i segmenti orientati $\overrightarrow{OU}_1, \overrightarrow{OU}_2, \overrightarrow{OU}_3$ uscenti da uno stesso punto O, tali segmenti appartengono ad uno stesso piano.

– Se $\overrightarrow{OU}_1, \overrightarrow{OU}_2$ sono paralleli, ciò significa che già $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, sono linearmente dipendenti e quindi anche $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti;

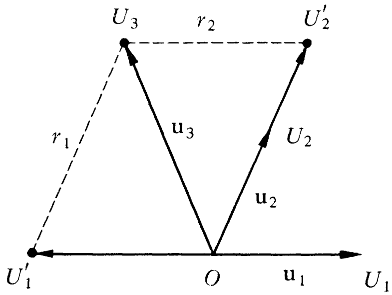

Fig. 7

– Se invece $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ non sono paralleli, le rette r_1, r_2 passanti per il punto U_3 e parallele rispettivamente ai segmenti OU_2, OU_1 intersecano le rette OU_1, OU_2 in due punti U_1', U_2' univocamente individuati e si ha: $\overrightarrow{OU}_3 = \overrightarrow{OU}'_1 + \overrightarrow{OU}'_2$. Poichè $\overrightarrow{OU'_1} = \lambda_1 \mathbf{u}_1$, $\overrightarrow{OU'_2} = \lambda_2 \mathbf{u}_2$, ne segue

$$\mathbf{u}_3 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \tag{4.4}$$

che fornisce la scomposizione del vettore $\mathbf{u}_3$ secondo le direzioni dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

Si osservi che, poichè i punti U_1', U_2' sono univocamente determinati, sono univocamente determinati i numeri reali λ_1, λ_2 per cui sussiste la (4.4). Ciò del resto può anche essere verificato analiticamente. Supposto difatti che sia anche

$$\mathbf{u}_3 = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 \tag{4.4$'$}$$

per sottrazione della (4.4′) dalla (4.4) si ha

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\, \mathbf{u}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \mathbf{u}_2$$

da cui: $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$ essendo $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ linearmente indipendenti.

Si ha pertanto

Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ *sono linearmente indipendenti, ogni vettore complanare con essi si esprime univocamente con la* (4.4); *al variare dei numeri reali* λ_1, λ_2 *si ottengono in tal modo tutti i vettori del piano vettoriale* V_2 *individuato da* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$.

TEOREMA 4. *Quattro vettori* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ *sono sempre linearmente dipendenti.*

Da ciò segue che sono linearmente dipendenti $n \geq 4$ vettori di V_3 comunque scelti.

Dimostriamo il Teorema 4; esso è ovvio se già i tre vettori $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ sono linearmente dipendenti, cioè complanari.

Supponiamo quindi che $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ siano linearmente indipendenti e quindi tali che i loro rappresentanti $\overrightarrow{OU}_1, \overrightarrow{OU}_2, \overrightarrow{OU}_3$ uscenti da uno stesso punto O non appartengano ad uno stesso piano. Sia $\overrightarrow{OU}_4$ il rappresentante di $\mathbf{u}_4$ e si consideri la retta r passante per U_4 e parallela ad $\overrightarrow{OU}_3$. Essa interseca il piano OU_1U_2 in un punto P e si ha

$$\mathbf{u}_4 = (U_4 - P) + (P - O) \ .$$

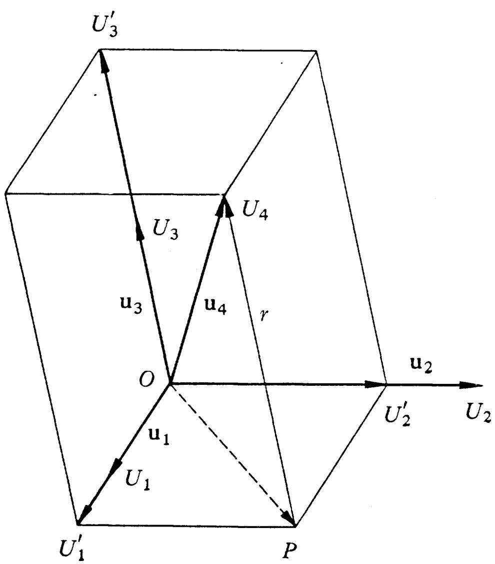

Fig. 8

Poichè $U_4 - P$ è parallelo ad $\mathbf{u}_3$ e $P - O$ è complanare con $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ si ha

