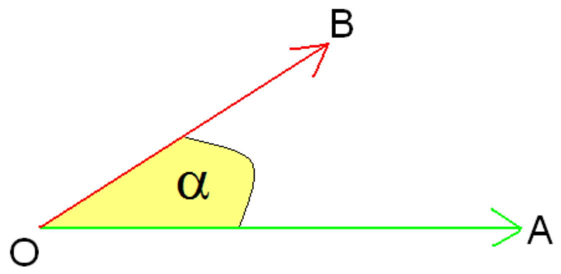
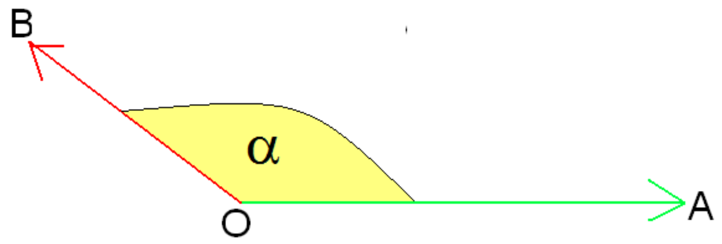
Tre prodotti coi vettori liberi.

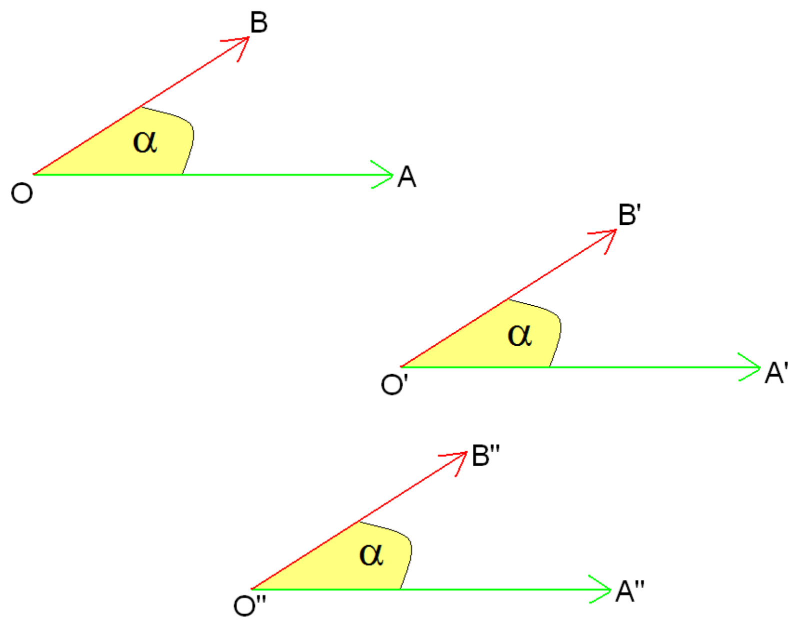
PS.1. Definizione. Siano **u** e **v** due vettori liberi <u>non nulli</u>. Sia O un punto qualsiasi dello spazio. Sia A l'unico punto dello spazio tale che [OA] = **u**. Sia B l'unico punto dello spazio tale che [OB] = **v**. Sia *r* la semiretta uscente dal punto O e passante per il punto A e sia *s* la semiretta uscente dal punto O e passante per il punto B. Sia α l'angolo ***convesso*** individuato dalle due semirette *r* e *s*.

Diremo che α è l'***angolo tra i due vettori*** **u** e **v** e lo indicheremo col simbolo $\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}$.





PS.2. Osservazione. Si noti che la definizione precedente è ben posta ovvero non dipende dalla scelta del punto O. Infatti, cambiando il punto O si ottengono angoli tra loro congruenti.



PS.3. Definizione. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi. Diremo ***prodotto scalare*** di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e lo indicheremo col simbolo $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ il numero reale così definito

- se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vel $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} := 0$

- se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} := ||\mathbf{u}||*||\mathbf{v}||*\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$

dove qui col simbolo $||\mathbf{u}||$ indichiamo la lunghezza (o modulo) del vettore $\mathbf{u}$ e col simbolo * indichiamo l'operazione di prodotto di due numeri reali.

