21. (cenni di) **Geometria analitica del piano.**

21.1. Definizione. Sia π un piano e sia O un suo punto. Siano **i** e **j** due **versori ortogonali** tra loro e paralleli al piano π. Diremo che la terna ordinata (O, **i**, **j**) è un *riferimento cartesiano ortonormale del piano* e lo indicheremo col simbolo RC(O, **i**, **j**).

21.2. Osservazione. Sia $U := \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle$ il sottospazio dei vettori liberi generato da vettori **i** e **j.** E' immediato rendersi conto che la coppia (**i**, **j**) è una base di U e che gli elementi di U sono tutti e soli i vettori liberi paralleli al piano π. Se indichiamo con $\wp$ l'insieme dei punti del piano π, allora per ogni punto $P \in \wp$ esiste ed è unico il vettore libero $\mathbf{u} = [(OP)]$. Ovviamente **u** è parallelo al piano π per cui $\mathbf{u} \in U$. Per il Teorema di caratterizzazione di una base, si ha che esiste un'unica coppia ordinata di numeri reali $(x_P, y_P) \in R^2$ tali che $\mathbf{u} = x_P\mathbf{i} + y_P\mathbf{j}$. Tenendo conto di quanto appena osservato si può definire una funzione $\Omega : \wp \to R^2$ che ad ogni punto P associa, nel modo appena visto, l'unica coppia ordinata di numeri reali (x_P, y_P), cioè $\Omega(P) = (x_P, y_P)$. E' facile dimostrare che tale funzione è biettiva. Infatti, per ogni coppia ordinata di numeri reali $(\alpha, \beta) \in R^2$ esiste un unico vettore libero $\mathbf{t} = (\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}) \in U$, per cui sul piano π esiste un unico punto Q tale che $[(OQ)] = \mathbf{t}$. Poiché, per ogni $(\alpha, \beta) \in R^2$ esiste $Q \in \wp$ tale che $\Omega(Q) = (\alpha, \beta)$, la funzione è suriettiva. Siccome tale punto Q è anche unico la funzione è iniettiva.

Tenendo conto dell'Osservazione 21.2 è ben posta la seguente

21.3. Definizione. La funzione **biettiva** Ω che ad ogni punto P del piano associa l'unica coppia (x_P, y_P) ordinata di numeri reali tali che $[(OP)] = x_P\mathbf{i} + y_P\mathbf{j}$ si dice *coordinatizzazione* dei punti del piano rispetto al riferimento cartesiano ortonormale RC(O, **i**, **j**).

21.4. Definizione. L'unica coppia ordinata di numeri reali (x_P, y_P) associata al punto P tramite la funzione di coordinatizzazione viene detta coppia di *coordinate del punto* P rispetto al riferimento cartesiano ortonormale RC(O, **i**, **j**). Il primo e secondo elemento della coppia (x_P, y_P) vengono detti rispettivamente *ascissa* e *ordinata* del punto P.

Inoltre, scriveremo brevemente "*il punto* $P(x_P, y_p)$" invece che "il punto P di coordinate (x_P, y_P)".

21.5. Osservazione. Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono due punti dello piano, allora

$$[P_1P_2] = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

Dimostrazione. Per la Definizione 21.3 si ha che $[OP_1] = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ e $[OP_2] = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$.
Dall'identità vettoriale $[OP_1] + [P_1P_2] = [OP_2]$ si ottiene $[P_1P_2] = [OP_2] - [OP_1]$ da cui la tesi. ■

Ovviamente, essendo sottointesa la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, possiamo identificare il vettore libero $[P_1P_2]$ con la coppia ordinata delle sue componenti, per cui scriveremo brevemente $[P_1P_2] = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$

21.6. Teorema. (*equazioni parametriche di una retta nel piano*).

Per ogni retta r del piano esiste un sistema di equazioni lineari del tipo

$$(\clubsuit)\quad \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$$

nelle incognite $(x, y; t)$ con $(l, m) \neq (0, 0)$ tale che un punto $P_1(x_1, y_1)$ del piano appartiene alla retta r se e solo se esiste $t_1 \in R$ tale che la terna $(x_1, y_1; t_1)$ è una soluzione del sistema $(\clubsuit)$.
Le equazioni del sistema $(\clubsuit)$ si dicono *equazioni parametriche* della retta r (il parametro è t).
(l, m) sono le componenti di **un** vettore parallelo ad r e si dicono *parametri direttori* della retta.

Dimostrazione. Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto della retta r e sia $\mathbf{w} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$ un vettore libero non nullo **parallelo** alla retta r. Quindi, $(l, m) \neq (0, 0)$. Ovviamente $\mathbf{w}$ è una base dello spazio $W = \langle\mathbf{w}\rangle$ i cui elementi sono tutti e soli i vettori liberi paralleli a $\mathbf{w}$ e, quindi, alla retta r.
Se ora $P_1(x_1, y_1)$ è un generico punto del piano si ha che

$P_1 \in r \iff [(P_0P_1)]$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli $\iff [(P_0P_1)] \in W = \langle\mathbf{w}\rangle \iff$

$\iff \exists t_1 \in R : [(P_0P_1)] = t_1\mathbf{w} \iff \exists t_1 \in R : (x_1 - x_0 , y_1 - y_0) = t_1(l, m) \iff$

$$\iff \exists t_1 \in R : (x_1 - x_0 , y_1 - y_0) = (lt_1, mt_1) \iff \exists t_1 \in R : \begin{cases} x_1 - x_0 = lt_1 \\ y_1 - y_0 = mt_1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists t_1 \in R : \begin{cases} x_1 = lt_1 + x_0 \\ y_1 = mt_1 + y_0 \end{cases} \iff \text{la terna } (x_1, y_1; t_1) \text{ è una soluzione del sistema } \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases} \quad ■$$

21.7. Corollario. (*equazioni parametriche di una retta passante per due punti distinti*).

Siano $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ sono due punti **distinti** di una retta r. Poiché il vettore $[P_0P_1] \neq \mathbf{0}$ è parallelo alla retta r, per la retta r si hanno subito le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y = (y_1 - y_0)t + y_0 \end{cases}$$

21.8. Lemma. (*allineamento di tre punti*).

Siano $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ tre punti del piano.

$$P_1, P_2 \text{ e } P_3 \text{ sono allineati } \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \end{bmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Si ha che $\mathbf{u} = [P_1P_2] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $\mathbf{v} = [P_1P_3] = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$.

Sia $H = \begin{bmatrix} (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \end{bmatrix}$ la matrice avente come righe le componenti dei vettori **u** e **v**.

I tre punti P_1, P_2 e P_3 sono allineati $\Leftrightarrow$ i due vettori $\mathbf{u} = [P_1P_2]$ e $\mathbf{v} = [P_1P_3]$ e sono paralleli $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ i due vettori $\mathbf{u} = [P_1P_2]$ e $\mathbf{v} = [P_1P_3]$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le due righe di H sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ $rg(H) < 2$ $\Leftrightarrow$ $\det H = 0$. ■

21.9. Teorema. (*equazione cartesiana di una retta*)

Per ogni retta r del piano esiste un'equazione lineare del tipo (♥) $ax + by + c = 0$ nelle incognite (x, y) con $(a, b) \neq (0, 0)$ tale che un punto $P_3(x_3, y_3)$ del piano appartiene alla retta r se e solo se la coppia (x_3, y_3) è una soluzione dell'equazione (♥).

L'equazione $ax + by + c = 0$, che caratterizza i punti di r, si dice *equazione cartesiana della retta r*.

Inoltre, scriveremo brevemente "*la retta r : ax + by + c = 0*" invece che "*la retta r di equazione ax + by + c = 0*".

Dimostrazione. Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti **distinti** di r.

Sia $P_3(x_3, y_3)$ un punto del piano e sia H la matrice del Lemma 21.8. Il determinante di H è

$$\det H = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)$$

Ponendo $a := (y_2 - y_1)$ e $b : -(x_2 - x_1) = (x_1 - x_2)$ si ha che

$$\det H = a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) = ax_3 + by_3 + (- ax_1 - by_1)$$

Ponendo $c := -(ax_1 + by_1)$ si ha infine $\det H = ax_3 + by_3 + c$.

