1) Dopo aver dato la **definizione** di “*dipendenza lineare di n vettori*”, **completare** e **dimostrare** la proposizione seguente: “*Sia $V_R$ uno spazio vettoriale reale. Se i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ di $V_R$ sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano altri p vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_p$ di $V_R$ si ha che i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_p$ sono linearmente …………….*”.

2) Dopo aver dato la **definizione** di “*dipendenza lineare di n vettori*”, **dimostrare** il teorema di “*caratterizzazione della lineare dipendenza*”.

3) Dopo aver **SOLO** **enunciato** il teorema di “*caratterizzazione di un sottospazio*”, **completare** e **dimostrare** la proposizione seguente: “*Sia $V_R$ uno spazio vettoriale reale. Comunque presi n vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ di $V_R$ il sottoinsieme U contenente tutti e soli i vettori di $V_R$ che sono combinazioni lineari dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ è un …………….*”.

4) Dopo aver dato la **definizione** di “*sottospazio generato da n vettori*”, **dimostrare** la proposizione seguente: “*Sia $V_R$ uno spazio vettoriale reale. Se U è il sottospazio di $V_R$ generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ e W è il sottospazio di $V_R$ generato dai vettori $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ allora U = W se e solo se $\boldsymbol{w} \in U$.*”

5) Dopo aver dato la **definizione** di “*dipendenza lineare di n vettori*”, enunciare la condizione affinchè n vettori siano linearmente indipendenti. Poi, **completare** e **dimostrare** la proposizione seguente: “*Sia $V_R$ uno spazio vettoriale reale. Sia U il sottospazio di $V_R$ generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ e sia $\boldsymbol{v} \notin U$. Se i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ sono linearmente indipendenti, allora i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ sono linearmente …………….*”.

6) Dopo aver dato la **definizione** di “*base di uno spazio vettoriale*”, **dimostrare** il teorema di “*caratterizzazione di una base*” (**o** il teorema di “*caratterizzazione della lineare indipendenza*”).

7) Dopo aver dato la **definizione** di “*matrice invertibile*”, **dimostrare** che “*se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine e invertibili, allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*”.

8) Dopo aver dato la **definizione** di “*matrice invertibile*” e di “*trasposta di una matrice*”, **dimostrare** che “*se A è una matrice invertibile, allora $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*”.

9) **Enunciare** e **dimostrare** il “*1° teorema di Laplace*” (in alternativa alla dimostrazione, illustrare le altre proprietà del determinante).

10) **Enunciare** e **dimostrare** il “*2° teorema di Laplace*” (in alternativa alla dimostrazione, illustrare le altre proprietà del determinante).

11) Dopo aver dato la **definizione** di “*soluzione*” di un sistema lineare, **enunciare** e **dimostrare** il teorema di “*Rouché-Capelli*”.

12) Dopo aver dato la **definizione** di “*sistema lineare normale*”, **enunciare** e **dimostrare** il teorema di “*Cramer*”.

13) Dopo aver dato la **definizione** di “*autosoluzione*”, **enunciare** e **dimostrare** una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare omogeneo abbia autosoluzioni.

14) Dopo aver dato la **definizione** di sistema lineare "*omogeneo*", **completare** e **dimostrare** la proposizione: "*L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno …………*".

15) Dopo aver dato la **definizione** di "*sistema omogeneo associato*" ad un sistema lineare AX = B, **dimostrare** la seguente proposizione: "*Sia AX = B un sistema lineare compatibile in n incognite e sia* $Y_p$ *una sua soluzione. Una n-upla Z è una soluzione del sistema AX = B se e solo se esiste una soluzione* $X_0$ *del sistema omogeneo associato tale che* $Z = Y_p + X_0$".

16) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **dimostrare** che "*gli autovalori reali di una matrice quadrata sono tutte e solo le radici reali del suo polinomio caratteristico*".

17) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **completare** e **dimostrare** la seguente proposizione: "*se* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ *sono s autovalori a due a due distinti tra loro e se* $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{s-1}, V_s$ *sono s autovettori relativi agli autovalori* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ *rispettivamente, allora i vettori* $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{s-1}, V_s$ *sono linearmente ……………*".

18) Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n e sia β un suo autovalore reale. Dare la **definizione** di "*molteplicità algebrica*" $m_a(\beta)$ e "*molteplicità geometrica*" $m_g(\beta)$ dell'autovalore β ed **enunciare** la relazione tra le due molteplicità. Infine, **enunciare** le condizioni necessarie e sufficienti affinchè esista una base di $R^n$ formata da autovettori di A.

19) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto scalare di due vettori liberi*" illustrarne le **proprietà**

20) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto vettoriale di due vettori liberi*" illustrarne le **proprietà**, con particolare attenzione al significato geometrico del modulo.

21) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto misto di tre vettori liberi*", **dimostrare** il significato geometrico del suo valore assoluto.

22) **Enunciare** e **dimostrare** la condizione necessaria e sufficiente di complanarità di 4 punti.

23) **Studiare** (analiticamente) la mutua posizione di due piani.

24) **Studiare** (analiticamente) la mutua posizione di una retta ed un piano.

25) **Studiare** (analiticamente) la mutua posizione di due rette nello spazio.

26) Enunciare e **dimostrare** il significato geometrico dei coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di un piano.

27) Enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo della distanza di un punto da un piano.

28) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per "*angolo tra due rette (**nello spazio**)*" enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra due rette.

29) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per "*angolo tra due piani*" enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra due piani.

30) Dopo **aver spiegato** cosa si intende per "*angolo tra una retta e un piano*", enunciare e **dimostrare** la formula per il calcolo dell'angolo tra una retta e un piano.