PS.4. Prime proprietà del prodotto scalare. Dalla definizione si ha subito che:

(a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$ (*proprietà commutativa*)

(b) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vel $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vel $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ (ovvero se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali tra loro)

(c) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2 \geq 0$ e quindi $||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$

(d) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

PS.5. Definizione. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Sia A l'unico punto dello spazio tale che $[OA] = \mathbf{u}$. Sia r la retta passante per i due punti distinti O e A. Sia B l'unico punto dello spazio tale che $[OB] = \mathbf{v}$. Sia H la proiezione ortogonale del punto B sulla retta r. Il vettore libero $\mathbf{v_u} := [OH]$ viene detto ***proiezione ortogonale*** del vettore $\mathbf{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\mathbf{u}$.

Si osservi che se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, allora H = O. Tenendo conto di ciò abbiamo il seguente

PS.6. Corollario. Sia $\mathbf{u}$ un vettore libero non nullo. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, allora $\mathbf{v_u} = \mathbf{0}$.

PS.7. Teoerema. (***significato geometrico del valore assoluto del prodotto scalare***).

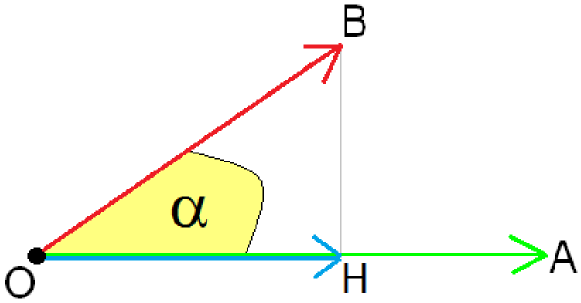
Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Il valore assoluto del prodotto scalare $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ è uguale al prodotto della lunghezza del vettore $\mathbf{u}$ per la lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v}$ lungo la direzione individuata dal vettore $\mathbf{u}$ ovvero

$$|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| = ||\mathbf{u}||*||\mathbf{v_u}||.$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, allora per PS.4.(b) si ha che $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$. Inoltre, per PS.6 si ha che $\mathbf{v_u} = \mathbf{0}$. Tenendo conto di ciò si ha che $|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| = |0| = 0 = ||\mathbf{u}||*0 = ||\mathbf{u}||*||\mathbf{0}|| = ||\mathbf{u}||*||\mathbf{v_u}||$.

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono ortogonali tra loro, allora poniamo $\alpha := \widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}$.

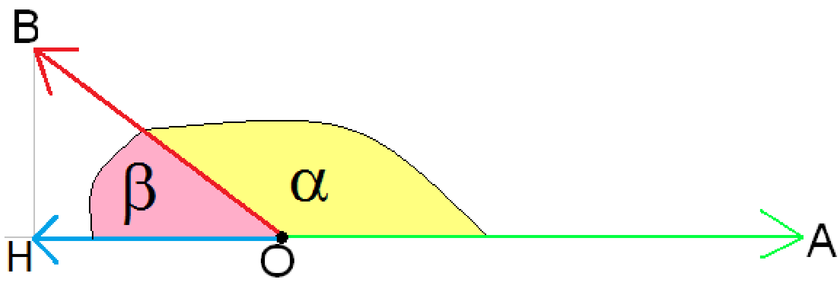
Se (come nella figura qui sotto) angolo nullo $\leq \alpha <$ angolo retto



allora $\cos(\alpha) > 0$ e quindi $|\cos(\alpha)| = \cos(\alpha)$. Tenendo conto di ciò si ha che

$$\|\mathbf{v}\|*|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})| = OB*|\cos(\alpha)| = OB*\cos(\alpha) = OH = \|\mathbf{v}_{\mathbf{u}}\|$$

Se, invece (come nella figura) angolo retto $< \alpha \leq$ angolo piatto



allora $\cos(\alpha) < 0$ e quindi $|\cos(\alpha)| = -\cos(\alpha) = \cos(\beta)$. Tenendo conto di ciò si ha che

$$\|\mathbf{v}\|*|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})| = OB*|\cos(\alpha)| = OB*[-\cos(\alpha)] = OB*\cos(\beta) = OH = \|\mathbf{v}_{\mathbf{u}}\|$$

Quindi, in ogni caso abbiamo che $\|\mathbf{v}\|*|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})| = \|\mathbf{v}_{\mathbf{u}}\|$.

