Esercizio 19

Trovare una soluzione particolare di

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Le soluzioni dell'omogenea associata $y'' + y = 0$ sono le radici del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 1$. Si ha

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

e dunque due soluzioni linearm. indipend. sono

$$y_1(t) = \cos t \qquad y_2(t) = \sin t.$$

da cui

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Poiché $\det W(t) = 1$ si ha

$$v_1(t) = \int (-\sin(t)) \frac{1}{\cos(t)}\, dt = \ln(|\cos(t)|)$$
$$= \ln(\cos(t)),$$

(per $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ infatti $\cos(t) > 0$) e

$$v_2(t) = \int \cos(t) \frac{1}{\cos(t)}\, dt = t.$$

La corrispondente soluzione particolare è

$$y(t) = (\ln\cos(t))\cos(t) + t\sin(t).$$

Esercizio 20

Determinare una soluzione particolare di

$$y'' + y = \tan t$$

Si ha $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \sin t$. Dunque $\det(W(t)) = 1$ e

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \int (-\sin(t))\tan(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\cos^2(t)-1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(t) - \ln\left(\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right) \end{aligned}$$

e

$$v_2(t) = \int \cos(t)\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t).$$

Quindi otteniamo la soluzione particolare

$$y(t) = \cos(t)\left(\sin(t) - \ln\left(\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right)\right) - \sin(t)\cos(t).$$