Poichè, per ipotesi, i punti P_1 e P_2 sono distinti si ha che il vettore libero $[P_1P_2] = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$ è non nullo. Quindi, $(a, b) \neq (0, 0)$. Ora, si osservi che

$P_3(x_3, y_3) \in r$ $\Leftrightarrow$ P_1, P_2 e P_3 sono allineati $\Leftrightarrow$ (per il Lemma 21.8) $\Leftrightarrow$ $\det H = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $ax_3 + by_3 + c = 0$ $\Leftrightarrow$ (x_3, y_3) è una soluzione di $ax + by + c = 0$. ■

21.10. Osservazione. (*equazione cartesiana di una retta passante per due punti distinti*)

Sia r la retta passante per i due punti **distinti** $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano.

L'equazione cartesiana di r è data da $\det\begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - x_1 \end{bmatrix} = 0$

21.11. Osservazione. Se $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ è l'equazione cartesiana di una retta r del piano, allora per ogni scalare α non nullo l'equazione $(\alpha a)x + (\alpha b)y + (\alpha c) = 0$ è equivalente (ha le stesse soluzioni) all'equazione $ax + by + c = 0$ e, quindi, è un'equazione cartesiana di r.

21.12. Osservazione. Siano r una retta, **u** un vettore libero non nullo e (OA) un rappresentante di **u**. Se il segmento orientato (OA) è perpendicolare alla retta r, allora ogni segmento orientato appartenente a **u** = [(OA)] è perpendicolare alla retta r.

Tenendo conto dell'Osservazione precedente è ben posta la seguente

21.13. Definizione. Diremo che un *vettore* libero non nullo **u** è *perpendicolare* ad una *retta* r se un (qualsiasi) rappresentante di **u** è perpendicolare ad r.

21.14 Teorema. (*significato dei coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di una retta*)

Se $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ è un'equazione cartesiana di una retta r, allora il vettore libero non nullo $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ è perpendicolare alla retta r.

Dimostrazione. Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono due punti <u>distinti</u> di r, allora si hanno le seguenti identità $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$. Inoltre, $[P_1P_2] = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$. Per cui

$$\mathbf{u} \bullet [P_1P_2] = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = (ax_2 + by_2) + (-ax_1 - by_1) = -c + c = 0$$

Da $\mathbf{u} \bullet [P_1P_2] = 0$ si ha che $\mathbf{u} \perp [P_1P_2]$. Siccome $[P_1P_2] /\!/ r$ abbiamo che $\mathbf{u} \perp r$. ■

21.15. Osservazione. Consideriamo un'equazione lineare $ax + by + c = 0$ nelle incognite (x, y). Sia G il *luogo* (cioè l'insieme di tutti e soli) dei punti Q del piano tali che coppia di coordinate (α, β) di Q sia una soluzione di tale equazione. Studiamo ora la "forma" di G. Se $(a, b) = (0, 0)$ e $c = 0$, allora per qualunque coppia (α, β) si ha che $a\alpha + b\beta + c = 0\alpha + 0\beta + 0 = 0$ per cui G è costituito da tutti i punti del piano, brevemente "G è il piano". Se $(a, b) = (0, 0)$ e $c \neq 0$, allora per ogni coppia (α, β) si ha che $a\alpha + b\beta + c = 0\alpha + 0\beta + c = c \neq 0$ per cui G è l'insieme vuoto.

Se $(a, b) \neq (0, 0)$ allora G è costituito da tutti e soli i punti di una retta come si vede nel seguente

21.16. Teorema. Per ogni equazione lineare del tipo $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ esiste ed è unica una retta r del piano tale che $ax + by + c = 0$ sia una sua equazione cartesiana.

Dimostrazione. Poiché $(a, b) \neq (0, 0)$, l'equazione lineare $ax + by + c = 0$ nella coppia di incognite (x, y) ha infinite soluzioni. Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due sue soluzioni distinte. Siano ora P_1 e P_2 gli unici due punti distinti del piano che hanno come coordinate rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e sia r l'unica retta passante per P_1 e P_2. Poiché (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono soluzioni di $ax + by + c = 0$ si hanno le seguenti identità $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$. Sottraendo membro a membro, si ha l'identità $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. Ovvero, posto $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, che $\mathbf{u} \perp [P_1P_2]$ e, quindi, $\mathbf{u} \perp r$. Inoltre, dalla prima identità si ha anche l'identità $c = -(ax_1 + by_1)$.
Se ora Q è un generico punto del piano di coordinate (α, β) allora si ha che
$Q \in r \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp [P_1Q] \Leftrightarrow a(\alpha - x_1) + b(\beta - y_1) = 0 \Leftrightarrow a\alpha + b\beta - (ax_1 + by_1) = 0 \Leftrightarrow a\alpha + b\beta + c = 0$
$\Leftrightarrow$ (α, β) è una soluzione di $ax + by + c = 0$. Per cui quest'ultima è un'equazione di r ■

21.17. Teorema. (*mutua posizione di due rette nel piano*)

Siano $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ due rette.

