A questo punto, l'equazione cartesiana della retta tangente al punto corrispondente al generico θ_0

$$y'(\theta_0)(x - x(\theta_0)) = x'(\theta)(y - y(\theta_0))$$

per cui, se $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$2(x-0) = -\pi(y-\pi) \qquad\qquad 2x + \pi y = \pi^2.$$

✍ **Esercizio 4.2.**

> Data la curva γ avente equazione in coordinate polari $\rho = 2\theta^2$ con $-\pi \le \theta \le \pi$, determinate la lughezza di γ; determinate poi un versore tangente alla curva nel punto corrispondente a $\theta = \varepsilon$ e calcolate il limite per $\varepsilon \to 0^+$ di questo versore.

PRIMO MODO: Si può pensare di calcolare direttamente la lunghezza della curva con la formula che coinvolge le coordinate polari. In tal caso, posto $f(\theta) = 2\theta^2$ si avrebbe $f'(\theta) = 4\theta$ da cui

$$\ell(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\theta^4 + 16\theta^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\theta\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta = \left[\frac{4}{3}(\theta^2+4)^{3/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}(\pi^2+4)^{3/2} - \frac{32}{3}.$$

SECONDO MODO: alternativamente si può passare attraverso una rappresentazione parametrica della curva. In questo caso, posto

$$\varphi(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t) = (2t^2\cos t, 2t^2 \sin t)$$

con $-\pi \le t \le \pi$, si ha

$$\varphi'(t) = (4t\cos t - 2t^2\sin t, 4t\sin t + 2t^2\cos t)$$

da cui

$$|\varphi'(t)|^2 = 16t^2 + 4t^4 \qquad |\varphi'(t)| = \sqrt{4t^2(4+t^2)} = 2|t|\sqrt{4+t^2},$$

per cui

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 2|t|\sqrt{4+t^2}\, dt = 2\int_0^{\pi} 2t\,\sqrt{t^2+4}\, dt \\ &= \left[\frac{4}{3}(t^2+4)^{3/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}(\pi^2+4)^{3/2} - \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Il versore cercato risulta

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{|\varphi'(\varepsilon)|} = \frac{(4\varepsilon\cos\varepsilon - 2\varepsilon^2\sin\varepsilon, 4\varepsilon\sin\varepsilon + 2\varepsilon^2\cos\varepsilon)}{2|\varepsilon|\sqrt{4+\varepsilon^2}}$$

quindi, visto che si fa tendere $\varepsilon \to 0^+$, allora si può considerare $\varepsilon > 0$ e dunque

$$\tau(\varepsilon) = \left(\frac{2\cos\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon\sin\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}, \frac{2\sin\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon\cos\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}\right) \to (1,0)$$