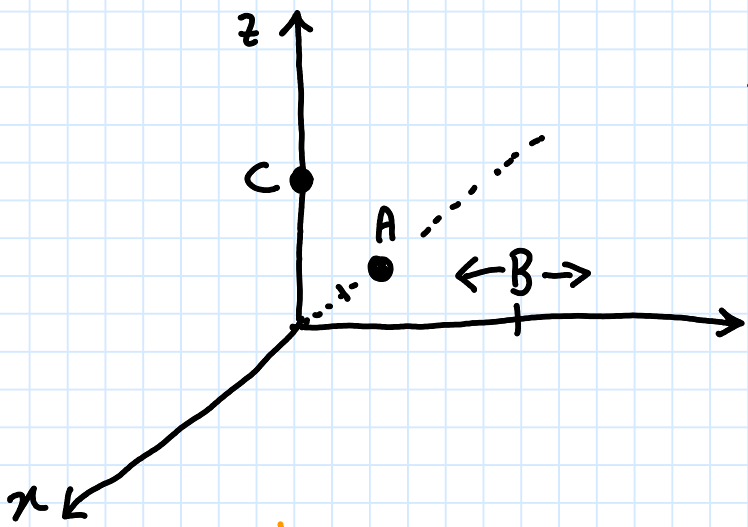
21 Dicembre ore 10:30

Titolo nota 21/12/2020

Buongiorno!

C'è qualcuno che ha un esercizio da propormi? O qualcosa da chiedere?

4) Sia α il piano passante per i punti A(–2, 0, 0), B(0, t, 0) e C(0, 0, 2 $\sqrt{2}$). Trovare i **valori di t** per i quali il piano α forma una angolo di π/3 radianti con l'asse Y (*non è necessario trovare il piano α*).



$\forall t \in \mathbb{R}$ i 3 punti sono <u>NON</u> allineati e, quindi, $\exists !$ piano α che li contiene

piano α asse Y : $x = z = 0$

$t \in \mathbb{R}$: $(\widehat{\alpha, \text{asse } Y}) = \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

$A(-2,0,0)$; $B(0,t,0)$; $C(0,0,2\sqrt{2})$

problema angolo θ retta-piano

retta = asse Y

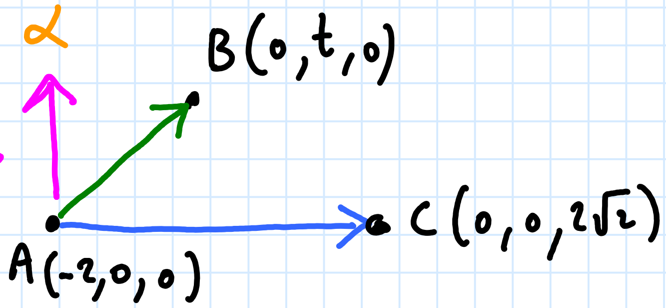
$(l,m,n) = (0,1,0)$

$$\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|al+bm+cn|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$a = ?$
$b = ?$
$c = ?$

$(a,b,c)=\vec{u}_\alpha \perp \alpha$

$[\vec{AB}]\wedge[\vec{AC}]$



$[\vec{AB}]=(2,t,0)$ $\qquad$ $[\vec{AC}]=(2,0,2\sqrt{2})$

$$\det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & t & 0\\ 2 & 0 & 2\sqrt{2}\end{bmatrix}=\underbrace{(2\sqrt{2}t)}_{a}\vec{i}\ \underbrace{-(4\sqrt{2})}_{b}\vec{j}\ \underbrace{-(2t)}_{c}\vec{k}$$

$l=0 \qquad m=1 \qquad n=0 \qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|2\sqrt{2}t\cdot\cancel{0}-4\sqrt{2}\cdot 1-2\cdot t\cdot\cancel{0}|}{\sqrt{8t^2+32+4t^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+0^2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{12t^2+32}}$$

$$3\cdot(12t^2+32)=4\cdot 16\cdot 2$$

$$3\cdot\cancel{4}\cdot(3t^2+8)=\cancel{4}\cdot 16\cdot 2$$

$$9t^2+24=32 \qquad 9t^2=8$$

$$t^2=\frac{8}{9} \qquad \boxed{t=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$B_1=\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3},0\right)$