A questo punto si ha che $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}| = |\,[\|\mathbf{u}\|*\|\mathbf{v}\|*\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})]\,| = \|\mathbf{u}\|*\|\mathbf{v}\|*|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})| = \|\mathbf{u}\|*\|\mathbf{v}_{\mathbf{u}}\|$ ■

PS.8. Corollario. Se **u** e **v** sono due vettori liberi non nulli, allora

$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{u}}\| = \|\mathbf{v}\|*|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})| = |\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|/\|\mathbf{u}\|;$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})/(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|).$$

PS.9. Altre proprietà del prodotto scalare. Siano **u**, **v** e **w** tre vettori liberi e α un numero reale. Si può provare che

(e) $\alpha*(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}) = (\alpha\times\mathbf{u})\bullet\mathbf{v} = \mathbf{u}\bullet(\alpha\times\mathbf{v})$ (*passeggio dello scalare*)

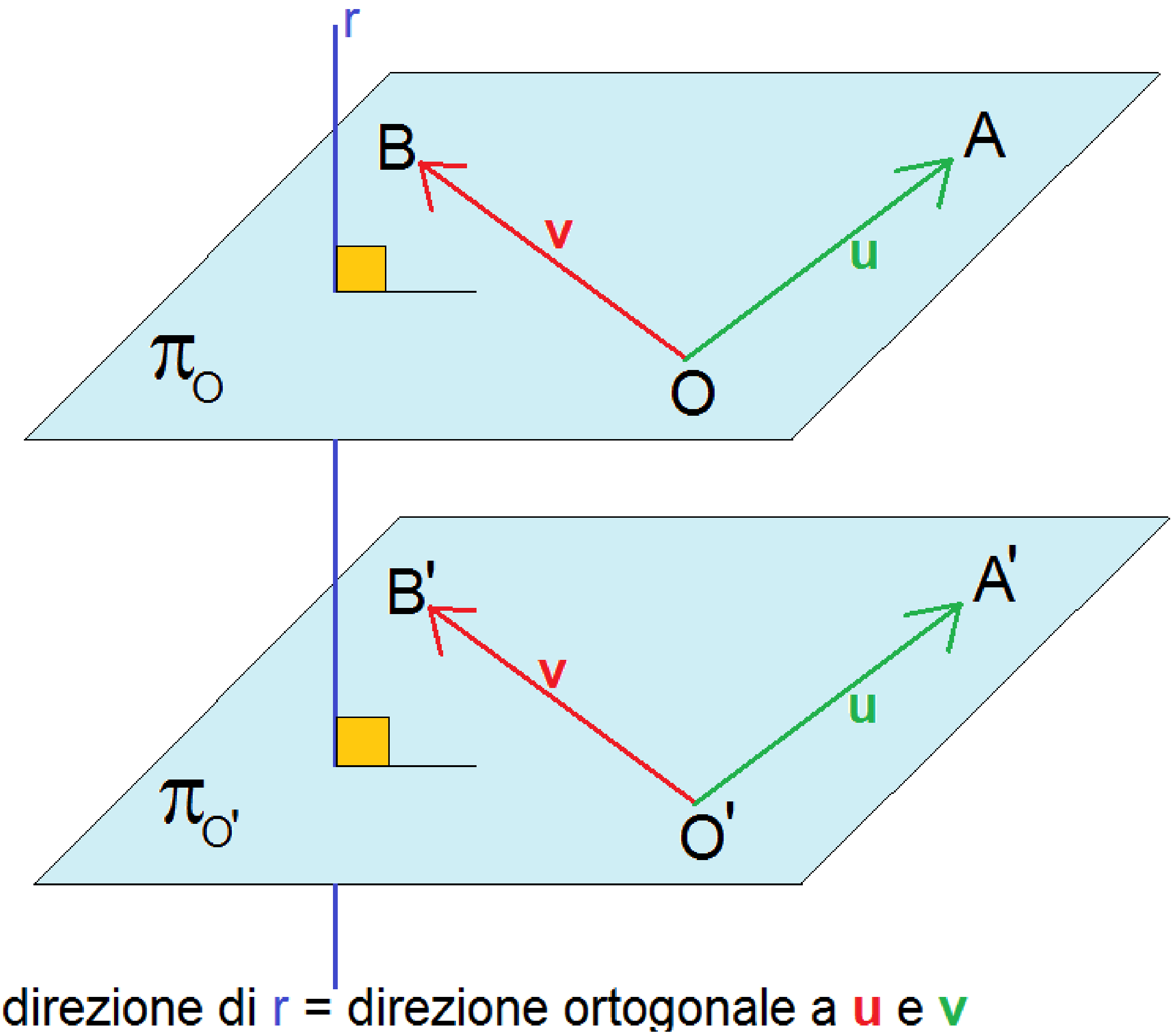
dove qui il simbolo × denota il prodotto di uno scalare per un vettore

