17. Sistemi lineari.

Ricordiamo che se $p \in N$ allora col simbolo I_p indichiamo l'insieme {1, 2, 3, 4, ….., p}.

17.1. Definizione. Diremo *sistema lineare di m equazioni in n incognite* un insieme di m equazioni lineari (cioè di 1^o grado) del tipo

(eq_1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + ….. + a_{1n}x_n = b_1$

(eq_2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + ….. + a_{2n}x_n = b_2$

(eq_3) $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + ….. + a_{3n}x_n = b_3$

(eq_4) $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + ….. + a_{4n}x_n = b_4$

…………………………………………………

(eq_m) $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 + ….. + a_{mn}x_n = b_m$

dove $(x_1, x_2, x_3, x_4, ….., x_n)$ è la *n-upla delle incognite*.

Per ogni $i \in I_m$ il numero reale b_i si dice *termine noto della i-esima equazione*. Per ogni coppia di indici $(i, j) \in I_m \times I_n$ il numero reale a_{ij} si dice *coefficiente dell'incognita x_j nella i-esima equazione*.

17.2. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

Tenendo conto della definizione di matrici uguali, il sistema precedente si può scrivere anche così:

$$\begin{bmatrix} 2w + 2x - y + 3z \\ w - 3y + 2z \\ 3w - 2x - 17y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

E' facile verificare che

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w + 2x - y + 3z \\ w - 3y + 2z \\ 3w - 2x - 17y + 7z \end{bmatrix}.$$

Per cui è possibile **rappresentare** il sistema:

$$\begin{cases} 2w+2x-y+3z=15 \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-2x-17y+7z=26 \end{cases}$$

anche nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{w} \\ \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Si noti che gli elementi della 1ª matrice sono i coefficienti delle incognite (w, x, y, z).

E' anche facile verificare che

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{w} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix} \mathrm{y} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \mathrm{z} = \begin{bmatrix} 2w \\ w \\ 3w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \\ -2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ -3y \\ -17y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ 2z \\ 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w+2x-y+3z \\ w-3y+2z \\ 3w-2x-17y+7z \end{bmatrix}$$

Per cui è possibile **rappresentare** il sistema:

$$\begin{cases} 2w+2x-y+3z=15 \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-2x-17y+7z=26 \end{cases}$$

anche nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{w} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix} \mathrm{y} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \mathrm{z} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Per cui il sistema $\begin{cases} 2w+2x-y+3z=15 \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-2x-17y+7z=26 \end{cases}$ si può **rappresentare** nei due modi seguenti:

(I) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{w} \\ \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$ (II) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{w} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix} \mathrm{y} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \mathrm{z} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$

Si noti che $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ sono le colonne della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$.

Ora, generalizziamo quanto visto nell'Esempio 17.2.

Con riferimento a quanto visto nella Definizione 17.1 definiamo tre matrici A, X e B come segue

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Le colonne di A sono

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m3} \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m4} \end{bmatrix}, \ldots.. , \quad A^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

E’ facile convincersi che il sistema lineare della definizione si può rappresentare nei seguenti modi

(I)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero $AX = B$

(II)
$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m3} \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m4} \end{bmatrix} x_4 + \ldots.. + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero $A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots.. + A^nx_n = B$

17.3. Definizione. Quando useremo la rappresentazione (I) diremo che il *sistema* è scritto *in forma matriciale* mentre quando useremo la (II) diremo che il *sistema* è scritto *per colonne*.

Sia C := [A|B] la matrice di tipo m×(n+1) che si ottiene “affiancando” la colonna B alla matrice A.

$$C = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & a_{3n} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & a_{4n} & b_4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & . & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

17.4. Definizione. Per un sistema lineare AX = B diremo che

- A è la *matrice dei coefficienti* o *matrice incompleta* del sistema;
- X è la (matrice) *colonna delle incognite*;
- B è la (matrice) *colonna dei termini noti*;
- C = [A|B] è la *matrice completa* del sistema.

