Capitolo III

VETTORI DELLO SPAZIO

Premessa

I vettori dello spazio, con le relative operazioni, sono fondamentali per lo studio di argomenti che verranno trattati nei capitoli successivi; in particolare saranno utilizzati in numerose questioni di geometria analitica e differenziale; inoltre l'insieme dei vettori dello spazio, dotato di opportune operazioni, costituisce un notevole esempio di una struttura più generale, detta *spazio vettoriale*, che verrà pure studiata nel seguito.

In questa prospettiva i vettori saranno qui considerati come enti geometrici, prescindendo dal loro significato fisico, anche se la nozione di vettore è nata dall'esigenza di rappresentare grandezze fisiche, come la forza, la velocità, ecc., che non possono essere individuate soltanto mediante un numero.

1. Definizione di vettore

1.1. ***Segmenti orientati equipollenti.*** Siano AB, CD due segmenti orientati dello spazio, individuati rispettivamente dalle coppie ordinate di punti A, B e C, D.

Diremo che AB, CD sono *segmenti orientati equipollenti* se si verifica una delle seguenti condizioni:

a) se B coincide con A, anche D coincide con C;
b) AB, CD appartengono alla stessa retta e sono uguali e concordi;

c) AB, CD appartengono a due rette parallele e le rette AC, BD congiungenti rispettivamente i primi ed i secondi estremi dei due segmenti sono parallele.

Le tre condizioni sono illustrate in figura 1.

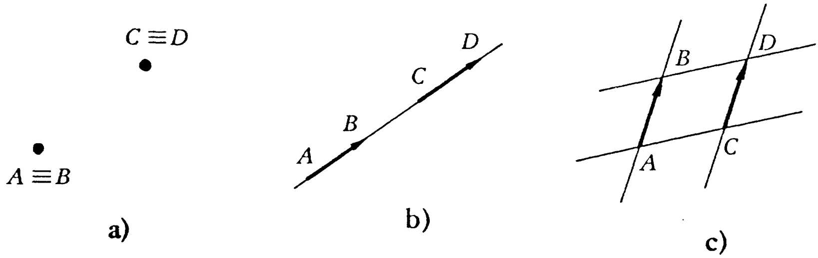

Fig. 1

Supponiamo assegnata un'unità di misura per i segmenti. Le tre condizioni precedenti si riassumono come segue:

Due segmenti orientati sono equipollenti se hanno lunghezza nulla oppure se hanno lunghezza, direzione e verso uguali.

La relazione di equipollenza ora definita permette di suddividere l'insieme dei segmenti orientati dello spazio in sottoinsiemi, che diremo *classi di equipollenza*; ogni classe è costituita da tutti e soli i segmenti orientati equipollenti ad un dato segmento.

Una classe di equipollenza è quindi individuata da uno qualsiasi dei segmenti orientati che la costituiscono; ad esempio, i segmenti AB, CD della figura 1 c) appartengono alla stessa classe e quindi uno di essi può essere scelto come *rappresentante* della classe.

1.2. *Vettori liberi ed applicati, cursori*

DEF. 1. *Si dice vettore libero* (o semplicemente vettore) *ogni classe di equipollenza di segmenti orientati dello spazio.*

Indicheremo i vettori liberi con una lettera minuscola in carattere neretto: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$

Per indicare che il segmento orientato AB è un rappresentante di un vettore libero $\mathbf{u}$ (fig. 2) si usano le notazioni:

$$\mathbf{u} = B - A \text{ , oppure: } \mathbf{u} = \overrightarrow{AB}, \text{ od anche: } B = A + \mathbf{u} \text{ .}$$

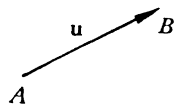

Fig. 2

DEF. 2. *Il rappresentante* $\overrightarrow{AB}$ *di un vettore* $\mathbf{u}$ *si dice vettore* $\mathbf{u}$ *applicato in* A*; si dice che* A *è il punto di applicazione di* $\mathbf{u}$ *e che la retta passante per* A *e parallela ad* $\mathbf{u}$ *è la retta d'azione di* $\mathbf{u}$.

Il vettore $\mathbf{u}$ applicato in A verrà indicato con $(\mathbf{u}, A)$.

Se si considerano equivalenti i vettori $(\mathbf{u}, P)$ quando P varia su una retta r parallela ad $\mathbf{u}$, si ottiene il concetto di *cursore*, che si indica con $(\mathbf{u}, r)$.

Con riferimento alla figura 3, si ha:

a) i tre segmenti orientati AB, CD, EF rappresentano lo stesso vettore libero $\mathbf{u}$;

b) i segmenti orientati AB, CD, EF sono i tre vettori applicati $(\mathbf{u}, A)$, $(\mathbf{u}, C)$, $(\mathbf{u}, E)$ fra loro distinti;

c) i due segmenti orientati AB, CD sono rappresentanti dello stesso cursore $(\mathbf{u}, r)$, mentre EF non è un rappresentante di tale cursore.