$$U_4 - P = \lambda_3 \mathbf{u}_3 \ , \qquad P - O = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

da cui

$$\mathbf{u}_4 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \ . \tag{4.5}$$

Ciò prova che i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ sono linearmente dipendenti. Inoltre, se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti, i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono univocamente individuati come segue sia dalla costruzione grafica, sia supponendo che $\mathbf{u}_4$ si possa esprimere con un'altra combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Si noti infine che i vettori $\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, \lambda_3 \mathbf{u}_3$ sono rappresentati dai segmenti orientati $\overrightarrow{OU'_1}, \overrightarrow{OU'_2}, \overrightarrow{OU'_3}$ ove U'_1, U'_2, U'_3 sono i punti di intersezione delle rette OU_1, OU_2, OU_3 con i piani passanti per U_4 e paralleli rispettivamente ai piani $OU_2U_3, OU_1U_3, OU_1U_2$.

Da quanto precede si ha quindi che ogni vettore di V_3 si può esprimere in un solo modo come combinazione lineare di tre vettori di V_3 linearmente indipendenti.

5. Base. Componenti

DEF. *Si dice base di V_3 una qualsiasi terna ordinata di vettori linearmente indipendenti.*

Assegnata una base di V_3, che indichiamo con $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, risulta da quanto visto al n. **4** che ogni vettore $\mathbf{u}$ di V_3 è esprimibile in modo unico come combinazione lineare di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \ . \tag{5.1}$$

I numeri u_1, u_2, u_3 si dicono le *componenti* di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Si noti che occorre sempre precisare la base rispetto alla quale si considerano le componenti di un vettore; infatti, se si cambia la base, cambiano anche le componenti di un prefissato vettore. Soltanto il vettore nullo ha le stesse componenti, tutte nulle, rispetto ad una base qualsiasi.

La scelta di una base $\mathcal{B}$ in V_3 permette di associare ad ogni vettore $\mathbf{u}$ la terna ordinata (u_1, u_2, u_3) delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$ e permette di identificare V_3 con $\mathbf{R}^3$; ciò si esprime scrivendo, una volta nota la base $\mathcal{B}$,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \ .$$

Inoltre si ha la possibilità di tradurre le operazioni di tipo grafico sui vettori in operazioni di tipo numerico sulle loro componenti.

Così considerato un secondo vettore

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathbf{e}_2 + v_3\,\mathbf{e}_3 = (v_1, v_2, v_3)$$

si ha che il vettore somma di $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è dato da

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3 \ ,$$

cioè $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ha come componenti rispetto a $\mathcal{B}$ la somma delle componenti omonime di $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Il prodotto del numero reale λ per il vettore $\mathbf{u}$ è il vettore

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda u_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda u_3)\mathbf{e}_3$$

con componenti i prodotti di λ per le componenti di $\mathbf{u}$.

Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono paralleli se e solo se hanno le componenti proporzionali:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} \ .$$

Tenuto conto dei risultati del n. **5.3** del Cap. II, i tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono complanari se e solo se è nullo il determinante delle loro componenti

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \ .$$

OSSERVAZIONE. Consideriamo il sottoinsieme V_1 di V_3 costituito da tutti i vettori paralleli ad una retta o anche paralleli ad un vettore $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$; poichè ogni vettore $\mathbf{u}$ di V_1 si scrive in un sol modo nella forma:

$$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{e}_1$$

si dice che $\{\mathbf{e}_1\}$ è una base di V_1.