17.5.Osservazione. Per il Teorema 9.22, lo spazio $<A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n>$ generato dalle colonne di A è un sottospazio dello spazio $<A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n, B>$ delle colonne di C. Per cui si ha che

17.5.1. $\mathcal{C}_A \leq \mathcal{C}_C$

17.5.2. $\dim\mathcal{C}_A \leq \dim\mathcal{C}_C$ ovvero $rg(A) \leq rg(C)$ (per l’Osservazione 10.14.1)

17.5.3. $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_C \iff \dim\mathcal{C}_A = \dim\mathcal{C}_C$ (per l’Osservazione 10.14.2)

17.6. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix} \quad C = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -17 & 7 & 26 \end{array}\right]$$

$$< \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} > \text{ è sottospazio di } < \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix} >

17.7. Definizione. Dato un sistema lineare AX = B nelle incognite $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ diremo che la **n-upla ordinata** di numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$ è **UNA** *soluzione del sistema* se sostituendo **ordinatamente** i numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$ alle incognite $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ in ognuna delle equazioni si ottengono sempre delle **identità**.

17.8. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

È facile verificare che la quaterna ordinata (w, x, y, z) = (19, 1, –2, –9) è una soluzione del sistema.

Riguardo all'esistenza di soluzioni di un sistema lineare abbiamo il seguente:

17.9. TEOREMA (Rouché - Capelli). Un sistema lineare ha almeno una soluzione se e solo se il rango della sua matrice incompleta è uguale al rango della sua matrice completa.

Dimostrazione. Utilizziamo la scrittura per colonne del sistema lineare

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^nx_n = B$$

Il sistema ha almeno una soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) \in R^n \iff$

$\iff A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \ldots + A^n\alpha_n = (\text{identità}) = B \iff$

$\iff$ B è una combinazione lineare delle colonne di A $\iff$

$\iff B \in \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n \rangle \iff$

$\iff \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n \rangle = \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n, B \rangle \iff$

$\iff \mathcal{C}_A = \mathcal{C}_{[A|B]} \iff \mathcal{C}_A = \mathcal{C}_C \iff \dim\mathcal{C}_A = \dim\mathcal{C}_C \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ ■

17.10. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che tale sistema ha almeno una soluzione. Facciamo vedere che rg(A) = rg(C).
Il determinante della sottomatrice formata dalla prima, terza e quarta colonna di A è non nullo (è uguale a +3). Quindi, rg(A) = 3. Da $3 = \text{rg}(A) \leq \text{rg}(C) \leq 3$ si ha che rg(C) = 3.

17.11. Definizione. Un sistema lineare AX = B si dice *normale* se rg(A) = numero righe di A.

17.12. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w+2x-y+3z=15 \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-2x-17y+7z=26 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che rg(A) = 3 = numero righe di A. Quindi, questo sistema lineare è normale.

17.13. Lemma. In un sistema lineare normale il numero delle equazioni è minore o uguale al numero delle incognite.

Dimostrazione. Se AX = B è un sistema lineare normale con A di tipo m×n, allora rg(A) = m.

Da $m = rg(A) \leq \min\{m, n\}$ si ha che $m \leq n$. ■

17.14. Corollario. Un sistema lineare normale ha **sempre** almeno una soluzione.

Dimostrazione. Se AX = B è un sistema lineare normale con A di tipo m×n, allora $m \leq n$. Quindi, $m < (n+1)$ da cui $m = \min\{m, (n+1)\}$. Poiché $m = rg(A) \leq rg(C) \leq \min\{m, (n+1)\} = m$ si ha che rg(A) = rg(C) = m. Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ha almeno una soluzione. ■

17.15. Definizione. Un sistema lineare AX = B normale con A quadrata si dice *sistema di Cramer*.

17.16. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite (x, y, z)

$$\begin{cases} 2x-z=3 \\ 5y+3z=1 \\ x+y=2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè $\det A = -1 \neq 0$ è rg(A) = 3 = numero righe di A. Quindi, il sistema è normale.

Poiché A è una matrice quadrata, questo sistema lineare è un sistema di Cramer.

17.17. Teorema. (Cramer) Un sistema di Cramer ha un'unica soluzione.

Dimostrazione. Se AX = B è un sistema di Cramer allora, per definizione, A è quadrata di rango massimo. Per cui A è non singolare (cioè detA ≠ 0) e, quindi, invertibile.

E' facile verificare che la colonna $Y := A^{-1}B$ è una soluzione del sistema AX = B.

Infatti, moltiplicando (a destra) la matrice A per la colonna $Y := A^{-1}B$ si ottiene

AY = (identità) = $A(A^{-1}B)$ = (identità) = $(AA^{-1})B$ = (identità) = IB = (identità) = B

Quindi, sostituendo la colonna X con la colonna $Y := A^{-1}B$ nel sistema AX = B si ottiene l'identità B = B. Per cui, la colonna $Y := A^{-1}B$ è una soluzione del sistema AX = B.

Proviamo che tale soluzione Y è unica.