$B_2=\left(0,-\frac{2\sqrt{2}}{3},0\right)$

15/10/2009 (5) nel piano

$r: 4x+3y-10=0$ direttrice parabole passanti per $O(0,0)$ e aventi fuochi sull'asse Y delle ordinate. Trovare i $\boxed{\text{FUOCHI}}$.

DEFINIZIONE di parabola luogo dei punti del piano $P(x,y)$ tali che

$$d(P, \text{Fuoco}) = d(P, \text{direttrice})$$

<u>Hp</u> Fuoco $\in$ asse $Y \Rightarrow F(0,c)$

<u>Hp</u> parabole passano per Origine

$$d(O,F) = d(O,r)$$

r → direttrice $4x+3y-10=0$

$$\sqrt{(0-0)^2+(0-c)^2} = \frac{|4\cdot 0+3\cdot 0-10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{c^2} = 2$$

$$|c| = 2 \Rightarrow c = \pm 2$$

$F_1(0,2)$

$F_2(0,-2)$

6) Stabilire la **mutua posizione** delle sfere seguenti:

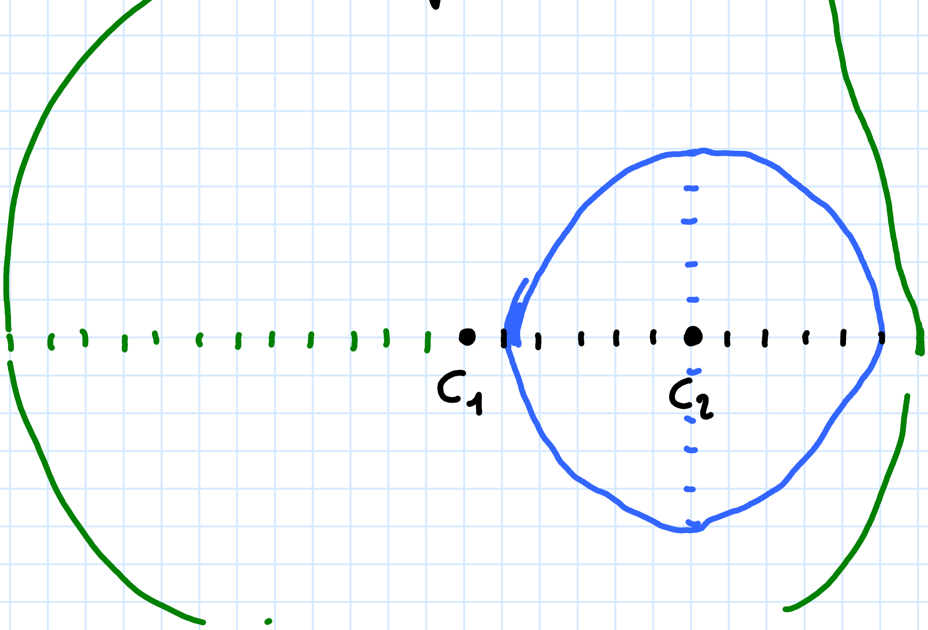
- $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 16y + 16z = 0$ e
- $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 24y + 24z + 299 = 0$

$C_1 \qquad R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+(-16)^2+(16)^2-4\cdot 0} = ? = 12$

$C_2 \qquad R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+(24)^2-4\cdot 299} = ? = 5$

$C_1(4, 8, -8) \qquad C_2(6, 12, -12)$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(6-4)^2+(12-8)^2+(-12+8)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$