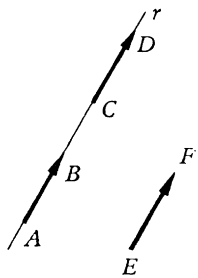

Fig. 3

Le nozioni di vettore applicato e di cursore si utilizzano in particolare in meccanica ed in fisica; nel seguito ci riferiremo generalmente a vettori liberi.

1.3. ***Modulo, direzione e verso di un vettore libero.*** La classe di equipollenza costituita da tutti i segmenti di lunghezza nulla si dice *vettore nullo* e si indica con $\mathbf{0}$.

Un vettore non nullo $\mathbf{u}$ è individuato dalla direzione, dal verso e dalla lunghezza di uno qualsiasi dei segmenti orientati appartenenti ad $\mathbf{u}$; essi vengono detti *direzione*, *verso* e *modulo* di $\mathbf{u}$ (*).

(*) Invece per un vettore applicato od un cursore occorrerà dare anche il punto d'applicazione ovvero la retta d'azione.

Il modulo del vettore $\mathbf{u}$ si indica con $||\mathbf{u}||$; prefissata una unità di misura per i segmenti, il modulo di un vettore è univocamente determinato.

Il vettore nullo ha modulo zero, direzione e verso indeterminati.

Un vettore di modulo 1 si dice *versore*; in particolare, si dice *versore di un vettore* $\mathbf{u}$ (non nullo) e si indica con

$$\text{vers } \mathbf{u}$$

il vettore avente la direzione ed il verso di $\mathbf{u}$ e modulo 1.

L'insieme dei vettori liberi dello spazio verrà indicato con V_3.

OSSERVAZIONE 1. Sia S_3 l'insieme dei punti dello spazio. Se si fissa in S_3 un punto O, *origine*, ad ogni punto P di S_3 è associato un solo vettore $\mathbf{u}$ di cui $\overrightarrow{OP}$ è un rappresentante; viceversa, dato $\mathbf{u}$ è univocamente determinato il punto P tale che $\overrightarrow{OP}$ sia un rappresentante di $\mathbf{u}$. In particolare, al punto O è associato il vettore nullo.

La scelta di O permette pertanto di porre una corrispondenza biunivoca tra i vettori liberi ed i vettori applicati in O e quindi anche tra i vettori di V_3 ed i punti di S_3.

OSSERVAZIONE 2. Nel seguito verranno introdotte diverse operazioni tra vettori ricorrendo ad opportuni segmenti orientati che li rappresentano. Perchè tali operazioni abbiano senso occorre che i risultati non cambino cambiando i rappresentanti. Lasciamo al lettore la verifica di tale fatto.

2. Somma di vettori

2.1. ***Definizione.*** L'operazione di somma di due vettori è una legge che associa ad ogni coppia di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ il vettore, che si dice *somma* di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e si indica con: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, così definito: *scelti come rappresentanti di* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *i segmenti orientati* AB *e* BC *rispettivamente, il segmento orientato* AC *rappresenta* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (fig. 4).

In formule:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (B - A) + (C - B) = C - A \ .$$

Si osservi che l'aver indicato i vettori con una "differenza di punti" permette di operare su tali punti con le regole formali dell'algebra.

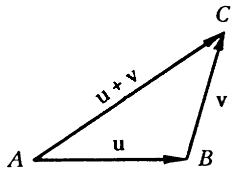

Fig. 4

La costruzione di un rappresentante del vettore $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ può anche essere fatta mediante la seguente

Regola del parallelogrammma. Scelti come rappresentanti di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ i segmenti orientati AB ed AC rispettivamente, si costruisce il parallelogramma $ABCD$; il segmento orientato AD rappresenta $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ (fig. 5).

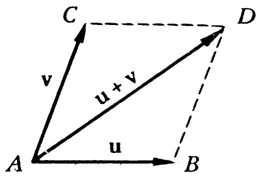

Fig. 5

2.2. ***Proprietà.*** La somma di due vettori gode delle seguenti proprietà:

I) *commutativa*: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \qquad (\forall\, \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_3)$

II) *associativa*: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \qquad (\forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V_3)$

III) *il vettore nullo è l'elemento neutro rispetto alla somma*, cioè:

$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u} \qquad (\forall\, \mathbf{u}\in V_3)$$

IV) *esiste*, $\forall\, \mathbf{u}\in V_3$, *uno ed un solo vettore*, che si dice *opposto* di $\mathbf{u}$ e si indica con $-\mathbf{u}$, *tale che*:

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}\ .$$

Le proprietà III), IV) seguono immediatamente dalla definizione; in particolare, il vettore opposto di $\mathbf{u}$ ha la direzione ed il modulo uguali a quelli di $\mathbf{u}$ e verso opposto. Le I), II) si possono verificare mediante costruzioni geometriche.