Se Z fosse un'altra soluzione del sistema AX = B, allora varrebbe l'identità AZ = B. Da cui si avrebbe $A^{-1}(AZ) = A^{-1}B$. Cioè $(A^{-1}A)Z = Y$ ovvero IZ = Y e, infine Z = Y. ■

17.18. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite (x, y, z)

$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ 5y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che questo è un sistema di Cramer. Inoltre, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

Quindi, l'**unica** soluzione del sistema è la colonna $Y = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Ovvero, la terna (x, y, z) = (0, 2, –3) è l'**unica** soluzione del sistema $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ 5y + 3z = 1. \\ x + y = 2 \end{cases}$

Si noti che tale sistema ha **UNA** unica soluzione data dalla terna (0, 2, –3). Quindi, **NON** è corretto dire che x = 0, y = 2 e z = –3 sono **TRE** soluzioni del sistema.

17.19. Teorema. Un sistema lineare **normale** non di Cramer ha infinite soluzioni.

Dimostrazione. Se AX = B è un sistema lineare non normale di Cramer allora rg(A) = m < n.
Quindi, tra le n colonne di A ne esistono m linearmente indipendenti che fomano una base di $\mathcal{C}_A$.
Per comodità supponiamo che siano le ultime (n – m). Rappresentiamo il sistema per colonne

(♣) $$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + \ldots + A^mx_m + A^{m+1}x_{m+1} + A^{m+2}x_{m+2} + \ldots + A^nx_n = B$$

Ora, scegliamo **a piacere** una (n – m)-upla ordinata di numeri reali $(\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n)$.
Sostituendo in tutte le equazioni del sistema i numeri reali $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n$ ordinatamente alle incognite $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots, x_n$ otteniamo

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + \ldots + A^mx_m + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n = B$$

ovvero

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^mx_m = B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n)$$

Ponendo

- $A^* := [A^1 \mid A^2 \mid A^3 \mid A^4 \mid \ldots \mid A^m]$

(cioè A è la sottomatrice di A ottenuta cancellando da A le sue ultime (n – m) colonne)*

- $B^* := B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n)$

si ottiene un **nuovo** sistema lineare di m equazioni nelle m incognite $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_m)$

(♥) $$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^mx_m = B^*$$

La matrice incompleta di questo sistema è la matrice quadrata $A^* := [A^1 \mid A^2 \mid A^3 \mid A^4 \mid \ldots \mid A^m]$ formata dalle prime m colonne della matrice A. Poiché tali colonne sono linearmente indipendenti la matrice A^* ha rango massimo m. Quindi, il sistema (♥) è un sistema di Cramer.
Sia $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m)$ l'unica soluzione del sistema (♥), cioè si ha la seguente identità

$$A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \ldots + A^m\alpha_m = B^*.$$

E' immediato verificare che la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n)$ è una soluzione del sistema **iniziale** (♣). Infatti, sostituendola all'n-upla delle incognite si ha

$$A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + \ldots + A^m\alpha_m + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n =$$
$$= B^* + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n =$$
$$= [B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n)] + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n = B$$

Quindi, **per ogni scelta** della (n – m)-upla $(\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n)$, si ottiene un'unica soluzione del sistema lineare (♣). Di conseguenza, il sistema lineare (♣) ha infinite soluzioni. ■

17.20. Definizione. Nel Teorema 17.12 abbiamo visto che un sistema lineare può avere infinite soluzioni che dipendono dalla scelta di una (n – m)-upla di numeri reali.

In tal caso diremo che *il sistema ha $\infty^{(n-m)}$ soluzioni*.

17.21. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle **quattro** incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w+2x-y+3z=15 \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-2x-17y+7z=26 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo già visto che il determinante della sottomatrice A’= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -17 & 7 \end{bmatrix}$ formata dalla prima, terza e quarta colonna di A è uguale a +3. Per cui, la prime, terza e quarta colonna di A sono linearmente indipendenti. Quindi, scegliamo la seconda incognita x, poniamola uguale a β e portiamola a secondo membro. Si ottiene il seguente **nuovo** sistema nelle **tre** incognite (w, y, z)

$$\begin{cases} 2w-y+3z=15-2\beta \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-17y+7z=26+2\beta \end{cases}$$

Tale **nuovo** sistema è un sistema di Cramer.

Si ha che A’= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -17 & 7 \end{bmatrix}$, X’= $\begin{bmatrix} w \\ y \\ z \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 15-2\beta \\ 7 \\ 26+2\beta \end{bmatrix}$ e $(A')^{-1}$= (1/3)$\begin{bmatrix} 13 & -44 & 7 \\ -1 & 5 & -1 \\ -8 & 31 & -5 \end{bmatrix}$.