$\mathcal{S}_2$ è interna a $\mathcal{S}_1$

$R = 12$
$r = 5$

$R - r = 7$

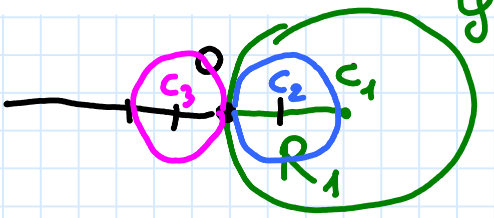
$0 < d(C_1, C_2) < R - r$ interna

$0 < 6 < 7$

---

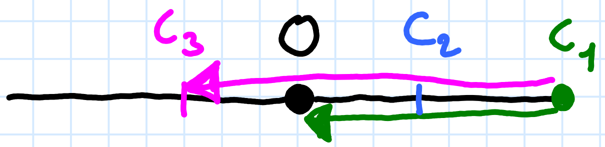
6) Si consideri la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z = 0$. Scrivere l'equazione di una delle due sfere tangenti a S nell'origine e aventi il raggio uguale alla metà del raggio di S. Inoltre, dire se tale sfera è tangente esternamente o internamente.

$\mathcal{S}$ NOTA



$C_1\left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$

$R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+3^2-4\cdot 0} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ $\qquad R_2 = R_3 = \frac{\sqrt{14}}{4}$



$[\overrightarrow{C_1C_3}] = \frac{3}{2}[\overrightarrow{C_1O}]$

$[\overrightarrow{C_1O}] = \left(0-\left(-\frac{1}{2}\right),\ 0-(-1),\ 0-\left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

C_2 = punto medio di OC_1

$C_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ $\qquad R_2 = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$$\left(x-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(y-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(z-\left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2$$

$\mathcal{S}_2: \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{14}{16}$

↳ tang internamente

$[\overrightarrow{C_1C_3}] = \left(\alpha-\left(-\frac{1}{2}\right),\ \beta-(-1),\ \gamma-\left(-\frac{3}{2}\right)\right) =$

$C_3(\alpha, \beta, \gamma)$ $\qquad = \left(\alpha+\frac{1}{2},\ \beta+1,\ \gamma+\frac{3}{2}\right)$

$[\overrightarrow{C_1C_3}] = \quad [\overrightarrow{C_1O}]$

dove $[\overrightarrow{C_1O}] = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

$\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+1, \gamma+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

$\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+1, \gamma+\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

$$\begin{cases} \alpha+\frac{1}{2} = \frac{3}{4} & \rightarrow \alpha = \frac{3}{4}-\frac{1}{2} \\ \beta+1 = \frac{3}{2} & \rightarrow \beta = \frac{3}{2}-1 \\ \gamma+\frac{3}{2} = \frac{9}{4} & \rightarrow \gamma = \frac{9}{4}-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$C_3\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$R_3 = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\mathcal{S}_3 \quad (x-\frac{1}{4})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (z-\frac{3}{4})^2 = \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2$

tang esternamente

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 10y + 5 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; \quad p_A(\lambda) = \dots = \lambda^2 - 10\lambda + 24 =$$

$$= (\lambda - 6) \cdot (\lambda - 4)$$

$\lambda_1 = +6$ $\qquad$ $\lambda_2 = +4$

autovettori rispetto a $\lambda_1 = +6$

$$(A - 6I_2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad x + y = 0$$

$$y = -x$$

$$(x,y) = (x,-x) = x(1,-1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

autovettore $\quad x(1,-1) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\vec{v}_1 = (1,-1) \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \sqrt{2}$$

auto $\boxed{\text{VERSORE}}$ $\quad$ prendo $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$\vec{u}_1$ $\vec{u}_2$

$\det C = +1$

rotazione $\theta = 45°$ verso orario

$$\underset{d}{[2} \quad \underset{e}{-10]} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = [\underset{d'}{6\sqrt{2}} \quad \underset{e'}{-4\sqrt{2}}]$$

dopo la rotazione si ha che

$$\boxed{6(x')^2} + \boxed{4\cdot(y')^2} + \boxed{6\sqrt{2}\,x'} \boxed{-4\sqrt{2}\cdot y'} + 5 = 0$$

$$\boxed{6\cdot\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \cancel{3}} + \boxed{4\cdot\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \cancel{2}} + \cancel{5} = 0$$