Ponendo $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ si ha che le due rette

1) sono la stessa retta $(r_1 \equiv r_2)$ $\Leftrightarrow$ $rgC = 1$

2) non hanno punti in comune $(r_1 \cap r_2 = \varnothing)$ $\Leftrightarrow$ $rgC = 2$ et $rgA = 1$

3) hanno un solo punto in comune $(r_1 \cap r_2 = \{P\})$ $\Leftrightarrow$ $rgA = 2$

Dimostrazione. Considerato il sistema lineare costituito dalle equazioni delle due rette si ha che A è la matrice incompleta (matrice dei coefficienti) del sistema mentre C è quella completa.

Da $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ e $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$ si ha che $rgA \geq 1$.

Poiché $1 \leq rgA \leq 2$ e $rgA \leq rgC \leq \min\{2, (1+rgA)\}$, i casi possibili sono:

I) $rgC = 1$ (quindi anche $rgA = 1$)

II) $rgC = 2$ et $rgA = 1$

III) $rgA = 2$ (quindi anche $rgC = 2$)

I) $rgC = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in R - \{0\} : (a_2, b_2, c_2) = \alpha(a_1, b_1, c_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le equazioni delle due rette differiscono per un fattore moltiplicativo non nullo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le due equazioni sono equivalenti $\Leftrightarrow$ le due rette sono la stessa retta.

Per cui è completamente provata la (1).

II) $rgA = 1 \neq 2 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema non ha soluzioni $\Leftrightarrow$ le due rette non hanno punti in comune.

Quindi, è completamente provata la (2).

III) $rgA = 2 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema è di Cramer $\Leftrightarrow$ il sistema ha una sola soluzione $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le due rette hanno un solo punto in comune

Quindi, è completamente provata anche la (3). ■

21.18. Corollario. (*condizione di parallelismo di due rette nel piano*).

Due rette $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sono parallele se e solo se esiste un numero reale non nullo α tale che $(a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1)$, ovvero $a_2 = \alpha a_1$ e $b_2 = \alpha b_1$.

Dimostrazione. Per il Teorema 21.14 si ha che due rette r_1 e r_2 sono parallele se e solo se rg$A = 1$, quindi, se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti ovvero sono proporzionali. ■

21.19. Definizione. Diremo *fascio (improprio) di rette parallele alla retta r* la totalità delle rette del piano parallele ad r. Col simbolo *$\varphi(r)$* indicheremo l'insieme delle equazioni delle rette appartenenti al fascio di rette parallele alla retta r.

21.20. Teorema. (*insieme delle equazioni di un fascio di rette parallele ad una retta r*)

Se $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ allora $\varphi(r_1) = \{a_1x + b_1y + t = 0 \mid t \in R\}$.

Dimostrazione. Sia $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ una generica retta del piano.

$r_2 \in \varphi(r_1) \Rightarrow r_2 // r_1 \Rightarrow$ (per il Corollario 21.15) $\Rightarrow \exists \alpha \in R-\{0\} : (a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 : \alpha a_1x + \alpha b_1y + c_2 = 0 \Rightarrow r_2 : a_1x + b_1y + (c_2/\alpha) = 0$.

Viceversa, se una retta r_2 ha un'equazione del tipo $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ allora (per il Corollario 21.15) la retta r_2 è parallela alla retta r_1 e, quindi, $r_2 \in \varphi(r)$. ■

21.21. Definizione. Sia P_0 un punto del piano. Diremo *fascio (proprio) di rette di centro P_0* la totalità delle rette "passanti" per il punto P_0. Col simbolo *$F(P_0)$* indicheremo l'insieme delle equazioni delle rette appartenenti al fascio di rette di centro P_0.

21.22. Teorema. (*insieme delle equazioni di un fascio di rette di centro P_0*)

Se $P_0(x_0, y_0)$ allora $F(P_0) = \{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \mid (a, b) \in R^2-\{(0, 0)\}\}$.