Quindi, l’**unica** soluzione di tale **nuovo** sistema è

$$(A')^{-1}B = (1/3)\begin{bmatrix} 13 & -44 & 7 \\ -1 & 5 & -1 \\ -8 & 31 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15-2\beta \\ 7 \\ 26+2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23-4\beta \\ -2 \\ -11+2\beta \end{bmatrix}$$

Per cui, l’unica soluzione del **nuovo** sistema è la **terna** (w, y, z) = (23–4β, –2, –11+2β).

A questo punto è immediato rendersi conto che, per ogni valore reale del parametro β, la **quaterna** (w, x, y, z) = (23–4β, β, –2, –11+2β) è una soluzione del **sistema iniziale**

$$\begin{cases} 2w+2x-y+3z=15 \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-2x-17y+7z=26 \end{cases}$$

Per cui il sistema iniziale ha infinite soluzioni dipendenti dal parametro β.

17.22. Definizione. Dati due *sistemi lineari* $AX = B$ e $\underline{A}X = \underline{B}$ con A di tipo $m \times n$, $\underline{A}$ di tipo $p \times n$, diremo che sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. Si noti che affinché due sistemi siano equivalenti è necessario che abbiano lo **stesso numero di incognite** mentre, in generale, non è necessario i due sistemi abbiano lo stesso numero di equazioni.

17.22. Definizione. Dato un sistema lineare le seguenti azioni:

(1) scambiare due equazioni tra loro;

(2) moltiplicare un'equazione per un numero reale $c \neq 0$;

(3) aggiungere ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale qualsiasi;

si dicono *operazioni elementari sulle equazioni del sistema*.

17.23. Osservazione. Consideriamo le seguenti due equazioni lineari.

(I) $\quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n = b$

(II) $\quad ca_1x_1 + ca_2x_2 + ca_3x_3 + ca_4x_4 + \ldots.. + ca_nx_n = cb \quad$ con $c \neq 0$

Si noti che l'equazione (II) si può scrivere anche nel modo seguente

$c(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n) = cb$

cioè l'equazione (II) è stata ottenuta dall'equazione (I) con l'operazione elementare (2).

Si vede subito che una n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ è una soluzione dell'equazione (I) se e solo se la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ è una soluzione dell'equazione (II).

Quindi, le equazioni (I) e (II) hanno le stesse soluzioni.

17.24. Osservazione. Consideriamo le seguenti tre equazioni lineari.

(I) $\quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n = r$

(II) $\quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + \ldots.. + b_nx_n = s$

(III) $\quad (a_1+db_1)x_1 + (a_2+db_2)x_2 + (a_3+db_3)x_3 + (a_4+db_4)x_4 + \ldots.. + (a_5+db_5)x_n = r + ds$

Si noti che l'equazione (III) si può scrivere anche nel modo seguente

$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n) + d(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + \ldots.. + b_nx_n) = r + ds$

cioè l'equazione (III) è stata ottenuta dalle equazioni (I) e (II) con l'operazione elementare (3).

Si vede subito che se la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ è soluzione delle equazioni (I) e (II) allora tale n-upla è anche soluzione dell'equazione (III). Inoltre, se la n-upla $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots.., \beta_n)$ è soluzione delle equazioni (II) e (III) allora tale n-upla è anche soluzione dell'equazione (I).

Quindi, se (I) e (II) sono due equazioni di un sistema lineare $AX = B$ allora esso è equivalente al sistema lineare $\underline{A}X = \underline{B}$ che si ottiene sostituendo l'equazione (I) con l'equazione (III).

Tenendo conto delle Osservazioni 17.23 e 17.24 si ha subito il seguente

17.25. Lemma. Sia $AX = B$ un sistema lineare. Se agiamo su di esso con un numero finito di operazioni elementari, allora otteniamo un sistema lineare $\underline{A}X = \underline{B}$ equivalente a quello iniziale.

17.26. Osservazione. Sia $AX = B$ un sistema lineare. Se un'equazione del sistema è combinazione lineare di altre s equazioni del sistema, allora possiamo supporre che sia l'ultima equazione (se così non fosse possiamo effettuare uno scambio di equazioni). A questo punto, tramite s operazioni elementari del tipo (3) si può ottenere un sistema $\underline{A}X = \underline{B}$ (equivalente a quello dato per il Lemma precedente) che ha come ultima equazione l'identità $0 = 0$.

