Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa.

Dimostrazione

Il sistema lineare $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ ha soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ se e solo se sostituendo ordinatamente le componenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ alle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ le m equazioni diventano m identità:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

Ovvero, nel linguaggio delle matrici:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Che si può scrivere

$$\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 \\ a_{21}\alpha_1 \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}\alpha_2 \\ a_{22}\alpha_2 \\ \dots \\ a_{m2}\alpha_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}\alpha_n \\ a_{2n}\alpha_n \\ \dots \\ a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Che diventa

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Una soluzione c'è se e solo se la colonna dei termini noti $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ si scrive come combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Allora le due matrici:

la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

e la matrice completa $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

hanno lo stesso rango, perché il rango di una matrice è il numero massimo di colonne linearmente indipendenti. La matrice completa ha una colonna in più rispetto alla matrice dei coefficienti, la colonna dei termini noti. I ranghi sono uguali se e solo se la colonna dei termini noti non aumenta il numero massimo delle colonne linearmente indipendenti e dunque se e solo se è linearmente dipendente dalle colonne della matrice dei coefficienti, ossia se viene generata dalle colonne della matrice dei coefficienti.

Inoltre se

$$rango\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = n$$

Le colonne della matrice dei coefficienti sono linearmente indipendenti ⇒ generano in modo unico ⇒ unica soluzione

Mentre se

$$rango\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = r < n$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \dots \\ a_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \alpha_{r+1}\begin{pmatrix} a_{1r+1} \\ a_{2r+1} \\ \dots \\ a_{mr+1} \end{pmatrix} + \dots - \alpha_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se considero $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ parametri, allora ogni volta che fisso i valori degli $n-r$ parametri ho un'unica soluzione. Ho ∞^{n-r} soluzioni, ossia le soluzioni dipendono da $n-r$ parametri.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 1 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2h - k \\ x_2 = h \\ x_3 = 1 + 2k \\ x_4 = k \end{cases}$$

$$S = \{(1 - 2h - k, h, 1 + 2k, k) \ tali\ che\ h, k \in R\}$$