(f) $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})\bullet\mathbf{w} = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}) + (\mathbf{v}\bullet\mathbf{w})$ (*proprietà distributiva rispetto alla somma tra vettori*)

dove ⊕ è una somma tra due vettori liberi mentre + è una somma tra due numeri reali.

PV.1. Definizione. Siano $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ due vettori liberi non paralleli. Sia O un punto qualsiasi dello spazio. Sia A l'unico punto dello spazio tale che $[OA] = \mathbf{u}$. Sia B l'unico punto dello spazio tale che $[OB] = \mathbf{v}$. Siccome **u** e **v** non sono paralleli, esiste un unico piano che contiene i tre punti O, A e B. Denotiamo col simbolo $\pi_O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tale piano. Diremo ***direzione ortogonale ai due vettori*** **u** e **v** la direzione di una qualsiasi retta ortogonale al piano $\pi_O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

PV.2. Osservazione. Si noti che la definizione precedente è ben posta ovvero non dipende dalla scelta del punto O. Infatti, per ogni punto O' diverso da O, il piano $\pi_{O'}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è parallelo al piano $\pi_O(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Quindi, una retta r è ortogonale al primo piano se e solo se è ortogonale al secondo piano.



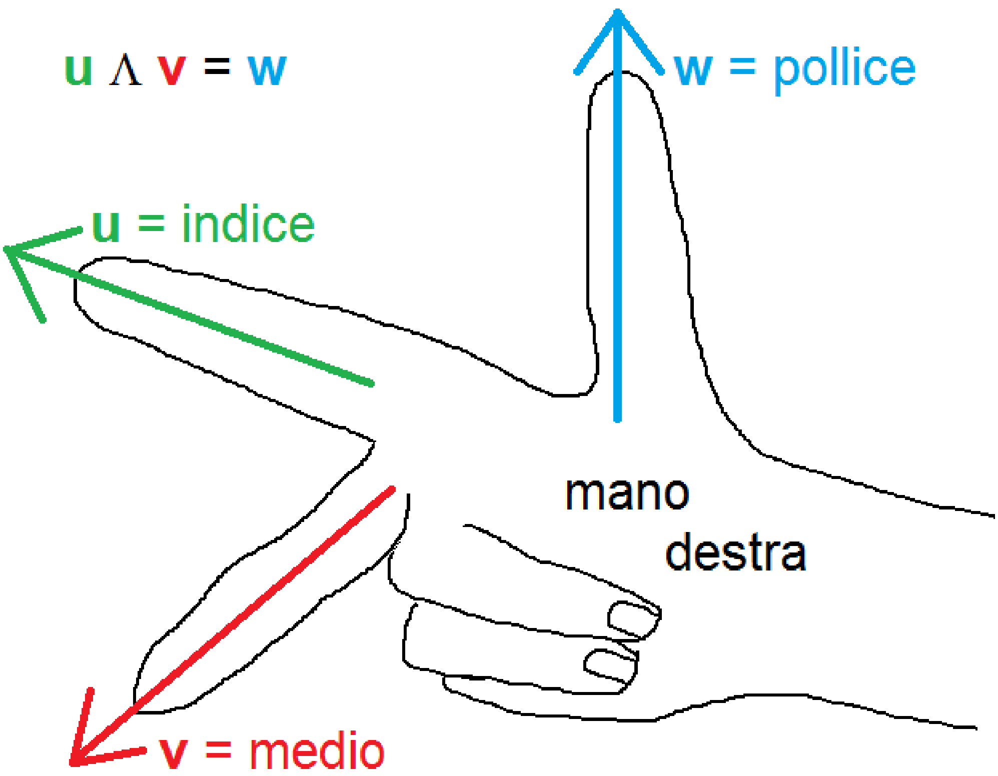
PV.3. Definizione. Diremo ***prodotto vettoriale*** di due vettori liberi **u** e **v** (<u>in quest'ordine</u>) e lo indicheremo col simbolo $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ il vettore libero così definito