Tenendo conto dell'Osservazione 17.26 si ha subito il seguente

17.27. Corollario. Se un'equazione di un sistema lineare è combinazione lineare di altre equazioni del sistema, allora **eliminando** tale equazione si ottiene un sistema equivalente al sistema dato.

17.28. Osservazione. Ogni operazione elementare sulle equazioni di un sistema corrisponde ad un'operazione elementare sulle righe della matrice $C = [A|B]$ completa del sistema, e viceversa.

17.29. Corollario. Sia $AX = B$ un sistema lineare. Sia $C = [A|B]$ la matrice completa del sistema. Se la matrice $\underline{C} = [\underline{A}|\underline{B}]$ è stata ottenuta dalla matrice C con un numero finito di operazioni elementari sulle sue righe, allora il sistema lineare $\underline{A}X = \underline{B}$ è equivalente al sistema iniziale.

17.30. TEOREMA. Sia $AX = B$ un sistema lineare **NON** normale.

Se tale sistema ha almeno una soluzione, **allora** esso è equivalente ad un sistema lineare normale.

Dimostrazione. Sia $AX = B$ un sistema lineare non normale con A di tipo $m \times n$ e sia $C = [A|B]$.
Se esso ha almeno una soluzione allora (per il Teorema di Rouchè-Capelli) $rg(C) = r = rg(A) < m$. Quindi, tra le m righe di C ve ne sono r linearmente indipendenti. Tali r righe sono una base dello spazio delle righe di C. Per cui ognuna delle altre $(m - r)$ si può scrivere come loro combinazione lineare. Sia $\underline{C} = [\underline{A}|\underline{B}]$ la matrice che si ottiene da C cancellando queste $(m - r)$. Il sistema lineare $\underline{A}X = \underline{B}$ (cioè quello ottenuto da quello iniziale eliminando le equazioni che sono combinazioni lineari di altre equazioni) è equivalente, per il Corollario 17.27, al sistema iniziale. Inoltre, si ha che numero righe di $\underline{A} = r = rg(A)$. Quindi, $\underline{A}X = \underline{B}$ è un sistema lineare normale. ■

18. Sistemi lineari omogenei.

18.1. Definizione. Sia AX = B un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite. Se la (matrice) colonna B dei termini noti è la colonna **0** nulla, ovvero sono nulli tutti i termini noti

(eq_1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$

(eq_2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$

(eq_3) $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \ldots + a_{3n}x_n = 0$

(eq_4) $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \ldots + a_{4n}x_n = 0$

……………………………………………………

(eq_m) $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$

allora diremo che il sistema è *omogeneo* e scriveremo AX = **0**.

18.2. Osservazione. E' immediato verificare che **ogni** sistema lineare **omogeneo** in n incognite ha **almeno una** soluzione. Infatti, la n-upla nulla (0, 0, 0, 0, ….., 0), cioè la colonna **0**, è una soluzione del sistema lineare omogeneo AX = **0**.

18.3. Definizione. Sia AX = **0** un sistema lineare omogeneo in n incognite. La sua soluzione data dalla n-upla nulla (0, 0, 0, 0, ….., 0) viene detta *soluzione banale*. Ogni **altra** sua soluzione (quindi diversa da quella banale) viene detta *autosoluzione*.

18.4. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

E' facile verificare che la soluzione banale (0, 0, 0) è la sua unica soluzione.

18.5. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

La quaterna (0, 0, 0, 0) è la soluzione banale. La quaterna (1, 1, –1, 1) è una autosoluzione.

18.6. Teorema. Un sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ in n incognite ha autosoluzioni se e solo se il rango della sua matrice incompleta A è minore del numero n delle incognite.

Dimostrazione. Sia $A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^nx_n = \mathbf{0}$.

Il sistema ha almeno una autosoluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \ldots + A^n\alpha_n = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le n colonne di A sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A ha al massimo $s < n$ colonne linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ $rg(A) = s < n$ $\Leftrightarrow$ $rg(A) < n$ ■

18.7. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.4. Esso aveva solo la soluzione banale. Verifichiamo che il rango della sua matrice completa è uguale al numero delle sue incognite. Si ha che $\det A = 2 \neq 0$ e, quindi, $rg(A) = 3$ = numero incognite.

18.8. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.5. Esso aveva almeno una autosoluzione. Verifichiamo che il rango della sua matrice completa è minore del numero delle sue incognite. Col metodo di Gauss-Jordan applicato alla matrice A si trova una matrice a scalino A' avente una riga nulla. Quindi, $rg(A) = rg(A') = 3 < 4$ = numero incognite.