Analogamente, sia V_2 il sottoinsieme di V_3 costituito dai vettori paralleli ad un piano, ossia complanari con due vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ non paralleli. Poichè ogni vettore $\mathbf{u}$ di V_2 si scrive in modo unico nella forma:

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$$

si dice che $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è una base di V_2.

6. Basi ortonormali

DEF. 1. *Angolo di due vettori non nulli* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *è l'angolo convesso* $\widehat{AOB}$ *di due loro rappresentanti* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

La misura $\widehat{\mathbf{uv}}$ di tale angolo è pertanto soggetta alle limitazioni

$$0 \leq \widehat{\mathbf{uv}} \leq \pi \ .$$

Considerata una terna di vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ non complanari ed applicati nello stesso punto O, il piano dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ divide lo spazio in due semispazi e $\mathbf{w}$ individua uno di essi.

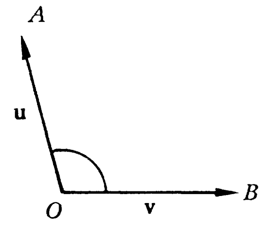

Fig. 9

DEF. 2. *La terna di vettori* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *si dice positiva (ovvero negativa) se la più piccola rotazione nel piano* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *che sovrappone* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *è vista dal semispazio individuato da* $\mathbf{w}$ *in senso antiorario (ovvero orario).*

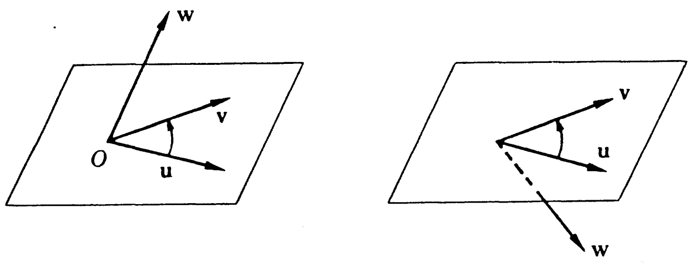

Fig. 10

Ovviamente la positività di una terna dipende dall'ordine con cui si considerano i vettori ed è facile verificare che le terne $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ (ottenute con permutazione circolare) sono dello stesso segno, opposto a quello delle terne $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\}$.

DEF. 3. *Una base dei vettori dello spazio si dice ortonormale se è costituita da tre versori a due a due ortogonali.*

Vi sono basi ortonormali *positive* e *negative*. Una base ortonormale positiva verrà indicata nel seguito con la notazione $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

L'uso di basi ortonormali, invece che di basi arbitrarie, è particolarmente utile per eseguire in componenti le operazioni di prodotto scalare e vettoriale che seguono.

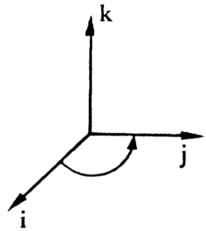

Fig. 11

7. Il prodotto scalare

7.1. *Definizione e proprietà.* Il *prodotto scalare* è una legge che associa ad ogni coppia di vettori $\mathbf{u},\mathbf{v}$ un numero reale che si indica col simbolo $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ (e si legge $\mathbf{u}$ scalare $\mathbf{v}$) così definito:

a) se uno almeno dei vettori $\mathbf{u},\mathbf{v}$ è nullo si pone $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$;
b) se $\mathbf{u},\mathbf{v}$ sono non nulli

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}\ . \tag{7.1}$$

Si ha pertanto che il prodotto scalare di due vettori è zero se o $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}=\pi/2$ ovvero uno almeno dei vettori è nullo; poichè il vettore nullo, avendo direzione indeterminata, si può considerare ortogonale ad un qualsiasi altro vettore, si ha che l'ortogonalità di due vettori è espressa dall'annullarsi del loro prodotto scalare.

Se $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ segue dalla (7.1) che

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|^2$$

e quindi

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\ . \tag{7.2}$$

Talvolta il prodotto scalare $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ si indica semplicemente con $\mathbf{u}^2$.

Inoltre dalla (7.1) risulta

$$\cos\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\ . \tag{7.3}$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà: