

13. Determinante di una matrice quadrata

13.1. Definizione. Dati n numeri reali $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{(n-2)}, x_{(n-1)}, x_n$ col simbolo

$\sum_{i=1}^n x_i$ indicheremo la loro somma $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n)$. Quindi,

$$\sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n$$

13.2. Esempio.

- $\sum_{i=1}^n \alpha y_i = \alpha y_1 + \alpha y_2 + \alpha y_3 + \alpha y_4 + \dots + \alpha y_{(n-2)} + \alpha y_{(n-1)} + \alpha y_n$
- $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \dots + (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n)$
- $\sum_{i=1}^n x_{ih} = x_{1h} + x_{2h} + x_{3h} + x_{4h} + \dots + x_{(n-1),h} + x_{nh}$
- $\sum_{i=1}^n (\alpha y_i + z_{ih}) = (\alpha y_1 + z_{1h}) + (\alpha y_2 + z_{2h}) + (\alpha y_3 + z_{3h}) + \dots + (\alpha y_{(n-1)} + z_{(n-1),h}) + (\alpha y_n + z_{nh})$
- $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{h=1}^m x_{hi} \right) = \left(\sum_{h=1}^m x_{h1} \right) + \left(\sum_{h=1}^m x_{h2} \right) + \left(\sum_{h=1}^m x_{h3} \right) + \dots + \left(\sum_{h=1}^m x_{h,(n-1)} \right) + \left(\sum_{h=1}^m x_{hn} \right)$

13.3. Lemma. Valgono le seguenti proprietà:

$$(0) \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_{(n-2)} = x_{(n-1)} = x_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i = n\alpha$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) = \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \left(\sum_{h=1}^m x_{hi} \right) = \sum_{h=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{hi} \right)$$

Dimostrazione.

$$(0) \quad \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{(n-1)} + x_n = \alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha + \alpha = n\alpha$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \dots + (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n) =$$

[per le proprietà associativa e commutativa della somma]

$$= (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{(n-1)} + x_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{(n-1)} + y_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) = (\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) + \dots + (\alpha x_{(n-1)}) + (\alpha x_n) =$$

[per le proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma]

$$= \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n) = \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

(3) Sia X la matrice di tipo $m \times n$ avente come elementi proprio i numeri reali x_{hi} .

$$X = \begin{array}{cccccc} \left[\begin{array}{cccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdot & x_{1,(n-1)} & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdot & x_{2,(n-1)} & x_{2,n} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdot & x_{3,(n-1)} & x_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{(m-1),1} & x_{(m-1),2} & x_{(m-1),3} & \cdot & x_{(m-1),(n-1)} & x_{(m-1),n} \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdot & x_{m,(n-1)} & x_{m,n} \end{array} \right. & \begin{array}{l} \rightarrow r_1 \\ \rightarrow r_2 \\ \rightarrow r_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \rightarrow r_{(m-1)} \\ \rightarrow r_m \end{array} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ s_1 & s_2 & s_3 & & s_{(n-1)} & s_n & \rightarrow S \end{array}$$

Per ogni indice di riga $h \in \{1, 2, 3, \dots, (m-1), m\}$ indichiamo con r_h il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della h-esima riga. Quindi,

$$r_h = x_{h1} + x_{h2} + x_{h3} + x_{h4} + \dots + x_{h,(n-2)} + x_{h,(n-1)} + x_{hn} = \sum_{i=1}^n x_{hi}$$

Per ogni indice di colonna $i \in \{1, 2, 3, \dots, (n-1), n\}$ indichiamo con s_i il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della i-esima colonna. Quindi,

$$s_i = x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} + \dots + x_{(m-2),i} + x_{(m-1),i} + x_{mi} = \sum_{h=1}^m x_{hi}$$

Se indichiamo con S la somma di tutti gli elementi della matrice X, è facile convincersi che

$$\sum_{i=1}^n s_i = S = \sum_{h=1}^m r_h$$

Quindi, $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{h=1}^m x_{hi} \right) = \sum_{i=1}^n s_i = S = \sum_{h=1}^m r_h = \sum_{h=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{hi} \right)$. ■

13.4. Definizione. Sia A una matrice quadrata di tipo $m \times n$ ad elementi reali. Se $h < m$ e $k < n$ con il simbolo $A_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h\}, \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}}$ indicheremo la matrice A' di tipo $(m-h) \times (n-k)$ ottenuta “cancellando” da A le righe di indici $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h\}$, le colonne di indici $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}$ e “eliminando gli spazi vuoti”. Diremo anche che A' è una **sottomatrice** di A .

Se $h = k = 1$ invece di $A_{\{\alpha\}, \{\beta\}}$ scriveremo brevemente $A_{\alpha, \beta}$ e, talvolta, anche solamente $A_{\alpha\beta}$.

13.5. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×8 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 & 1 & -7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 2^a \\ \leftarrow 5^a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^a & 2^a & 4^a & 7^a \end{array}$$

Cancellando da A le righe di indici $\{2, 5\}$ e le colonne di indici $\{1, 2, 4, 7\}$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Eliminando gli spazi vuoti otteniamo la seguente matrice di tipo 3×4

$$A' = A_{\{2,5\}, \{1,2,4,7\}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

13.6. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Si ha che

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

13.7. Definizione. Sia A una matrice **quadrata** di ordine n ad elementi reali.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{(n-1),(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definiamo *determinante di A* , e lo indichiamo con $\det A$, il **numero reale** seguente:

- se $n = 1$, cioè $A = [a_{11}]$, allora $\det A := a_{11}$
- se $n \geq 2$ allora $\det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$

13.8. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 2.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = \\ &= (-1)^2 a_{11} \det [a_{11}] + (-1)^3 a_{12} \det [a_{12}] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \\ &= \mathbf{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{aligned}$$

13.9. Esempio. Utilizzando quanto visto nell'osservazione precedente abbiamo che:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 15 = -3 \quad \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = (-7) - (-12) = 5 \quad \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = 12 - (-12) = 0$$

13.10. Esempio. Considerando le sottomatrici di ordine 2 dell'esempio 13.6 si ha che:

$$\begin{aligned} \det A_{11} &= \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27 & \det A_{12} &= \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2 & \det A_{13} &= \det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5 \\ \det A_{21} &= \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12 & \det A_{22} &= \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21 & \det A_{23} &= \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38 \\ \det A_{31} &= \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8 & \det A_{32} &= \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14 & \det A_{33} &= \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35. \end{aligned}$$

13.11. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 3.

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \\
 &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} = \\
 &= (-1)^2 a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^3 a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^4 a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \\
 &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = \\
 &= \mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}}.
 \end{aligned}$$

13.12. Osservazione. Lo sviluppo del determinante di ordine 3 si può ricordare utilizzando la “*regola di Sarrus*”. Nella riga precedente si osserva che si hanno sei addendi ognuno prodotto di tre fattori. Costruiamo ora una matrice C aggiungendo alla matrice A le prime due colonne di A

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Si può notare che i primi tre addendi corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali discendenti verso destra mentre i secondi tre addendi (quelli preceduti dal segno negativo) corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali ascendenti verso destra.

13.13. Esempio. Si calcoli il determinante delle matrici A e B quadrate di ordine 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-48) + (-11) + (-105) - (220) - (14) - (-18) = -380$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det B = (-30) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -30$$

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

13.14. Lemma. Scambiando due righe il determinante cambia di segno.

13.15. Teorema (O.E.1). Effettuando s scambi di righe il determinante viene moltiplicato per $(-1)^s$.

13.16. Corollario. Se una matrice quadrata ha due righe uguali, allora il suo determinante vale zero.

Dimostrazione. Sia A una matrice avente la i -esima riga uguale alla h -esima riga con $i \neq h$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando la i -esima riga con la h -esima riga. Per il Lemma 13.14 è $\det B = -\det A$. D'altronde, è $B = A$ per cui $\det B = \det A$. Quindi, si ha che $\det A = 0$. ■

13.17. Teorema (1° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni indice

di riga $h = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ si ha che $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}$

Dimostrazione. Per $h = 1$ la tesi è vera per definizione. Sia ora $2 \leq h \leq n$.

