il teorema di rettificabilità è rettificabile e

$$L = \ell(\gamma, \vec{r}) = \int_0^1 \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{e^{-4t} + e^{4t} + 2} \, dt = \int_0^1 \sqrt{(e^{-2t} + e^{2t})^2} \, dt =$$

$$= \int_0^1 (e^{-2t} + e^{2t}) \, dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^2}{2}.$$

Il versore tangente è dato da $\vec{T}(t) = \dfrac{r'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$

$$\vec{T}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\vec{r}\,'(1/2)}{\|\vec{r}\,'(\frac{1}{2})\|} = \frac{1}{(e^{-1}+e)} \left(-e^{-1}, e^{1}, \sqrt{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{1+e^2}, \frac{e^2}{1+e^2}, \frac{\sqrt{2}\,e}{1+e^2}\right).$$

$$\int_\gamma z \, ds = \int_0^1 \sqrt{2}\, t \cdot (e^{-2t} + e^{2t}) \, dt =$$

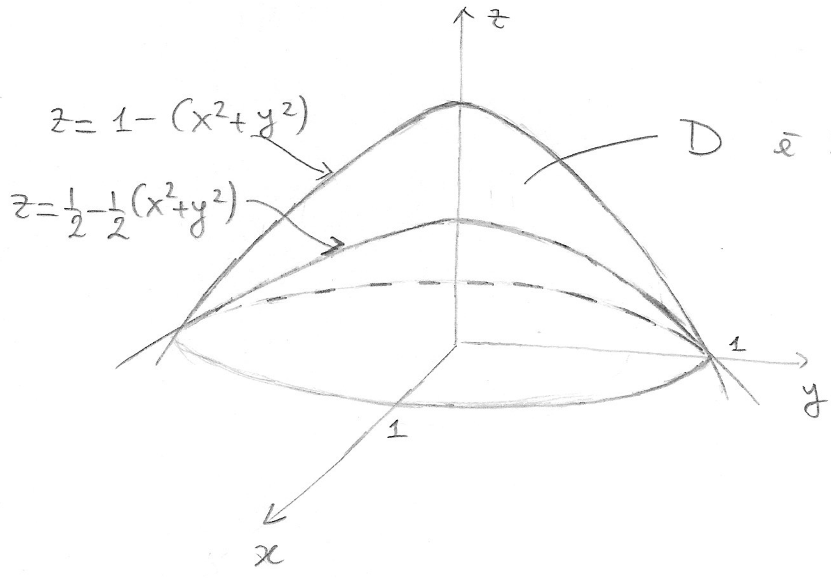
$$= \left[\sqrt{2}\, t \left(-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{2}\right)\right|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2} \left(-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{2}\right) dt =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{e^{2}}{2}\right)-\left[\sqrt{2}\left(\frac{e^{-2t}}{4}+\frac{e^{2t}}{4}\right)\right|_{0}^{1} =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{e^{2}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(\frac{e^{-2}}{4}+\frac{e^{2}}{4}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-e^{-2}+e^{2}-\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{2}}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{3}{2}e^{-2}+\frac{e^{2}}{2}\right).$$

Esercizio 3



D è la regione del semispazio positivo delle z compreso tra i paraboloidi

$$z = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

e

$$z = 1-(x^2+y^2).$$

Il teorema della divergenza dice che se D è un dominio ammissibile e $\vec{F} \in C^1(\overline{D})$, allora

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{n}_e \rangle\, d\sigma$$

Verifichiamolo nel nostro caso.

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_D dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{1-(x^2+y^2)} dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right] dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\right)\rho\, d\vartheta\, d\rho = \pi\int_0^1 (1-\rho^2)\rho\, d\rho =$$

$$= \pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Calcoliamo ora $\iint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{n}_e \rangle \, d\sigma$.

∂D è formato da due superfici, la calotta superiore Σ^+ di equazione cartesiana $z = 1 - (x^2+y^2)$ e la calotta inferiore Σ^- di equazione cartesiana $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Le parametrizzazioni e le normali esterne sono

$$\Sigma^+, \quad \vec{r}_+ : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 1 - (u^2+v^2) \end{cases} \qquad (u,v) \in C((0,0),1)$$

$$\vec{r}_{+u} = (1, 0, -2u)$$

$$\vec{r}_{+v} = (0, 1, -2v)$$

$$\vec{r}_{+u} \wedge \vec{r}_{+v} = (2u, 2v, 1)$$

punta verso l'alto, così come mi occorre

$$\vec{n}_{e+} = \frac{1}{\|\vec{r}_{+u} \wedge \vec{r}_{+v}\|} (2u, 2v, 1).$$

$$\Sigma^-, \quad \vec{r}_- : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(u^2+v^2) \end{cases} \qquad (u,v) \in C((0,0),1)$$

$$\vec{r}_{-u} = (1, 0, -u)$$

$$\vec{r}_{-v} = (0, 1, -v)$$

$$\vec r_{-u} \wedge \vec r_{-v} = (u, v, 1)$$ punta verso l'alto, prendo l'opposto

$$\vec n_{e-} = \frac{1}{\|\vec r_{-u} \wedge \vec r_{-v}\|}(-u,-v,-1).$$

$$\iint_{\partial D} \langle \vec F, \vec n_e \rangle \, d\sigma = \iint_{\Sigma^+} \langle \vec F, \vec n_{e+} \rangle \, d\sigma + \iint_{\Sigma^-} \langle \vec F, \vec n_{e-} \rangle \, d\sigma =$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \le 1} \left\langle (v, u, 1-(u^2+v^2)), \frac{(2u, 2v, 1)}{\cancel{\|\vec r_{+u} \wedge \vec r_{+v}\|}} \right\rangle \cdot \cancel{\|\vec r_{+u} \wedge \vec r_{+v}\|} \, du\,dv \; +$$

$$+ \iint_{u^2+v^2 \le 1} \left\langle \left(v, u, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right), \frac{(-u,-v,-1)}{\cancel{\|\vec r_{-u} \wedge \vec r_{-v}\|}} \right\rangle \cancel{\|\vec r_{-u} \wedge \vec r_{-v}\|} \, du\,dv =$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \le 1} \left[2uv + \cancel{2uv} + 1 - (u^2+v^2) - \cancel{uv} - \cancel{uv} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right] du\,dv =$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \le 1} \left[2uv + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right] du\,dv =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[2\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\rho^2\right] \rho \, d\vartheta \, d\rho =$$

$$= \int_0^1 \left[\rho^3 \sin^2\vartheta + \tfrac{1}{2}\rho\vartheta - \tfrac{1}{2}\rho^3 \vartheta \right|_0^{2\pi} d\rho =$$

$$= \int_0^1 (\rho\pi - \rho^3\pi) \, d\rho = \pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$