Dimostrazione. Sia $r : ax + by + c = 0$ una generica retta del piano π. Quindi, $(a, b) \neq (0, 0)$. La retta r appartiene al fascio di rette di centro P_0 se e solo se il punto P_0 appartiene alla retta r ovvero se e solo se vale l'identità seguente $ax_0 + by_0 + c = 0$ da cui l'identità $c = -(ax_0 + by_0)$. ■

Ora enunciamo un risultato (che non dimostreremo).

21.23. Teorema. Siano $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ due rette del piano.

Se r_1 e r_2 **non** sono parallele e se indichiamo con P_0 è il loro punto d'intersezione, allora si ha che

$$F(P_0) = \{\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \mid (\lambda, \mu) \in R^2-(0, 0)\}$$

Ovvero le equazioni delle rette di un fascio proprio si ottengono come combinazione lineare, a coefficienti non entrambe nulli, delle equazioni di due qualsiasi rette distinte del fascio.

21.24. <u>Ricordiamo che</u>

21.24.1 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} := \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ($\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ è il prodotto scalare dei due vettori liberi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$)

21.24.2 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

21.24.3 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$ (quindi $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}$)

21.24.4 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})/(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)$

21.24.5 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{u}} = |\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|/\|\mathbf{u}\|$ = lunghezza della proiezione di $\mathbf{v}$ lungo direzione di $\mathbf{u}$

21.24.6 $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ base ortonormale $\;\Rightarrow\; \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y$

21.24.7 $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ base ortonormale $\;\Rightarrow\; \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

21.24.8 $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ base ortonormale $\;\Rightarrow\; \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

21.25. Corollario. Sia r una retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$.

Una coppia $(l, m) \neq (0, 0)$ è una coppia di parametri direttori di r se e solo se $al + bm = 0$.

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} := l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$. Siccome $\mathbf{u} \perp$ r si ha che

$$\mathbf{v} \mathbin{/\!/} r \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; al + bm = 0. \quad \blacksquare$$

21.26. Lemma. (*condizioni di perpendicolarità fra due rette*)

Sia r una retta di equazione cartesiana $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e parametri direttori e (l_1, m_1).

Sia s una retta di equazione cartesiana $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ e parametri direttori e (l_2, m_2).

21.26.1. Le due rette r e s sono perpendicolari se e solo se $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

21.26.2. Le due rette r e s sono perpendicolari se e solo se $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{u}_r := a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_r := l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_s := a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_s := l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}$.

Tenendo conto che $\mathbf{u}_r \perp r$, $\mathbf{u}_s \perp s$, $\mathbf{v}_r \mathbin{/\!/} r$ e $\mathbf{v}_s \mathbin{/\!/} s$ si ha subito che:

1) $r \perp s \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}_r\bullet\mathbf{u}_s = 0 \;\Leftrightarrow\; a_1a_2 + b_1b_2 = 0$;

2) $r \perp s \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_r \perp \mathbf{v}_s \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_r\bullet\mathbf{v}_s = 0 \;\Leftrightarrow\; l_1l_2 + m_1m_2 = 0$. $\blacksquare$

Come immediata conseguenza del Lemma 21.26 e del Corollario 21.25 si ha subito il seguente:

21.27. Teorema. (*retta per un punto perpendicolare ad un'altra retta)*

Sia r una retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ e parametri direttori (l, m).

La retta s perpendicolare a r e passante per un punto $P_0(x_0, y_0)$ ha

equazione cartesiana $\quad l(x - x_0) + m(y - y_0) = 0 \quad$ ovvero $\quad b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$

equazioni parametriche $\quad \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases} \quad$ ovvero $\quad \begin{cases} x = -mt + x_0 \\ y = lt + y_0 \end{cases}$

21.28. Teorema. (*distanza fra due punti*)

Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sono due punti del piano, allora la loro distanza è data

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dimostrazione. Si ha che la distanza tra P_1 e P_2 è uguale alla lunghezza del vettore libero $[P_1P_2]$. Da $[P_1P_2] = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$ e tenendo conto di 21.24.7 si ha che

$$d(P_1, P_2) = \|[P_1P_2]\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \blacksquare$$

21.29. Teorema. (*distanza fra una retta e un punto*)

La distanza tra un punto $P_0(x_0, y_0)$ e una retta r di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ è data da

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dimostrazione. Sia A un punto (qualsiasi) della retta r. Si vede subito che la distanza tra P_0 e r è uguale alla lunghezza della proiezione del vettore libero $[AP_0]$ lungo la direzione perpendicolare a r.