Siano $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} A_h \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ A_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$. Si osservi che:

- B si ottiene da A mediante $(h - 1)$ scambi di righe, quindi, $\det A = (-1)^{h-1} \det B$;
- per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n$ è $b_{1j} = a_{hj}$
- per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n$ è $B_{1j} = A_{hj}$

Tenendo conto di tali osservazioni si ha:

$$\det A = (-1)^{h-1} \det B = (-1)^{h-1} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j} \right] = (-1)^{h-1} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} \right] =$$

$(-1)^{h-1}$ non dipende dall'indice di sommatoria, quindi per la proprietà (2) del Lemma 13.3 \uparrow

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{h-1} (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj} \quad \blacksquare$$

13.18. Teorema (O.E.2). Se si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per uno scalare allora il determinante risulta anch'esso moltiplicato per quello scalare.

Dimostrazione. Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando per α la sua h -esima riga, cioè

(♣) per ogni $i \neq h$ è $B_i = A_i$.

(♥) $B_h = \alpha A_h$

allora $\det B = \alpha \det A$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ (\alpha A_h) \\ A_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$ si ha che

(♣) $\Rightarrow B_{hj} = A_{hj}$

(♥) $\Rightarrow b_{hj} = \alpha a_{hj}$

Per il 1° teorema di Laplace si ha:

$$\det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} (\alpha a_{hj}) \det A_{hj} = \alpha \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj} \right] = \alpha (\det A). \quad \blacksquare$$

↑ per la proprietà (2) del Lemma 13.3

13.19. Corollario. Se una matrice ha una riga nulla, allora il suo determinante vale zero.

Dimostrazione. Avere una riga nulla è come avere tutti gli elementi di quella riga moltiplicati per zero. \blacksquare

13.20. Lemma. Se A , B e C sono tre matrici quadrate di ordine n tali che:

(♣) per ogni $i \neq h$ è $A_i = B_i = C_i$ (A , B e C hanno tutte le righe, esclusa la h -esima, uguali)

(♥) $C_h = A_h + B_h$ (la h -esima riga di C è la somma delle h -esime righe di A e di B)

allora $\det C = \det A + \det B$.

Si osservi che, in generale, è la matrice C **NON** è la somma delle matrici A e B , cioè $C \neq A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ B_h \\ A_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{h-1} \\ A_h + B_h \\ A_{h+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$ si ha che

(♣) $\Rightarrow C_{hj} = B_{hj} = A_{hj}$

(♥) $\Rightarrow c_{hj} = a_{hj} + b_{hj}$

$$\det C = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} c_{hj} \det C_{hj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} (a_{hj} + b_{hj}) \det C_{hj} = \sum_{j=1}^n [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj} + (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj}] =$$

per la proprietà (1) del Lemma 13.3 \uparrow

$$= \left[\sum_{j=1}^n [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj}] \right] + \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj} \right] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^n [(-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}] \right] + \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj} \right] = \det A + \det B \quad \blacksquare$$

13.21. Osservazione. Precisiamo ancora una volta che il Lemma precedente **NON** afferma che il determinante di una somma di due matrici è uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

13.22. Esempio. Per le seguenti matrici A e B si ha che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \text{ allora } (A + B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Si ha che $\det(A + B) = -2 \neq -13 = -27 + 14 = \det A + \det B$.

Dal Lemma 13.20 e dal Corollario 13.16 segue subito il seguente:

13.23. Teorema (O.E.3). Se ad una riga si aggiunge un'altra (diversa) riga moltiplicata per uno scalare qualsiasi allora il determinante **non** cambia.

Dimostrazione. Sia B la matrice ottenuta dalla matrice A aggiungendo alla sua k-esima riga la sua h-esima riga moltiplicata per α . Cioè,

(♣) per ogni $i \neq k$ è $B_i = A_i$.

(♥) $B_k = A_k + \alpha A_h$

$$\det B = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ A_k + \alpha A_h \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ A_k \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ \alpha A_h \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha 0 = \det A \quad \blacksquare$$

Dal teorema 13.23 e dal corollario 13.16 seguono subito i seguenti corollari.

13.24. Corollario. Se ad una riga aggiungiamo una combinazione lineare di altre (diverse) righe, allora il determinante non cambia.

13.25. Corollario. Se una riga è combinazione lineare di altre righe, allora il determinante è nullo.

Tenendo conto dei Teoremi 13.15, 13.18 e 13.23 si prova subito il seguente:

13.26. TEOREMA. Sia A una matrice quadrata e sia B la matrice quadrata ottenuta da A tramite un numero finito di operazioni elementari sulle righe di A. Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari **non nulli** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora

$$\det B = (-1)^s (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{(t-1)} \alpha_t) \det A$$

Si osservi che

$$\det B \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

13.27. Teorema. Il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.

Dimostrazione. (*per induzione*). Si verifica subito per matrici di ordine 1 e di ordine 2. Proviamo, ora, che se l'enunciato è vero per matrici di ordine $(n-1)$, allora è vero anche per matrici di ordine n . Sia A una matrice quadrata di ordine n triangolare superiore. Per il 1° teorema di Laplace applicato alla sua (ultima) n -esima riga si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

Poiché A è triangolare superiore si ha che per ogni $j \leq (n-1)$ è $a_{nj} = 0$. Quindi,

$$\det A = (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn} = (-1)^{2n} a_{nn} \det A_{nn} = a_{nn} \det A_{nn}$$

Poiché A_{nn} è una matrice di ordine $(n-1)$ triangolare superiore, per l'ipotesi induttiva, si ha che il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale

$$\det A_{nn} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \cdots a_{(n-2),(n-2)} a_{(n-1),(n-1)}$$

Quindi, $\det A = a_{nn} \det A_{nn} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \cdots a_{(n-2),(n-2)} a_{(n-1),(n-1)} a_{nn}$ ■

13.28. Osservazione. I Teoremi 13.26 e 13.27 ci forniscono un modo comodo per calcolare il determinante di una matrice di ordine "grande". Infatti, se dobbiamo calcolare il determinante di una matrice A possiamo procedere nel modo seguente:

- (1) troviamo (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B a scalino; ovviamente, la matrice B è anche triangolare superiore;
- (2) calcoliamo il determinante di B che è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale;
- (3) Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari **non nulli** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora $\det A = (-1)^s (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{(t-1)} \alpha_t)^{-1} \det B$

13.29. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 38 & -21 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow D = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 190 & -105 \end{bmatrix} \rightarrow E = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -181 \end{bmatrix}$$

$$905 = \det E = \det D = 5 \det C = 5 \det B = 5(-\det A) \Rightarrow \det A = -905/5 = -181.$$

Dal Teorema 13.27 e dal Corollario 12.17 si ha subito il seguente:

13.30. Lemma. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

13.31. Teorema. Una matrice quadrata A ha rango massimo se e solo se $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Sia A una matrice quadrata. Per il Teorema 11.25 è possibile trovare (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B che abbia lo stesso rango di A . Quindi, il rango di A è massimo se e solo se il rango di B è massimo, ovvero (per il Lemma 13.30) se e solo se il determinante di B è diverso da zero e, quindi, (per il Teorema 13.26) se e solo se il determinante di A è diverso da zero. ■

13.32. Corollario. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione n .

Sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ una base di V_R .