- se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vel $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vel **u** e **v** sono paralleli allora $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} := \mathbf{0}$
- se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ et **u** e **v** non sono paralleli allora $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} := \mathbf{w}$ dove

lunghezza di $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| := \|\mathbf{u}\|*\|\mathbf{v}\|*\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$

direzione di **w** := direzione ortogonale ai due vettori **u** e **v**

verso di **w** := verso stabilito con la regola della mano destra



PV.4. Osservazione. Se **u** e **v** sono due vettori <u>non nulli</u>, allora $\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) \geq 0$. Inoltre, $\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = 0$ se e solo $\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ = angolo nullo oppure $\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ = angolo piatto ovvero se e solo se **u** e **v** sono paralleli.

Quindi, se **u** e **v** sono due vettori <u>non nulli</u> e <u>non paralleli</u>, allora $\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| > 0$ da cui $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Tenendo conto dalla definizione di prodotto vettoriale e dall'osservazione precedente si provano facilmente le seguenti

PV.5. Prime proprietà del prodotto vettoriale.

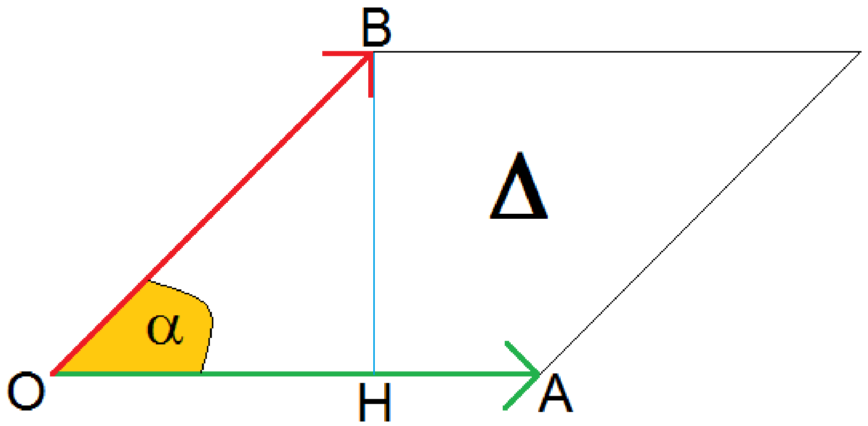
(a) $\mathbf{v}\wedge\mathbf{u} = -\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ (*proprietà anticommutativa*)

(b) $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vel $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vel $\mathbf{u} \,//\, \mathbf{v}$ (ovvero se e solo se **u** e **v** sono paralleli tra loro)

PV.6. Teorema. (***significato geometrico del modulo del prodotto vettoriale***).

Siano **u** e **v** due vettori liberi. Sia O un punto dello spazio. Sia A l'unico punto dello spazio tale che [OA] = **u**. Sia B l'unico punto dello spazio tale che [OB] = **v**. Sia Δ il parallelogrammo avente O come uno dei suoi quattro vertici e i segmenti OA e OB come i due lati uscenti da O. Si ha che

$$\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| = \text{area del parallelogrammo } \Delta$$



Dimostrazione. Se **u** = **0** vel **v** = **0** vel **u** // **v** allora per PV.5.(b) si ha che $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Inoltre, in questo caso l'area del parallelogrammo Δ è ovviamente nulla. Quindi, $\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| = \|\mathbf{0}\| = 0$ = area Δ.

Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sono due vettori liberi non paralleli (come nella figura sopra), indichiamo con H la proiezione ortogonale del punto B sull'unica retta passante per i due punti distinti O e A. Il triangolo OHB è rettangolo in H e quindi OB*sin(α) = BH. Inoltre, l'area del parallelogrammo Δ è uguale al prodotto di OA (lunghezza della base) per BH (lunghezza dell'altezza).