Tenendo conto che se A è di tipo $m\times n$, allora $rg(A) \leq \min\{m, n\}$ si ha il seguente

18.9. Corollario. Se in un sistema lineare omogeneo il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, allora esso ha <u>sicuramente</u> autosoluzioni.

18.10. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Poiché il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, tale sistema ha autosoluzioni. Infatti, si può verificare che $(2, -1, 1, 0, 0)$, $(8, -2, 0, 1, 0)$ e $(0, 2, -4, 1, 0)$ sono autosoluzioni.

Poiché una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se è non singolare si ha il seguente

18.11. Corollario. (IMPORTANTE) Un sistema lineare omogeneo quadrato ha autosoluzioni se e solo se la sua matrice incompleta è singolare (cioè il suo determinante è uguale a zero).

18.12. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che detA = 0 (e quindi il sistema ha autosoluzioni) ed è facile verificare che la terna (2, 1, −1) è una sua autosoluzione.

18.13. Tabella. Sia AX = **0** un sistema lineare omogeneo con A di tipo m×n. Si ha che:

- $m < n \to \infty^{n-rg(A)}$ soluzioni (la soluzione banale e infinite autosoluzioni)
- $m = n \to \begin{cases} \det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{la soluzione banale è l'unica soluzione} \\ \det(A) = 0 \Rightarrow \infty^{n-rg(A)} \text{ soluzioni (la soluzione banale e infinite autosoluzioni)} \end{cases}$
- $m > n \to \begin{cases} n = rg(A) \Rightarrow \text{la soluzione banale è l'unica soluzione} \\ n > rg(A) \Rightarrow \infty^{n-rg(A)} \text{ soluzioni (la soluzione banale e infinite autosoluzioni)} \end{cases}$

18.14. Definizione. Con $S_{A|B}$ indicheremo l'insieme delle soluzioni del sistema lineare AX = B. Se il sistema ha n incognite, allora $S_{A|B}$ è un sottoinsieme (anche vuoto) di R^n.

18.15. Teorema. Se AX = **0** un sistema lineare omogeneo in n incognite, allora $S_{A|\mathbf{0}} \leq R^n$. Ovvero l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale.

Dimostrazione. L'insieme $S_{A|\mathbf{0}}$ è <u>non vuoto</u> poiché la n-upla nulla **0** è una soluzione di AX = **0**.

Proviamo ora che $S_{A|\mathbf{0}}$ è <u>chiuso rispetto alla somma di due n-uple</u>, cioè che se Y e Z sono due n-uple di $S_{A|\mathbf{0}}$ allora anche (Y+Z) è una n-upla di $S_{A|\mathbf{0}}$.

Se Y e Z sono due n-uple di $S_{A|\mathbf{0}}$ allora AY = **0** e AZ = **0** sono due identità. Sommandole membro a membro si ottiene l'identità AY+AZ = **0** + **0** da cui l'identità A(Y+Z) = **0**. Per cui (Y+Z) è una soluzione di AX = **0** e, quindi, (Y+Z) è una n-upla di $S_{A|\mathbf{0}}$.

Infine, proviamo che $S_{A|\mathbf{0}}$ è chiuso <u>rispetto al prodotto di un numero reale (scalare) per una n-upla</u>, cioè se α è un numero reale e Y è una n-upla di di $S_{A|\mathbf{0}}$ allora anche (αY) è una n-upla di $S_{A|\mathbf{0}}$.

Se Y è una n-upla di di $S_{A|\mathbf{0}}$ allora AY = **0** è un'identità. Moltiplicando entrambe i membri di tale identità per α si ottiene l'identità α(AY) = α**0** da cui l'identità A(αY) = **0**. Per cui αY è una soluzione di AX = **0** e, quindi, (αY) è una n-upla di $S_{A|\mathbf{0}}$. ■

Omettiamo la dimostrazione del seguente

18.16. Teorema. Se AX = **0** è un sistema lineare omogeneo in **n** incognite, allora

$$\dim S_{A|\mathbf{0}} = \mathbf{n} - \mathrm{rg}(A).$$

Verifichiamo quanto affermato nel Teorema 18.16 con tre esempi.

18.17. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.5

$$(\heartsuit)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, rg(A) = rg (H) = 3.