Sia $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ una n -upla ordinata di vettori di V_R .

Per ogni $s \in \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ sia \mathbf{a}_s la n -upla di coordinate del vettore \mathbf{v}_s rispetto alla base B .

Sia A la matrice avente come righe (o come colonne) le n -uple $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n$.

L'insieme D è una base di V_R se e solo se il determinante della matrice A è diverso da zero.

13.33. Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ una sua base.

Se consideriamo i seguenti vettori $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$ allora si ha che $\mathbf{a}_0 = (5, 0, 16)$, $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, 1)$ e $\mathbf{a}_3 = (1, -4, -7)$.

Stabilire se le seguenti terne $C = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono basi di V_R . Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori di C e sia N la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori di D .

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det M = 0$ la matrice M non ha rango massimo. Quindi, $\dim \mathcal{C}_M = \dim \mathcal{R}_M = \text{rg} M \leq 2$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente dipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti. Così la terna $C = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ **NON** è una base di V_R .

Poiché $\det N = -23 \neq 0$ la matrice N ha rango massimo. Quindi, $\dim \mathcal{C}_N = \dim \mathcal{R}_N = \text{rg} N = 3$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Così la terna $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è un'altra base di V_R .

13.34 Teorema (2° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni coppia di indici di riga $h, k = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ con $h \neq k$ si ha che

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0.$$

Dimostrazione. Siano A e B due matrici tali che sia $B_k = A_h$ e per ogni $i \neq k$ sia $B_i = A_i$. Cioè,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ A_k \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_h = A_h \\ \cdot \\ B_k = A_h \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$ si ha che:

- $b_{kj} = a_{hj}$
- $B_{kj} = A_{kj}$

Per il 1° teorema di Laplace applicato alla k -esima riga di B si ha:

$$\det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj}$$

D'altronde, si ha anche che $\det B = 0$ poiché B ha due righe uguali (la h -esima e la k -esima).

Quindi, $\sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0$. ■

13.35. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$ il numero reale $\mathbf{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij} .

13.36. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo **matrice cofattore** della matrice A , e la indichiamo col simbolo $\text{cof}A$, la matrice quadrata di ordine n ad elementi reali formata dai complementi algebrici \mathbf{a}_{ij} degli elementi a_{ij} di A .

13.37. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo **matrice aggiunta** di A , e la indichiamo col simbolo $\text{agg}A$, la trasposta della matrice cofattore di A .

13.38. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 dell'esempio 13.6:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Dall'Esempio 13.10 si ha che

$$\det A_{11} = \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27$$

$$\det A_{12} = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

$$\det A_{13} = \det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5$$

$$\det A_{21} = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12$$

$$\det A_{22} = \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21$$

$$\det A_{23} = \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38$$

$$\det A_{31} = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8$$

$$\det A_{32} = \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14$$

$$\det A_{33} = \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35.$$

Quindi,

$$\mathbf{a}_{11} = (-1)^{1+1}(-27) = -27$$

$$\mathbf{a}_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$$

$$\mathbf{a}_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$$

$$\mathbf{a}_{21} = (-1)^{2+1}(12) = -12$$

$$\mathbf{a}_{22} = (-1)^{2+2}(-21) = -21$$

$$\mathbf{a}_{23} = (-1)^{2+3}(38) = -38$$

$$\mathbf{a}_{31} = (-1)^{3+1}(-8) = -8$$

$$\mathbf{a}_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$$

$$\mathbf{a}_{33} = (-1)^{3+3}(35) = 35$$

$$\text{Per cui } \text{cof}A = \begin{bmatrix} -27 & -2 & 5 \\ -12 & -21 & -38 \\ -8 & -14 & 35 \end{bmatrix} \text{ e } \text{agg}A = (\text{cof}A)^T = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$$

13.39. Osservazione. Tenendo conto della Definizione 13.35 i due teoremi di Laplace si possono brevemente sintetizzare nel modo seguente:

$$\sum_{j=1}^n a_{hj} \mathbf{a}_{kj} = (\det A) \delta_{hk}$$

dove δ_{hk} è la **delta di Kronecker** ($\delta_{hk} = 0$ se $h \neq k$, $\delta_{hk} = 1$ se $h = k$).

13.40. Definizione. Chiameremo **matrice unità di ordine n** , e la indicheremo con il simbolo I_n , la matrice quadrata diagonale di ordine n avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1. Quindi, l'elemento che si trova sulla h -esima riga e sulla k -esima colonna di I_n è δ_{hk} .

13.41. Teorema. Per ogni matrice A quadrata di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\text{agg}A) = (\text{agg}A)A = (\det A)I_n$$

dove $(\det A)I_n$ è la matrice diagonale avente come elementi $\delta_{hk} \det A$, cioè avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a $\det A$.

Dimostrazione. Sia $B := A(\text{agg}A)$. Proviamo che $B = I_n$.

Il generico elemento b_{hk} di B è uguale al prodotto riga per colonna della h -esima riga di A

$$(a_{h1} \ a_{h2} \ a_{h3} \ a_{h4} \ \dots \ a_{h,(n-1)} \ a_{hn})$$

per la k -esima colonna di $\text{agg}A$, che è proprio la k -esima riga di $\text{cof}A$

$$(\mathbf{a}_{k1} \ \mathbf{a}_{k2} \ \mathbf{a}_{k3} \ \mathbf{a}_{k4} \ \dots \ \mathbf{a}_{k,(n-1)} \ \mathbf{a}_{kn})$$

Quindi, $b_{hk} = \sum_{j=1}^n a_{hj} \mathbf{a}_{kj} = (\det A) \delta_{hk}$. Per cui $B = I_n$. Analogamente si ha che $(\text{agg}A)A = (\det A)I_n$. ■

Ricordiamo che il determinante di una somma di due matrici quadrate dello stesso ordine **NON** è, in generale, uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

Invece, vale (ne omettiamo la dimostrazione) il seguente:

13.42. Teorema (Binet). Il determinante del prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici.

14. Matrici invertibili.

14.1. Definizione. Diremo che una **matrice** A **quadrata** di ordine n ad elementi reali è **invertibile** se esiste una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Ovviamente, anche la matrice B è invertibile.

14.2. Osservazione. Se A è una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali invertibile allora esiste ed è unica una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Dimostrazione. Poiché A è per ipotesi invertibile, dobbiamo provare solamente che B è unica. Se esistesse un'altra matrice C quadrata di ordine n ad elementi reali tale che $AC = I_n = CA$, si avrebbe:

$$AB = I_n \Rightarrow C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_n B = C \Rightarrow B = C. \blacksquare$$

Tenendo conto dell'Osservazione 14.2 è ben posta la seguente:

14.3. Definizione. Se A è una matrice invertibile, allora diremo **matrice inversa** della matrice A , e la indicheremo con il simbolo A^{-1} , l'unica matrice B tale che $AB = I_n = BA$. Quindi,

$$A A^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

14.4. Osservazione. Ovviamente, se A è invertibile, allora anche A^{-1} è invertibile. Inoltre, l'inversa di A^{-1} è A stessa, cioè $(A^{-1})^{-1} = A$.

14.5. Teorema. Se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche la matrice AB è invertibile ed è $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. Quindi, l'inversa di un prodotto di due matrici invertibili è uguale al prodotto delle inverse delle due matrici prese in ordine "inverso".

Dimostrazione. Poiché A e B sono invertibili esiste la matrice $C := B^{-1}A^{-1}$. Si ha che:

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$$

Quindi, per la Definizione 14.1 AB è invertibile e la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ è, per l'Osservazione 14.2, la sua unica inversa. Per cui $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. \blacksquare

14.6. Definizione. Diremo che una **matrice quadrata** è **singolare** se il suo determinante è nullo.

Per il Teorema 13.41, per **ogni** matrice quadrata A di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\text{agg}A) = (\text{agg}A)A = (\det A)I_n$$

Come immediata conseguenza del Teorema 13.41 si ha il seguente:

14.7. Lemma. Per ogni matrice A quadrata di ordine n **non** singolare (cioè $\det A \neq 0$) si ha che

$$A[(\det A)^{-1}(\text{agg}A)] = [(\det A)^{-1}(\text{agg}A)]A = I_n$$

Tenendo conto della Definizione 14.1 e dell'Osservazione 14.2 si ha il seguente:

14.8 Teorema. Se A è una matrice quadrata **non** singolare, allora A è invertibile e la sua (unica) inversa è data dal prodotto dell'inverso del determinante di A per la matrice aggiunta di A , cioè

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(\text{agg}A)$$

14.9 Esempio. Se esiste, trovare l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Nell'Esempio 13.29 abbiamo visto che $\det A = -181 \neq 0$. Quindi, la matrice A è non singolare e, per il Teorema 14.8, è invertibile. Inoltre, $A^{-1} = (\det A)^{-1}(\text{agg}A)$.

Nell'Esempio 13.38 abbiamo visto che

$$\text{agg}A = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}. \text{ Per cui si ha che } A^{-1} = (-1/181) \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}.$$

14.10 Esempio. Troviamo l'inversa di una generica matrice non singolare di ordine 2.

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ con $\det A = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = (-1)^2 \det[a_{22}] = a_{22} \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = (-1)^3 \det[a_{21}] = -a_{21}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det A_{21} = (-1)^3 \det[a_{12}] = -a_{12} \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \det A_{22} = (-1)^4 \det[a_{11}] = a_{11}$$

Per cui $\text{cof}A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ e $\text{agg}A = (\text{cof}A)^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

$$\text{Infine, } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ -\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Dal Teorema (di Binet) 13.42 abbiamo subito il seguente:

14.11 Corollario. Se A è una matrice invertibile, allora si ha che $\det A \neq 0$, cioè A è **non** singolare.

Inoltre, è $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dimostrazione. Sia A una matrice invertibile e A^{-1} la sua inversa. Allora si ha

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$$

Per cui $\det A \neq 0$. Si osservi, inoltre, che è $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. ■

Conseguenza immediata del Teorema 14.8 e del Corollario 14.11 è il seguente:

14.12 Teorema. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se è non singolare.

14.13 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Ovviamente, si ha che

$$B = C \Rightarrow AB = AC$$

In generale, non vale il viceversa come possiamo vedere nel seguente

14.14 Esempio. Si considerino le seguenti tre matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Con semplici calcoli si vede che } AB = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad AC = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Quindi, si ha che $AB = AC$ et $B \neq C$

14.15 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Si ha che

$$AB = AC \quad \text{et} \quad A \text{ è invertibile} \Rightarrow B = C$$

Dimostrazione.

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow I_n B = I_n C \Rightarrow B = C \quad \blacksquare$$

14.16 Esercizi. Se esistono, calcolare le matrici inverse delle seguenti matrici.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -21 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Cambiamenti di base in uno spazio vettoriale.

15.1 Esempio. Sia $V_{\mathbb{R}}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ una sua **base**.

Siano $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$

Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ rispetto alla base B e sia N la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ rispetto alla base B .

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det M = 0$ la matrice M non ha rango massimo. Quindi, $\dim \mathcal{C}_M = \dim \mathcal{R}_M = \text{rg} M \leq 2$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente dipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti. Così l'insieme $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ **NON** è una base di $V_{\mathbb{R}}$.

Poiché $\det N = -23 \neq 0$ la matrice N ha rango massimo. Quindi, $\dim \mathcal{C}_N = \dim \mathcal{R}_N = \text{rg} N = 3$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, anche i **tre vettori** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente **indipendenti**. Così l'insieme $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è un'**altra base** di $V_{\mathbb{R}}$.

Sia \mathbf{w} il vettore di $V_{\mathbb{R}}$ avente coordinate $(4, 1, -6)$ rispetto alla base \underline{B} , cioè $\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$.

E' molto facile trovare le coordinate di \mathbf{w} rispetto alla base B , infatti si ha che

$$\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3 = 4(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + (-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) - 6(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 + 23\mathbf{u}_2 + 63\mathbf{u}_3$$

Quindi, le coordinate di \mathbf{w} rispetto alla base B sono $(1, 23, 63)$.

Sia, ora, \mathbf{t} il vettore di $V_{\mathbb{R}}$ avente coordinate $(4, -8, -3)$ rispetto a B , cioè $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$.

Troviamo le coordinate (x, y, z) di \mathbf{t} rispetto a \underline{B} , cioè tali che $\mathbf{t} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Si ha che

$$\mathbf{t} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = x(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + y(-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + z(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3)$$

$$\mathbf{t} = (2x - y + z)\mathbf{u}_1 + (-x + 3y - 4z)\mathbf{u}_2 + (5x + y - 7z)\mathbf{u}_3$$

Poichè la scrittura di $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ rispetto alla base B è unica deve essere

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 4z = -8 \\ 5x + y - 7z = -3 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è la terna ordinata $(x, y, z) = (1, -1, 1)$, cioè $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

15.2 Esempio. Siano V_R , $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ come nell'Esempio 15.1. Quindi,

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$$

Sia \mathbf{w} un generico vettore di V_R . Siccome B e \underline{B} sono due basi, si ha che esistono, e sono uniche, due terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tali che

$$(I) \quad \mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3$$

$$(II) \quad \mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3$$

Ora, vedremo di trovare il “legame” che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di \mathbf{w} rispetto alla base \underline{B} e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di \mathbf{w} rispetto alla base B .

$$\text{Si ha che } \mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 = \beta_1(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + \beta_2(-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + \beta_3(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3)$$

$$\text{da cui} \quad (III) \quad \mathbf{w} = (2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)\mathbf{u}_1 + (-\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3)\mathbf{u}_2 + (5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3)\mathbf{u}_3$$

Si osservi che la (III) è una scrittura di \mathbf{w} come combinazione lineare dei vettori della base B .

Per l'unicità della scrittura di \mathbf{w} rispetto alla base B , da (I) e (III) si ha che deve essere:

$$(\#) \quad \begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1 \\ -\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 = \alpha_2 \\ 5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Queste equazioni sono il “legame” che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di \mathbf{w} rispetto alla base \underline{B} e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di \mathbf{w} rispetto alla base B .

• Note le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di un vettore \mathbf{w} rispetto alla base \underline{B} , con semplici calcoli si trovano le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di \mathbf{w} rispetto alla base B .

Se (come nell'Esempio 15.1) $\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$ cioè $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (4, 1, -6)$, allora dal sistema (#) si ha subito che $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 23, 63)$ e, quindi, $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + 23\mathbf{u}_2 + 63\mathbf{u}_3$.

• Note le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di un vettore \mathbf{w} rispetto alla base B , risolvendo un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, si trovano le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di \mathbf{w} rispetto alla base \underline{B} .

Se (come nell'Esempio 15.1) $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ cioè $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (4, -8, -3)$, allora (#) diventa

$$\begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 4 \\ -\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 = -8 \\ 5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3 = -3 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è la terna ordinata $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, -1, 1)$, cioè $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Nel seguito ci occuperemo di generalizzare quanto appena visto nell'Esempio 15.2.

Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ una sua base.
Se \mathbf{w} è un vettore di V_R e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$ è l'unica n -upla ordinata di numeri reali tale che

$$(\heartsuit) \quad \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \alpha_4 \mathbf{u}_4 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

allora la matrice di tipo $n \times 1$ (matrice colonna) così definita:

$$\mathbf{w}_B := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

si dice (matrice) colonna delle coordinate di \mathbf{w} rispetto alla base B .

Sia, ora, $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n)$ un'altra base di V_R . Poiché \underline{B} è una base di V_R esiste un'unica n -upla ordinata di numeri reali $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots, \beta_n)$ tale che:

$$(\clubsuit) \quad \mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \beta_3 \mathbf{v}_3 + \beta_4 \mathbf{v}_4 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$$

Quindi, la colonna delle coordinate di \mathbf{w} rispetto alla base \underline{B} è

$$\mathbf{w}_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Poiché $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base di V_R e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n$ sono vettori di V_R allora ognuno di essi si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B .

Poiché i coefficienti di tali combinazioni lineari dipendono sia dal vettore \mathbf{u}_i della base B che dal vettore \mathbf{v}_j della base \underline{B} , useremo un doppio indice con la convenzione che il primo sia l'indice i del vettore \mathbf{u}_i di B mentre il secondo sia l'indice j del vettore \mathbf{v}_j di \underline{B} . Quindi, scriveremo

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 + a_{41}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n1}\mathbf{u}_n \\
 (2) \quad \mathbf{v}_2 &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 + a_{42}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n2}\mathbf{u}_n \\
 (3) \quad \mathbf{v}_3 &= a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3 + a_{43}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n3}\mathbf{u}_n \\
 (4) \quad \mathbf{v}_4 &= a_{14}\mathbf{u}_1 + a_{24}\mathbf{u}_2 + a_{34}\mathbf{u}_3 + a_{44}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n4}\mathbf{u}_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 (n) \quad \mathbf{v}_n &= a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + a_{3n}\mathbf{u}_3 + a_{4n}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{nn}\mathbf{u}_n
 \end{aligned}$$

Da (\clubsuit), (1), (2), (3), (4),, (n) si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 + \beta_4\mathbf{v}_4 + \dots + \beta_n\mathbf{v}_n = \\
 &= \beta_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 + a_{41}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n1}\mathbf{u}_n) + \\
 &+ \beta_2(a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 + a_{42}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n2}\mathbf{u}_n) + \\
 &+ \beta_3(a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3 + a_{43}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n3}\mathbf{u}_n) + \\
 &+ \beta_4(a_{14}\mathbf{u}_1 + a_{24}\mathbf{u}_2 + a_{34}\mathbf{u}_3 + a_{44}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{n4}\mathbf{u}_n) + \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+ \beta_n(a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + a_{3n}\mathbf{u}_3 + a_{4n}\mathbf{u}_4 + \dots + a_{nn}\mathbf{u}_n)
 \end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà PS1, PS2 e PS3 si ottiene

$$\begin{aligned}
 (\diamond) \quad \mathbf{w} &= (\beta_1a_{11} + \beta_2a_{12} + \beta_3a_{13} + \beta_4a_{14} + \dots + \beta_na_{1n})\mathbf{u}_1 + \\
 &+ (\beta_1a_{21} + \beta_2a_{22} + \beta_3a_{23} + \beta_4a_{24} + \dots + \beta_na_{2n})\mathbf{u}_2 + \\
 &+ (\beta_1a_{31} + \beta_2a_{32} + \beta_3a_{33} + \beta_4a_{34} + \dots + \beta_na_{3n})\mathbf{u}_3 + \\
 &+ (\beta_1a_{41} + \beta_2a_{42} + \beta_3a_{43} + \beta_4a_{44} + \dots + \beta_na_{4n})\mathbf{u}_4 + \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+ (\beta_1a_{n1} + \beta_2a_{n2} + \beta_3a_{n3} + \beta_4a_{n4} + \dots + \beta_na_{nn})\mathbf{u}_n
 \end{aligned}$$

Si osservi che la (\diamond) è una scrittura di \mathbf{w} come combinazione lineare dei vettori della base B.

Ricordiamo che

$$(\heartsuit) \quad \mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

Per l'unicità della scrittura di \mathbf{w} rispetto alla base B, dalle (\heartsuit) e (\diamond) si ha che deve essere:

$$(E_1) \alpha_1 = \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \beta_3 a_{13} + \beta_4 a_{14} + \dots + \beta_n a_{1n}$$

$$(E_2) \alpha_2 = \beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{23} + \beta_4 a_{24} + \dots + \beta_n a_{2n}$$

$$(E_3) \alpha_3 = \beta_1 a_{31} + \beta_2 a_{32} + \beta_3 a_{33} + \beta_4 a_{34} + \dots + \beta_n a_{3n}$$

$$(E_4) \alpha_4 = \beta_1 a_{41} + \beta_2 a_{42} + \beta_3 a_{43} + \beta_4 a_{44} + \dots + \beta_n a_{4n}$$

.....

$$(E_n) \alpha_n = \beta_1 a_{n1} + \beta_2 a_{n2} + \beta_3 a_{n3} + \beta_4 a_{n4} + \dots + \beta_n a_{nn}$$

Il sistema di equazioni $(E_1), (E_2), (E_3), (E_4), \dots, (E_n)$ è il “legame” che c’è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots, \beta_n)$ di \mathbf{w} rispetto a $\underline{\mathbf{B}}$ e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$ di \mathbf{w} rispetto a \mathbf{B} .

Ora troviamo un modo comodo di rappresentare questo sistema.

Da (1), (2), (3), (4),, (n) si vede che le colonne delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n$ rispetto alla base $\mathbf{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ sono

$$(\mathbf{v}_1)_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{bmatrix}, (\mathbf{v}_2)_B = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \end{bmatrix}, (\mathbf{v}_3)_B = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n3} \end{bmatrix}, (\mathbf{v}_4)_B = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n4} \end{bmatrix}, \dots, (\mathbf{v}_n)_B = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Stabiliamo che $A_{(\underline{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{B})}$ sia la matrice quadrata di ordine n avente come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate (rispetto alla base \mathbf{B}) dei vettori della base $\underline{\mathbf{B}}$, cioè:

$$A_{(\underline{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{B})} = [(\mathbf{v}_1)_B \mid (\mathbf{v}_2)_B \mid (\mathbf{v}_3)_B \mid (\mathbf{v}_4)_B \mid \dots \mid (\mathbf{v}_n)_B]$$

$$A_{(\underline{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{B})} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Osservando $(E_1), (E_2), (E_3), (E_4), \dots, (E_n)$ e tenendo conto di come è definito il prodotto riga per colonna tra due matrici moltiplicabili e si ha che:

- l'elemento α_1 di \mathbf{w}_B è uguale al prodotto della prima riga di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;
- l'elemento α_2 di \mathbf{w}_B è uguale al prodotto della seconda riga di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;
- l'elemento α_3 di \mathbf{w}_B è uguale al prodotto della terza riga di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;
- l'elemento α_4 di \mathbf{w}_B è uguale al prodotto della quarta riga di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;
-
- l'elemento α_n di \mathbf{w}_B è uguale al prodotto della n-esima riga di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

Quindi, la colonna \mathbf{w}_B è uguale al prodotto della matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$ ovvero

$$\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B} \rightarrow B)} \mathbf{w}_{\underline{B}}$$

Per cui, il sistema di equazioni $(E_1), (E_2), (E_3), (E_4), \dots, (E_n)$ si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Tenendo conto che ognuna delle n colonne delle coordinate dei vettori della base \underline{B} rispetto alla base B è univocamente determinata, si ha subito la seguente:

15.3 Osservazione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n . Ogni volta che si **fissano** due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ quadrata di ordine n avente come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate dei vettori della base \underline{B} rispetto alla base B è univocamente determinata.