Se utilizziamo il vettore libero non nullo $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ perpendicolare alla retta r per 21.24.5 si ha che

$$d(P_0, r) = \|[AP_0]\|_{\mathbf{u}} = |\mathbf{u}\bullet[AP_0]|/\|\mathbf{u}\|.$$

Dall'identità $ax_A + by_A + c = 0$ si ha che $c = -ax_A - by_A$. Per cui

$$\mathbf{u}\bullet[AP_0] = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) = ax_0 + by_0 + (-ax_A - by_A) = ax_0 + by_0 + c$$

Quindi, $d(P_0, r) = \|[AP_0]\|_{\mathbf{u}} = |\mathbf{u}\bullet[AP_0]|/\|\mathbf{u}\| = |ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$. $\blacksquare$

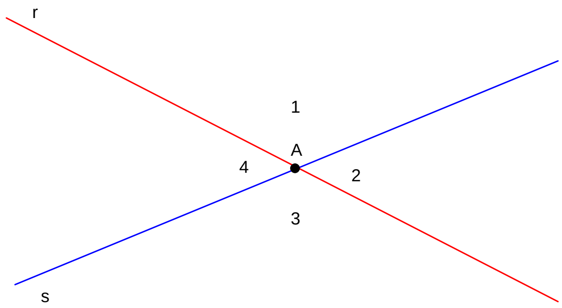
21.30. Corollario. (*distanza fra due rette parallele*)

Se r e s sono due rette parallele di equazioni rispettivamente $ax + by + c = 0$ e $\alpha ax + \alpha by + d = 0$ (dove ovviamente $\alpha \neq 0$), allora la distanza tra r e s è data da

$$d(r\ s) = \frac{|c - (d/\alpha)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dimostrazione. Si vede subito che la distanza tra r e s è uguale alla distanza tra r e un (qualsiasi) punto $P_0(x_0, y_0)$ della retta s. Per cui, $d(r\ s) = d(P_0, r) = |ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$. Dall'identità $\alpha ax_0 + \alpha by_0 + d = 0$ si ha che $ax_0 + by_0 = -d/\alpha$. Quindi, $d(r\ s) = |c - (d/\alpha)|/\sqrt{a^2 + b^2}$. $\blacksquare$

21.31. Osservazione. Due rette r e s **non** parallele dividono il piano in 4 angoli convessi.



Si noti che:

- angolo(1) = angolo(3) e angolo(2) = angolo(4) in quanto opposti al vertice A;

- angolo(1) + angolo(2) = angolo piatto = angolo(3) + angolo(4);

Quindi, cos(1) = cos(3), cos(2) = cos(4), cos(1) = – cos(2) e cos(3) = – cos(4).

21.32. Definizione. Siano r e s due rette del piano. Se r e s **non** sono parallele, allora diremo *angolo tra le rette r e s* ciascuno dei quattro angoli in cui il piano è diviso da r e s. Se r e s sono parallele, allora stabiliamo che gli angoli tra r e s siano l'angolo nullo e l'angolo piatto.

Un angolo tra due rette r e s lo indicheremo con il simbolo (r, s).

21.33. Osservazione. Se $\mathbf{v}_r = l_1\mathbf{i}+m_1\mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_s = l_2\mathbf{i}+m_2\mathbf{j}$ sono due vettori paralleli rispettivamente a due rette r e s, allora l'angolo tra i vettori $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ è uguale ad uno degli angoli formati da r e s.

Tenendo conto dell'Osservazione 21.33 e di 21.24.8 si ha il seguente:

21.34. Teorema. Se r e s sono due rette di parametri direttori rispettivamente (l_1, m_1) e (l_2, m_2) si ha

$$\cos(r, s) = \pm \cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

21.35. Osservazione. Se $\mathbf{u}_r = a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}$ e $\mathbf{u}_s = a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$ sono due vettori perpendicolari rispettivamente a due rette r e s, allora l'angolo tra i vettori $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$ è uguale ad uno degli angoli formati da r e s.

Tenendo conto dell'Osservazione 21.35 e di 21.24.8 si ha il seguente:

21.36. Teorema. Se r e s sono due rette di equazioni $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ allora

$$\cos(r, s) = \pm \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$