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ($\heartsuit$) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit)\ \begin{cases} x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 12x_3 - 13x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché le prime tre colonne di A' sono <u>sicuramente</u> linearmente indipendenti, portando l'incognita x_4 a secondo membro e ponendo $x_4 = \beta$, otteniamo il seguente sistema di Cramer

$$(\spadesuit)\ \begin{cases} x_1 + 8x_3 = -7\beta \\ x_2 - 12x_3 = 13\beta \\ x_3 = -\beta \end{cases} \qquad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ($\spadesuit$) è la terna $(x_1, x_2, x_3) = (\beta, \beta, -\beta)$. Per cui, per ogni valore reale di β la quaterna $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\beta, \beta, -\beta, \beta)$ è una soluzione del sistema ($\clubsuit$) e, quindi, del sistema ($\heartsuit$).

Per cui il sottospazio delle soluzioni di ($\heartsuit$) è $S_{A|\mathbf{0}} = \{(\beta, \beta, -\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. Inoltre, poiché $(\beta, \beta, -\beta, \beta) = \beta(1, 1, -1, 1)$, la quaterna $(1, 1, -1, 1)$ è un generatore del sottospazio $S_{A|\mathbf{0}}$. Essendo $(1, 1, -1, 1)$ anche linearmente indipendente (è diversa dalla quaterna nulla) si ha che la quaterna $(1, 1, -1, 1)$ è una base di $S_{A|\mathbf{0}}$. Per cui $\dim S_{A|\mathbf{0}} = 1 = 4 - 3 = n - \mathrm{rg}(A)$.

18.18. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.10

$$(\heartsuit)\ \begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5=0 \\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Quindi, rg(A) = rg (H) = 3.

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ($\heartsuit$) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit)\ \begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5=0 \\ x_2+x_3+2x_4+7x_5=0 \\ 13x_5=0 \end{cases} \qquad A'=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Poiché le prima, la seconda e la quinta colonna di A' sono <u>sicuramente</u> linearmente indipendenti, portando le incognite x_3 e x_4 a secondo membro e ponendo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, otteniamo il seguente sistema di Cramer

$$(\spadesuit)\ \begin{cases} x_1+4x_2-3x_5=-2\alpha \\ x_2+7x_5=-\alpha-2\beta \\ 13x_5=0 \end{cases} \qquad A''=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ($\spadesuit$) è la terna $(x_1, x_2, x_3) = (2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, 0)$. Per cui, per ogni valore reale di α e β la 5-upla $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, \alpha, \beta, 0)$ è una soluzione del sistema ($\clubsuit$) e, quindi, del sistema ($\heartsuit$).

Per cui il sottospazio delle soluzioni di ($\heartsuit$) è $S_{A|\mathbf{0}} = \{(2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, \alpha, \beta, 0)\in R^5 \mid \alpha,\beta\in R\}$.

Inoltre, poiché $(2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, \alpha, \beta, 0) = \alpha(2, -1, 1, 0, 0) + \beta(8, -2, 0, 1, 0)$, le 5-uple (2, –1, 1, 0) e (8, –2, 0, 1, 0) sono generatori del sottospazio $S_{A|\mathbf{0}}$.

Essendo (2, –1, 1, 0) e (8, –2, 0, 1, 0) anche linearmente indipendenti (si verifica subito che non sono proporzionali tra loro) si ha che B = ((2, –1, 1, 0), (8, –2, 0, 1, 0)) è una base di $S_{A|\mathbf{0}}$.

Per cui $\dim S_{A|\mathbf{0}} = 2 = 5 - 3 = n - \mathrm{rg}(A)$.

18.19. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo seguente

$$(\heartsuit)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+6x_4+5x_5=0 \\ 4x_1-5x_2+7x_3+3x_4-8x_5=0 \\ 8x_1-9x_2+13x_3+15x_4+2x_5=0 \\ 10x_1-12x_2+17x_3+12x_4-11x_5=0 \\ 6x_1-7x_2+10x_3+9x_4-3x_5=0 \\ 14x_1-17x_2+24x_3+15x_4-19x_5=0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & -5 & 7 & 3 & -8 \\ 8 & -9 & 13 & 15 & 2 \\ 10 & -12 & 17 & 12 & -11 \\ 6 & -7 & 10 & 9 & -3 \\ 14 & -17 & 24 & 15 & -19 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Quindi, rg(A) = rg (H) = 2.