15.4 Lemma. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n .

Siano $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n)$ due sue basi.

Sia \mathbf{w} un generico vettore di V_R . Se H è una matrice tale che $\mathbf{w}_B = H\mathbf{w}_{\underline{B}}$ allora $H = A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$.

Dimostrazione. Per i vettori della base \underline{B} si ha che

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{1}\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \dots + 0\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_1 + \mathbf{1}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \dots + 0\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \mathbf{1}\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \dots + 0\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{v}_4 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \mathbf{1}\mathbf{v}_4 + \dots + 0\mathbf{v}_n$$

.....

$$\mathbf{v}_n = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \dots + \mathbf{1}\mathbf{v}_n$$

Quindi, le colonne delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n$ rispetto alla base \underline{B} sono:

$$(\mathbf{v}_1)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, (\mathbf{v}_2)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, (\mathbf{v}_3)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, (\mathbf{v}_4)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, (\mathbf{v}_n)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che per ogni vettore \mathbf{v}_i è $H(\mathbf{v}_i)_{\underline{B}} = i$ -esima colonna di H . Quindi, si ha che

- prima colonna di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = (\mathbf{v}_1)_B = H(\mathbf{v}_1)_{\underline{B}}$ = prima colonna di H ;
- seconda colonna di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = (\mathbf{v}_2)_B = H(\mathbf{v}_2)_{\underline{B}}$ = seconda colonna di H ;
- terza colonna di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = (\mathbf{v}_3)_B = H(\mathbf{v}_3)_{\underline{B}}$ = terza colonna di H ;
- quarta colonna di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = (\mathbf{v}_4)_B = H(\mathbf{v}_4)_{\underline{B}}$ = quarta colonna di H ;
-
- n -esima colonna di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = (\mathbf{v}_n)_B = H(\mathbf{v}_n)_{\underline{B}}$ = n -esima colonna di H .

Essendo le colonne di H ordinatamente uguali alle colonne di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ si ha che $H = A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$. ■

Tenendo conto del Lemma 15.4 è ben posta la seguente:

15.5 DEFINIZIONE. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n .

Siano $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n)$ due sue basi.

La matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ che ha come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate dei vettori della base \underline{B} rispetto alla base B viene detta *matrice del cambiamento di base da \underline{B} a B* .

Le n equazioni rappresentate con l'equazione matriciale $\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B} \rightarrow B)}\mathbf{w}_{\underline{B}}$ si dicono *equazioni del cambiamento di base*.

Tenendo conto che, per costruzione, le colonne di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ sono le n-uple delle coordinate di n vettori linearmente indipendenti (gli elementi della base \underline{B}) si ha che tali colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, la matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ ha rango massimo. Per il Teorema 13.31 il determinante della matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ è diverso da zero, cioè la matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ è non singolare. Tenendo conto del Teorema 14.12 abbiamo subito la seguente:

15.6 Osservazione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n . Fissate due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ è invertibile.

15.7 TEOREMA. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n . Fissate due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice del cambiamento di base da B a \underline{B} è uguale all'inversa della matrice del cambiamento di base da \underline{B} a B . Cioè

$$A_{(B \rightarrow \underline{B})} = [A_{(\underline{B} \rightarrow B)}]^{-1}$$

Dimostrazione. Se \mathbf{w} è un generico vettore di V_R si ha che $\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B} \rightarrow B)} \mathbf{w}_{\underline{B}}$. Tenendo conto che per l'Osservazione 15.6 la matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ è invertibile, si ha che $[A_{(\underline{B} \rightarrow B)}]^{-1} \mathbf{w}_B = \mathbf{w}_{\underline{B}}$.

Per il Lemma 15.4 è $[A_{(\underline{B} \rightarrow B)}]^{-1} = A_{(B \rightarrow \underline{B})}$. ■

15.8 TEOREMA. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n . Fissate tre sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_n)$, $C = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_n)$ si ha che:

$$A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = A_{(C \rightarrow B)} A_{(\underline{B} \rightarrow C)}$$

Dimostrazione. Se \mathbf{w} è un generico vettore di V_R si ha che

$$[A_{(C \rightarrow B)} A_{(\underline{B} \rightarrow C)}] \mathbf{w}_{\underline{B}} = A_{(C \rightarrow B)} [A_{(\underline{B} \rightarrow C)} \mathbf{w}_{\underline{B}}] = A_{(C \rightarrow B)} \mathbf{w}_C = \mathbf{w}_B$$

Per cui, la matrice $A_{(C \rightarrow B)} A_{(\underline{B} \rightarrow C)}$ esprime il cambiamento di coordinate dalla base \underline{B} alla base B . Quindi, per il Lemma 15.4 si ha che $A_{(C \rightarrow B)} A_{(\underline{B} \rightarrow C)} = A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$. ■

15.9 Osservazione. Il Teorema 15.7 ci permette di trovare la matrice del cambiamento di base dalla base \underline{B} alla base B “*transitando*” per la base C . Inoltre, **si noti** l'ordine delle matrici nel prodotto

$$A_{(C \rightarrow B)} A_{(\underline{B} \rightarrow C)}$$

La matrice che fa passare da \underline{B} a C è il fattore a destra mentre la matrice che poi fa passare da C a B è il fattore a sinistra. Questo è dovuto (come si vede nella dimostrazione del Teorema 15.7) al fatto che prima la matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow C)}$ “*agisce*” su $\mathbf{w}_{\underline{B}}$ e, poi, la matrice $A_{(C \rightarrow B)}$ “*agisce*” su \mathbf{w}_C .

15.10 Esempio. Sia $V_{\mathbb{R}}$ uno spazio vettoriale di dimensione 2 e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ una sua base.

Consideriamo i seguenti vettori $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$ di $V_{\mathbb{R}}$.

Sia $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ la matrice avente come colonne ordinatamente $(\mathbf{v}_1)_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $(\mathbf{v}_2)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det M = -1 \neq 0$ le due colonne di M sono linearmente indipendenti. Quindi, anche i due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Così l'insieme $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è un'altra base di $V_{\mathbb{R}}$.

Inoltre, M è proprio la matrice $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ del cambiamento di base da \underline{B} a B , cioè

$$A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Per il Teorema 15.7 la matrice $A_{(B \rightarrow \underline{B})}$ del cambiamento di base da B a \underline{B} è $[A_{(\underline{B} \rightarrow B)}]^{-1}$. Quindi,

$$A_{(B \rightarrow \underline{B})} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Poiché $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = (1/-1)(\text{agg} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}) = -\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ si ha che

$$A_{(B \rightarrow \underline{B})} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Sia \mathbf{w} un generico vettore dello spazio $V_{\mathbb{R}}$. Se indichiamo con:

- (β_1, β_2) le coordinate di \mathbf{w} rispetto alla base \underline{B}
- (α_1, α_2) le coordinate di \mathbf{w} rispetto alla base B

allora le equazioni del cambiamento di base da \underline{B} a B sono $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

mentre le equazioni del cambiamento di base da B a \underline{B} sono $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$

Con tali equazioni è molto veloce trovare come cambiano le coordinate di un vettore.

Se $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ cioè $(\beta_1, \beta_2) = (1, 2)$ si ha **subito** che $(\alpha_1, \alpha_2) = (4, -11)$ cioè $\mathbf{w} = 4\mathbf{u}_1 - 11\mathbf{u}_2$.

Se $\mathbf{t} = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$ cioè $(\alpha_1, \alpha_2) = (3, -2)$ si ha **subito** che $(\beta_1, \beta_2) = (7, -11)$, cioè $\mathbf{t} = 7\mathbf{v}_1 - 11\mathbf{v}_2$.

15.11 Esempio. Sia $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale reale delle terne ordinate di numeri reali.

Siano $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 5, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$.