Infine, si ha che $\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|*\|\mathbf{v}\|*\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = OA*OB*\sin(\alpha) = OA*BH = \text{area } \Delta$. ■

PV.7. Altre proprietà del prodotto vettoriale. Siano **u**, **v** e **w** tre vettori liberi e α un numero reale. Si può provare che

(c) $\alpha\times(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = (\alpha\times\mathbf{u})\wedge\mathbf{v} = \mathbf{u}\wedge(\alpha\times\mathbf{v})$ (*passeggio dello scalare*)

dove qui il simbolo $\times$ denota il prodotto di uno scalare per un vettore

(d) $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})\wedge\mathbf{w} = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}) \oplus (\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$ (*distributività destra rispetto alla somma tra vettori*)

dove qui il simbolo $\oplus$ denota la somma tra due vettori liberi.

Inoltre, tenendo conto di PV.5.(a) e PV.7.(d) si ha che

$$\mathbf{w}\wedge(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = -[(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})\wedge\mathbf{w}] = -[(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}) \oplus (\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})] = [-(\mathbf{u}\wedge\mathbf{w})] \oplus [-(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})] = (\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}) \oplus (\mathbf{w}\wedge\mathbf{v})$$

Ovvero vale anche la seguente proprietà

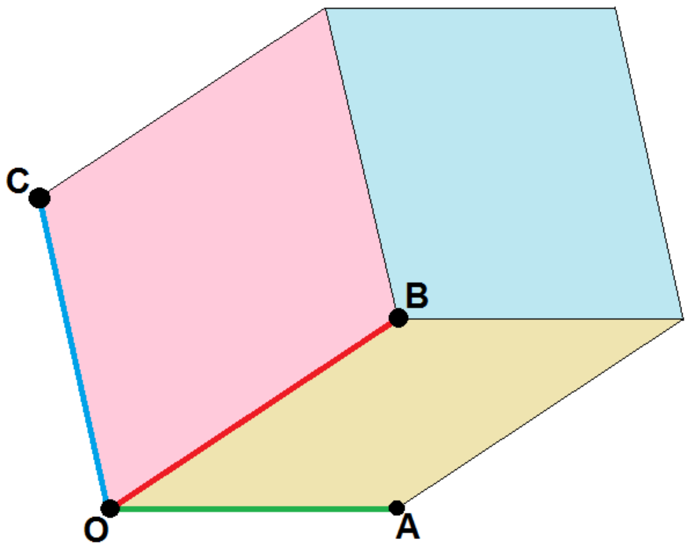
(e) $\mathbf{w}\wedge(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}) \oplus (\mathbf{w}\wedge\mathbf{v})$ (*distributività sinistra rispetto alla somma tra vettori*)

PM.1. Osservazione. Siano **u**, **v** e **w** tre vettori liberi. Siccome il prodotto scalare **v•w** è un numero reale e ∧ è un'operazione tra due vettori liberi, la scrittura **u**∧(**v•w**) non ha senso. Quindi, la scrittura **u**∧**v•w** può essere interpretata solo come (**u**∧**v**)•**w**.

PM.2. Definizione. Diremo ***prodotto misto*** di tre vettori liberi **u**, **v** e **w** il numero reale

u∧**v•w**

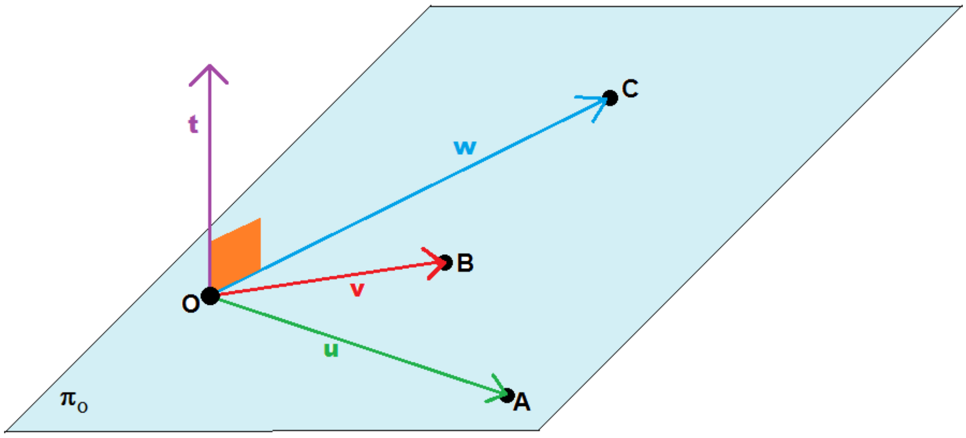
PM.3. Osservazione. Sia Ω un parallelepipedo e sia O uno dei suoi otto vertici. Siano OA, OB e OC i tre spigoli di Ω uscenti dal vertice O. E' facile rendersi conto che il volume di Ω è uguale a zero se e solo se i quattro punti O, A, B e C sono complanari.