Si osservi che dalla II) segue che la somma di n vettori $(n \geq 3)$: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ si può indicare senza l'uso di parentesi

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n \ .$$

È immediato inoltre verificare che

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \ , \qquad \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\| \geq \big| \|\vec{\mathbf{u}}\| - \|\vec{\mathbf{v}}\| \big| \ .$$

Per definizione, *la somma di un vettore* $\mathbf{u}$ *e dell'opposto di un vettore* $\mathbf{v}$ *si dice differenza di* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *e si indica con*: $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, ossia:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) \ .$$

Posto ad esempio $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$, si ha (fig. 6):

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (B - A) - (C - A) = B - C \ .$$

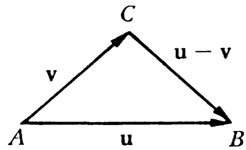

Fig. 6

3. Prodotto di un numero reale per un vettore

3.1. ***Definizione.*** L'operazione di prodotto di un numero reale per un vettore è una legge che associa ad ogni coppia $(\lambda, \mathbf{u})$, ove λ è un numero reale ed $\mathbf{u}$ un vettore, il vettore, che si indica con $\lambda\mathbf{u}$ e si dice *prodotto* di λ per $\mathbf{u}$, così definito:

a) se $\lambda = 0$ ovvero $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0} \ ;$$

b) se $\lambda \neq 0$ ed $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$:

- *la direzione di* $\lambda\mathbf{u}$ *coincide con quella di* $\mathbf{u}$;
- *il verso di* $\lambda\mathbf{u}$ *è concorde con quello di* $\mathbf{u}$ *se* $\lambda > 0$, *discorde se* $\lambda < 0$;
- *il modulo di* $\lambda\mathbf{u}$ *è il prodotto del valore assoluto di* λ *per il modulo di* $\mathbf{u}$:

$$\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{u}\| \ .$$

3.2. *Proprietà.* L'operazione ora definita gode delle seguenti proprietà:

I)	$\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$	$(\forall\lambda \in \mathbf{R},\ \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_3)$
II)	$(\lambda+\mu)\,\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{u}$	$(\forall\lambda,\mu \in \mathbf{R},\ \forall\mathbf{u} \in V_3)$
III)	$\lambda(\mu\,\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$	$(\forall\lambda,\mu \in \mathbf{R},\ \forall\,\mathbf{u} \in V_3)$
IV)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	$(\forall\mathbf{u} \in V_3)$

che si possono verificare in base alla definizione ed a considerazioni di geometria elementare.

OSSERVAZIONE. Dalla definizione data segue che:

1) se $\lambda = -1$, il vettore $(-1)\mathbf{u}$ è l'opposto di $\mathbf{u}$, ossia:

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}\ ; \tag{3.1}$$

2) se $\lambda = 1/||\mathbf{u}||$, $\lambda\mathbf{u}$ è il versore di $\mathbf{u}$, cioè:

$$\text{vers}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} \tag{3.2}$$

3) se $\mathbf{u} = B - A$ e $\lambda\,\mathbf{u} = C - A$, i punti A, B, C sono allineati; viceversa, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono rappresentati dai segmenti orientati AB ed AC ed i punti A, B, C sono allineati, esiste ed è unico il numero reale λ tale che $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$.

4. Dipendenza lineare

4.1. *Definizione e prime proprietà.* *Siano* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n *numeri reali ed* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ n *vettori; il vettore*

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ \ldots\ + \lambda_n\mathbf{u}_n \tag{4.1}$$

si dice combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ *di coefficienti* λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

DEF. *I vettori* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ *si dicono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli,* ossia se

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ \ldots\ + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

soltanto per $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

I vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, , \ldots \mathbf{u}_n$ *si dicono linearmente dipendenti se non sono indipendenti*, ossia se la (4.2) sussiste *anche* per dei numeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tutti nulli.

È immediato osservare che:

a) se uno degli n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ è il vettore nullo, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti;

b) se h tra i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti, anche $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti.

TEOREMA 1. *I vettori* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ *sono linearmente dipendenti se e solo se uno (almeno) di essi è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti.*

Se infatti

$$\mathbf{u}_n = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \mu_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} \tag{4.3}$$

si ha:

$$\mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \mu_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

con $\mu_n = -1$ e quindi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti.

Viceversa, se sussiste la (4.2) con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tutti nulli, supposto ad esempio $\lambda_n \neq 0$ e posto $\mu_1 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}, \ldots, \mu_{n-1} = -\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ si ottiene la (4.3).

4.2. *Parallelismo e complanarità tra vettori.* Mettiamo ora in evidenza come si traduce geometricamente il concetto di dipendenza lineare di n vettori, per i diversi valori dell'intero n. Premettiamo le seguenti

DEF. 1. *Due o più vettori non nulli si dicono paralleli se hanno la stessa direzione.*

DEF. 2. *Tre o più vettori si dicono complanari se hanno direzioni parallele ad uno stesso piano.*

Si conviene che il vettore nullo, per cui non è definita la direzione, sia parallelo a qualsiasi vettore; pertanto esso risulta anche complanare con ogni coppia di vettori.