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ($\heartsuit$) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+6x_4+5x_5=0 \\ x_2-x_3+9x_4+18x_5=0 \end{cases} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Poiché le prima e la seconda colonna di A' sono linearmente indipendenti, portando le incognite x_3 , x_4 e x_5 a secondo membro e ponendo $x_3 = 2\alpha$, $x_4 = \beta$ e $x_5 = 2\gamma$, otteniamo il sistema di Cramer

$$(\spadesuit)\begin{cases} 2x_1-2x_2=-6\alpha-6\beta-10\gamma \\ x_2=+2\alpha-9\beta-36\gamma \end{cases} \qquad A'' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ($\spadesuit$) è la coppia $(x_1, x_2) = (-\alpha-12\beta-41\gamma, 2\alpha-9\beta-36\gamma)$. Per cui, per ogni valore reale di α, β e γ la 5-upla $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\alpha-12\beta-41\gamma, 2\alpha-9\beta-36\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$ è una soluzione del sistema ($\clubsuit$) e, quindi, del sistema ($\heartsuit$). Per cui il sottospazio delle soluzioni di ($\heartsuit$) è

$$\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} = \{(-\alpha-12\beta-41\gamma, 2\alpha-9\beta-36\gamma, \alpha, \beta, \gamma)\in \mathbb{R}^5 \mid \alpha,\beta,\gamma\in \mathbb{R}\}$$

Inoltre, poiché

$$(-\alpha-12\beta-41\gamma, 2\alpha-9\beta-36\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha(-1, 2, 1, 0, 0) + \beta(-12, -9, 0, 1, 0) + \gamma(-41, -36, 0, 0, 1)$$

le 5-uple (–1, 2, 1, 0, 0), (–12, –9, 0, 1, 0) e (–41, –36, 0, 0, 1) sono generatori del sottospazio $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$.

Inoltre, la matrice $\left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ -41 & -36 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ che ha come righe quelle tre 5-uple ha sicuramente rango 3 poiché contiene come sottomatrice la matrice unitaria di ordine 3. Quindi, quelle tre 5-uple sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$. Per cui $\dim\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} = 3 = 5 - 2 = n - \text{rg}(A)$.

La proprietà vista nel Teorema 18.15 non vale per i sistemi lineari non omogenei. Infatti,

18.17. Osservazione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare **non** omogeneo AX = B in n incognite **non** è un sottospazio di R^n.

Dimostrazione. Se AX = B è un sistema lineare non omogeneo, allora B ≠ **0**. Poiché A**0** = **0** ≠ B, la n-upla nulla **0** non è una soluzione del sistema e, quindi, non appartiene a $S_{A|B}$. Poiché l'elemento neutro **0** rispetto alla somma non appartiene a $S_{A|B}$, quest'ultimo non è un sottospazio di R^n. ■

18.18. Definizione. Se AX = B è un sistema lineare **non** omogeneo (cioè B ≠ **0**), allora il sistema lineare omogeneo AX = **0** (cioè avente la stessa matrice A dei coefficienti) viene detto *sistema omogeneo associato* al sistema lineare AX = B.

18.19. Teorema. Sia AX = B un sistema lineare **non** omogeneo in n incognite avente almeno una soluzione e sia Y_p una **qulunque** di esse (ovvero $AY_p = B$ è un'identità).

Una n-upla $Z \in R^n$ è una soluzione del sistema AX = B

se e solo se

Esiste una n-upla $X_0 \in R^n$ soluzione del sistema omogeneo associato AX = **0** tale che $Z = Y_p + X_0$.

Dimostrazione.

(⇓) Supponiamo che la n-upla $Z \in R^n$ sia una soluzione del sistema AX = B. Per cui AZ = B è un identità. Sottraendo membro a membro da tale identità l'identità $AY_p = B$ otteniamo l'identità $AZ - AY_p = B - B$ da cui l'identità $A(Z - Y_p) = \mathbf{0}$. Quindi, la n-upla $(Z - Y_p)$ è una soluzione del sistema omogeneo associato AX = **0**. Ponendo $X_0 := (Z - Y_p)$, abbiamo che esiste una n-upla X_0 soluzione del sistema lineare omogeneo associato tale che $Z = Y_p + (Z - Y_p) = Y_p + X_0$.

(⇑) Sia ora $Z := Y_p + X_0$ con X_0 una soluzione del sistema omogeneo associato AX = **0**. Per cui $AX_0 = \mathbf{0}$ è un'identità. Sommando membro a membro a tale identità l'identità $AY_p = B$ otteniamo l'identità $AX_0 + AY_p = \mathbf{0} + B$ da cui l'identità $A(Y_p + X_0) = B$. Quindi, la n-upla $Z = (Y_p+X_0)$ è una soluzione del sistema AX = B. ■