Vi sono basi ortonormali *positive* e *negative*. Una base ortonormale positiva verrà indicata nel seguito con la notazione $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

L'uso di basi ortonormali, invece che di basi arbitrarie, è particolarmente utile per eseguire in componenti le operazioni di prodotto scalare e vettoriale che seguono.

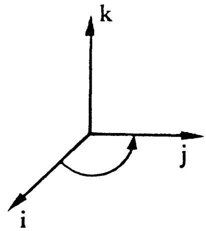

Fig. 11

7. Il prodotto scalare

7.1. *Definizione e proprietà.* Il *prodotto scalare* è una legge che associa ad ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ un numero reale che si indica col simbolo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (e si legge $\mathbf{u}$ scalare $\mathbf{v}$) così definito:

a) se uno almeno dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è nullo si pone $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$;
b) se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono non nulli

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} \; . \tag{7.1}$$

Si ha pertanto che il prodotto scalare di due vettori è zero se o $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \pi/2$ ovvero uno almeno dei vettori è nullo; poichè il vettore nullo, avendo direzione indeterminata, si può considerare ortogonale ad un qualsiasi altro vettore, si ha che l'ortogonalità di due vettori è espressa dall'annullarsi del loro prodotto scalare.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ segue dalla (7.1) che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

e quindi

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \; . \tag{7.2}$$

Talvolta il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ si indica semplicemente con $\mathbf{u}^2$.

Inoltre dalla (7.1) risulta

$$\cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \; . \tag{7.3}$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

I) *commutativa:* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
II) *di omogeneità:* $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$
III) *distributiva:* $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

La I) e la II) seguono facilmente dalla definizione; si dimostrino per esercizio distinguendo per la II) i casi $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$. La dimostrazione della III) verrà data più avanti.

Se $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è una base ortonormale si ha:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \ ; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \ ;$$

pertanto se

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \ , \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

utilizzando le precedenti proprietà si ottiene che il prodotto scalare di $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è espresso in componenti rispetto ad una *base ortonormale* dalla semplice relazione:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \ . \tag{7.4}$$

Dalle (7.2), (7.3), (7.4) si ottiene inoltre:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \ , \tag{7.5}$$

$$\cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \ \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \ . \tag{7.6}$$

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ si ha

$$\cos \widehat{\mathbf{i}\mathbf{v}} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} \ , \quad \cos \widehat{\mathbf{j}\mathbf{v}} = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} \ , \quad \cos \widehat{\mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} \ ; \tag{7.7}$$

tali numeri si dicono i *coseni direttori* del vettore $\mathbf{v}$ e sono le componenti rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ del versore di $\mathbf{v}$; in particolare la somma dei quadrati dei coseni direttori di un vettore vale 1.

7.2. ***Componente ortogonale di un vettore rispetto ad un altro vettore.*** Sia $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ed r una retta orientata parallela ad $\mathbf{u}$ e con verso di percorrenza concorde a quello di $\mathbf{u}$.