Dopo aver verificato che $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono due basi di \mathbb{R}^3 trovare la matrice del cambiamento di base dalla base \underline{B} alla base B .

(1) Sia M la matrice avente come colonne proprio le terne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e sia N la matrice avente come

$$\text{colonne proprio le terne } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \text{ cioè } M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det M = -1 \neq 0$ e $\det N = -1 \neq 0$ sia le tre terne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ che le tre terne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Quindi, $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono due basi di \mathbb{R}^3 .

(2) Ricordiamo che se $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ allora $C = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base (canonica) di \mathbb{R}^3 . Si noti che:

$$\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1) = 2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{u}_2 = (0, 5, 1) = 0\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{u}_3 = (-1, 3, 0) = (-1)\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0) = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1) = 1\mathbf{e}_1 + (-1)\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1) = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$$

Quindi, si ha che $M = A_{(B \rightarrow C)}$ e $N = A_{(\underline{B} \rightarrow C)}$

Per i Teoremi 15.8 e 15.7 si ha che $A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = A_{(C \rightarrow B)}A_{(\underline{B} \rightarrow C)} = [A_{(B \rightarrow C)}]^{-1}A_{(\underline{B} \rightarrow C)} = M^{-1}N$.

$$\text{Da } \text{cof}M = \text{cof} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -6 & 10 \end{bmatrix} \text{ si ha subito che } M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Si ha che } A_{(\underline{B} \rightarrow B)} = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \\ 7 & -7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Tenendo conto che le colonne di $A_{(\underline{B} \rightarrow B)}$ sono le coordinate dei vettori della base \underline{B} rispetto alla base B , possiamo verificare la correttezza del risultato nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + 7\mathbf{u}_3 = 4(2, 0, 1) - 4(0, 5, 1) + 7(-1, 3, 0) = (1, 1, 0) \quad \odot$$

$$\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3 = -3(2, 0, 1) + 4(0, 5, 1) - 7(-1, 3, 0) = (1, -1, 1) \quad \odot$$

$$\mathbf{v}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3 = -2(2, 0, 1) + 3(0, 5, 1) - 5(-1, 3, 0) = (1, 0, 1) \quad \odot$$

Tenendo conto che per ogni numero reale ω si ha che $(\cos^2\omega + \sin^2\omega) = 1$, **ogni** matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

è non singolare e, quindi, è invertibile. Inoltre, è facile verificare che

$$\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

15.12 Osservazione. Sia $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ lo spazio vettoriale reale delle coppie ordinate di numeri reali.

Per ogni numero reale ω , le due coppie $\mathbf{w}_1 = (\cos\omega, \sin\omega)$ e $\mathbf{w}_2 = (-\sin\omega, \cos\omega)$ sono linearmente indipendenti e, quindi, l'insieme $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ è una base di \mathbb{R}^2 .

15.13 Esempio. Sia $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ lo spazio vettoriale reale delle coppie ordinate di numeri reali.

Siano $\mathbf{u}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathbf{u}_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, $\mathbf{v}_1 = (\cos\beta, \sin\beta)$ e $\mathbf{v}_2 = (-\sin\beta, \cos\beta)$.

Per l'Osservazione 15.12 gli insiemi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ sono due basi di \mathbb{R}^2 .

Trovare la matrice $A_{(B \rightarrow \underline{B})}$ del cambiamento di base dalla base B alla base \underline{B} .

Se indichiamo con $C = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonica di \mathbb{R}^2 si ha che

$$A_{(B \rightarrow C)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{(\underline{B} \rightarrow C)} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Per i Teoremi 15.8 e 15.7 si ha che $A_{(B \rightarrow \underline{B})} = A_{(C \rightarrow \underline{B})}A_{(B \rightarrow C)} = [A_{(\underline{B} \rightarrow C)}]^{-1}A_{(B \rightarrow C)}$. Per cui

$$A_{(B \rightarrow \underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{(B \rightarrow \underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{(B \rightarrow \underline{B})} = \begin{bmatrix} (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) & -(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) \\ (\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) & (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) \end{bmatrix}$$

$$A_{(B \rightarrow \underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

16. Teorema degli orlati e sue applicazioni.

Ricordiamo che se $p \in \mathbb{N}$ allora col simbolo I_p indichiamo l'insieme $\{1, 2, 3, 4, \dots, p\}$.

Sia A una matrice ad elementi reali di tipo $m \times n$ e sia s un intero tale che $0 \leq s \leq \min\{m, n\}$.

Si scelgano s righe di A e s colonne di A .

Siano $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \dots < i_s$ gli indici delle righe scelte.

Siano $j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < \dots < j_s$ gli indici delle colonne scelte.

Sia B la **sottomatrice** di A che si ottiene “cancellando” da A

- le $(m-s)$ righe aventi indice nell'insieme $I_m - \{i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_s\}$;
- le $(n-s)$ colonne aventi indice nell'insieme $I_n - \{j_1, j_2, j_3, j_4, \dots, j_s\}$.

Se poniamo $R_B := \{i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_s\} \subseteq I_m$ e $C_B := \{j_1, j_2, j_3, j_4, \dots, j_s\} \subseteq I_n$ allora

$$B = A_{(I_m - R_B), (I_n - C_B)}$$

Ovviamente, B è una matrice **quadrata** di ordine s .

16.1. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sia $s = 3$ e scegliamo la 2^a, 3^a e 5^a riga di A e la 3^a, 4^a e 6^a colonna di A .

Quindi, si ha che $i_1 = 2, i_2 = 3, i_3 = 5, j_1 = 3, j_2 = 4$ e $j_3 = 6$. Cioè, $R_B = \{2, 3, 5\}$ e $C_B = \{3, 4, 6\}$.

B è la sottomatrice di A ottenuta “cancellando” da A la 1^a e 4^a riga e la 1^a, 2^a, 5^a e 7^a colonna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & 1 & 0 & \# & -2 & \# \\ \# & \# & 0 & 0 & \# & 4 & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -7 & 7 & \# & 0 & \# \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = A_{\{1,4\}, \{1,2,5,7\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

B è una matrice quadrata di ordine 3.

Per costruzione, l'elemento che si trova sulla h -esima riga e k -esima colonna di B è l'elemento che si trova sulla i_h -esima riga e sulla j_k -esima colonna di A , cioè

$$b_{hk} = a_{i_h j_k}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2s} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{3s} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{4s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & b_{s4} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & a_{i_1 j_4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & a_{i_2 j_4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_2 j_s} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} & a_{i_3 j_4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_3 j_s} \\ a_{i_4 j_1} & a_{i_4 j_2} & a_{i_4 j_3} & a_{i_4 j_4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_4 j_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & a_{i_s j_3} & a_{i_s j_4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_s j_s} \end{bmatrix}$$

16.2. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo scelto $i_1 = 2, i_2 = 3, i_3 = 5, j_1 = 3, j_2 = 4$ e $j_3 = 6$

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & a_{23} & a_{24} & \# & a_{26} & \# \\ \# & \# & a_{33} & a_{34} & \# & a_{36} & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & a_{53} & a_{54} & \# & a_{56} & \# \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{26} \\ a_{33} & a_{34} & a_{36} \\ a_{53} & a_{54} & a_{56} \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$b_{11} = a_{23} = a_{i_1 j_1} \quad b_{12} = a_{24} = a_{i_1 j_2} \quad b_{13} = a_{26} = a_{i_1 j_3}$$

$$b_{21} = a_{33} = a_{i_2 j_1} \quad b_{22} = a_{34} = a_{i_2 j_2} \quad b_{23} = a_{36} = a_{i_2 j_3}$$

$$b_{31} = a_{53} = a_{i_3 j_1} \quad b_{32} = a_{54} = a_{i_3 j_2} \quad b_{33} = a_{56} = a_{i_3 j_3}$$

cioè

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{bmatrix}$$

Siano, ora, $x \in (I_m - R_B)$ l'indice di una riga di A che non è stata scelta per costruire B e $y \in (I_n - C_B)$ l'indice di una colonna di A che non è stata scelta per costruire B.