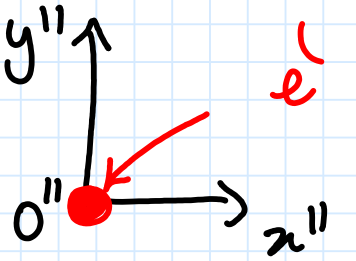
traslazione $\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$6\cdot(x'')^2 + 4\cdot(y'')^2 = 0$$

$$\boxed{\underset{>0}{3}\cdot\underset{\geq 0}{(x'')^2} + \underset{>}{2}\cdot\underset{\geq 0}{(y'')^2} = 0}$$

eq. canonica

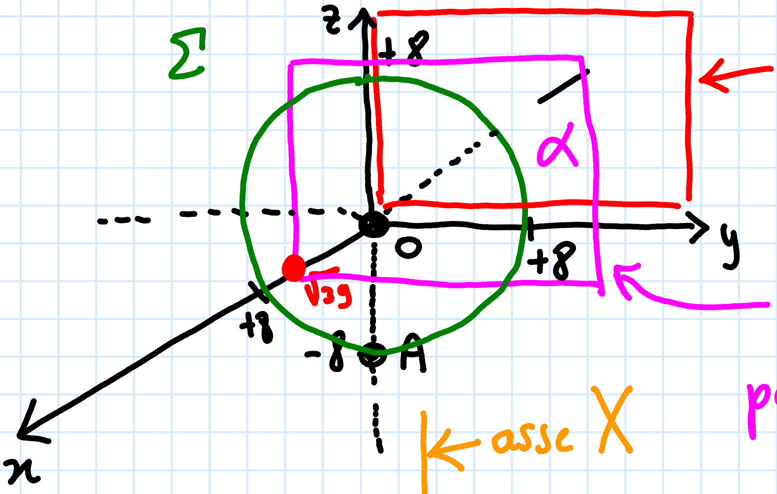
ha un'unica soluzione $(x'', y'') = (0,0)$



è l'unico punto REALE della conica

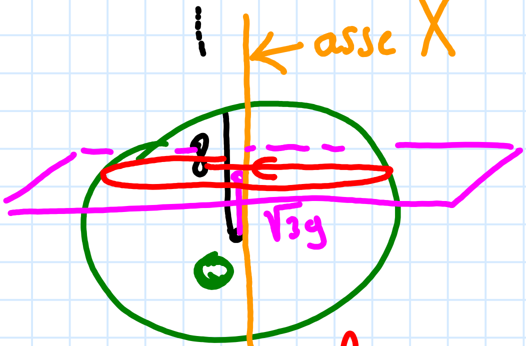
CONICA avente un solo punto REALE

6) Sia Σ la sfera di centro l'origine O(0, 0, 0) e passante per A(0, 0, –8). Sia π il piano parallelo al piano YZ e passante per il punto B($\sqrt{39}$, $-\sqrt{20}$, $\sqrt{7}$). Trovare il **centro** e il **raggio** della <u>**circonferenza**</u> C ottenuta intersecando la sfera Σ col piano π.



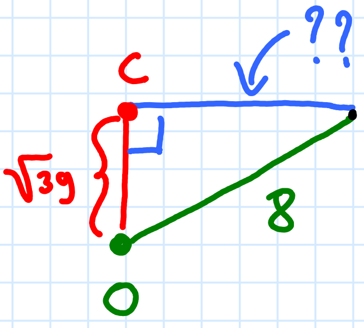
I quadrante piano YZ

// piano YZ e passante per B



$8 = \sqrt{64} > \sqrt{39}$

C centro circonferenza $C(\sqrt{39}, 0, 0)$



r = raggio circonferenza

$r = 5$

$\boxed{\text{FINE}}$