16.3. Definizione. Sia La sottomatrice C **quadrata** di ordine **(s+1)** così ottenuta

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdot & \cdot & b_{1s} & a_{i_1 y} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdot & \cdot & b_{2s} & a_{i_2 y} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \cdot & \cdot & b_{3s} & a_{i_3 y} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & \cdot & \cdot & b_{4s} & a_{i_4 y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & b_{s4} & \cdot & \cdot & b_{ss} & a_{i_s y} \\ a_{xj_1} & a_{xj_2} & a_{xj_3} & a_{xj_4} & \cdot & \cdot & a_{xj_s} & a_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & a_{i_1 j_4} & \cdot & \cdot & a_{i_1 j_s} & a_{i_1 y} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & a_{i_2 j_4} & \cdot & \cdot & a_{i_2 j_s} & a_{i_2 y} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} & a_{i_3 j_4} & \cdot & \cdot & a_{i_3 j_s} & a_{i_3 y} \\ a_{i_4 j_1} & a_{i_4 j_2} & a_{i_4 j_3} & a_{i_4 j_4} & \cdot & \cdot & a_{i_4 j_s} & a_{i_4 y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & a_{i_s j_3} & a_{i_s j_4} & \cdot & \cdot & a_{i_s j_s} & a_{i_s y} \\ a_{xj_1} & a_{xj_2} & a_{xj_3} & a_{xj_4} & \cdot & \cdot & a_{xj_s} & a_{xy} \end{bmatrix}$$

viene detta **sottomatrice orlata di B**.

16.4. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & 1 & 0 & \# & -2 & \# \\ \# & \# & 0 & 0 & \# & 4 & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -7 & 7 & \# & 0 & \# \end{bmatrix}$$

e sia B la sua seguente sottomatrice quadrata di ordine 3

$$B = A_{\{1,4\},\{1,2,5,7\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Siano $x = 4$ e $y = 1$ rispettivamente l'indice di una riga e l'indice di una colonna di A che non sono state usate per costruire B.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \# \\ 1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 9 & \# & -1 & 1 & \# & 8 & 1 \\ -7 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Quindi, $C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & -7 \\ -1 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -7 & 7 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice orlata di B.

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

16.5. Teorema (degli orlati). Sia A una matrice non nulla ad elementi reali di tipo $m \times n$ e sia B una sua sottomatrice quadrata di ordine s non singolare. Il rango della matrice A è uguale a s se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

16.6. Esempio. Al variare del parametro reale t , trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ -1 & 2 & t \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \# \\ -1 & 2 & \# \\ \# & \# & \# \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = 2 \neq 0$).

Quindi, $2 \leq \text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre, $\text{rg}(A) = 2$ se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Ma l'unica sottomatrice orlata di B è la matrice A stessa. Quindi, $\text{rg}(A) = 2$ se solo se $\det A = 0$.

Siccome $\det A = 6 - 2t$, si ha che $\text{rg}(A) = 2$ solo per $t = 3$ e $\text{rg}(A) = 3$ per ogni altro valore di t .

16.7. Esempio. Al variare del parametro reale t , trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $\begin{bmatrix} \# & 0 & 1 & \# \\ \# & 1 & 0 & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = -1 \neq 0$).

Quindi, $2 \leq \text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre, $\text{rg}(A) = 2$ se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Esistono due sottomatrici orlate di B

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per cui, $\text{rg}(A) = 2$ se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$, ovvero se e solo se $t^2 - 1 = 0$ et $t + 1 = 0$.

Quindi, $\text{rg}(A) = 2$ solo per $t = -1$ e $\text{rg}(A) = 3$ per ogni altro valore di t .

16.8. Esempio. Al variare del parametro reale t , trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} t & t^2 & 0 & 64 & -8 \\ 1 & 8 & 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Si vede che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & 8 & 0 & \# & \# \\ \# & 0 & 6 & \# & \# \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = 48 \neq 0$).

Quindi, $2 \leq \operatorname{rg}(A) \leq 3$. Inoltre, $\operatorname{rg}(A) = 2$ se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Esistono tre sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} t & t^2 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} t^2 & 0 & 64 \\ 8 & 0 & t \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ $C_3 = \begin{bmatrix} t^2 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Per cui, $\operatorname{rg}(A) = 2$ se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$ et $\det C_3 = 0$, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} 6t(8-t) = 0 \\ 6(8-t)(t^2 + 8t + 64) = 0 \\ 6(t-8)(t+8) = 0 \end{cases}$$

Quindi, $\operatorname{rg}(A) = 2$ solo per $t = 8$ e $\operatorname{rg}(A) = 3$ per ogni altro valore di t .

16.9. Esempio. Sia $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$. Sia $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$.

Trovare le *equazioni cartesiane del sottospazio* $U = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$.

Sia $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ un generico vettore di \mathbb{R}^4 . Il vettore \mathbf{v} appartiene al sottospazio U se e solo se \mathbf{v} è multiplo del vettore \mathbf{u}_1 ovvero \mathbf{v} e \mathbf{u}_1 sono linearmente dipendenti.

Sia $A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ la matrice avente come righe le quaterne \mathbf{v} e \mathbf{u}_1 .

I vettori \mathbf{v} e \mathbf{u}_1 sono linearmente dipendenti se e solo se $\operatorname{rg}(A) = 1$.

Si vede subito che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 1 & \# & \# & \# \end{bmatrix} \rightarrow B = [1]$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = 1 \neq 0$).

Esistono tre sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} w & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} w & y \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $C_3 = \begin{bmatrix} w & z \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Per cui, $\operatorname{rg}(A) = 1$ se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$ et $\det C_3 = 0$, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2w + y = 0 \\ 3w - z = 0 \end{cases} \text{ Quindi, } U = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2w + y = 3w - z = 0\}.$$

16.10. Esempio. Sia $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$ e $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 1)$.

Trovare le equazioni del sottospazio $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.

Sia $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ un generico vettore di \mathbb{R}^4 . Il vettore \mathbf{v} appartiene al sottospazio U se e solo se \mathbf{v} è combinazione lineare dei vettori \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 ovvero \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 sono linearmente dipendenti. Sia A la matrice avente le quaterne \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 come righe

$$A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I vettori \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 sono linearmente dipendenti se e solo se $\text{rg}(A) = 2$.

Si vede che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -2 & 3 \\ \# & \# & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = -2 \neq 0$).

Esistono due sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} w & y & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Per cui, $\text{rg}(A) = 2$ se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$, ovvero se e solo se $\begin{cases} x = 0 \\ 2w - 5y - 4z = 0 \end{cases}$.

Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2w - 5y - 4z = 0\}$.

16.11. Esempio. Sia $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 7, -4)$.

Trovare le equazioni del sottospazio $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.

Sia $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ un generico vettore di \mathbb{R}^4 . Il vettore \mathbf{v} appartiene al sottospazio U se e solo se \mathbf{v} è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 ovvero $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 sono linearmente dipendenti. Sia A la matrice avente le quaterne $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 come righe

$$A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

I vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 sono linearmente dipendenti se e solo se $\text{rg}(A) = 3$, cioè A non ha rango massimo, ovvero se e solo se $\det A = 0$ e, quindi, se e solo se $(-2w - 19x + 5y + 4z) = 0$.

Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid 2w + 19x - 5y - 4z = 0\}$.