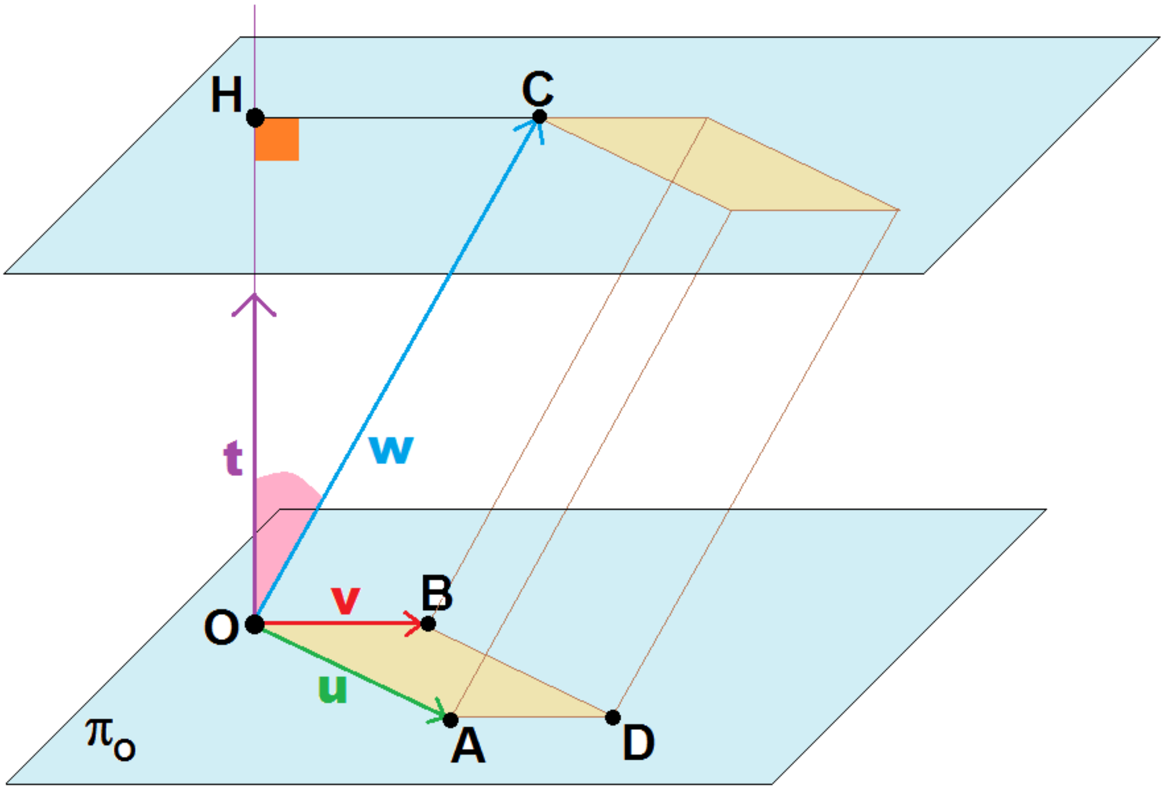
PM.4. Teorema. (***significato geometrico del valore assoluto del prodotto misto***).
Siano **u**, **v** e **w** tre vettori liberi. Sia O un punto qualsiasi dello spazio. Sia A l'unico punto dello spazio tale che [OA] = **u**. Sia B l'unico punto dello spazio tale che [OB] = **v**. Sia C l'unico punto dello spazio tale che [OC] = **w**. Sia Ω il parallelepipedo avente il punto O come uno dei vertici e i segmenti OA, OB e OC come i tre spigoli uscenti dal vertice O. Si ha che

|**u**∧**v•w**| = volume del parallelepipedo Ω

Dimostrazione. Se (come nella figura qui sotto) i tre vettori **u**, **v** e **w** sono complanari, allora i quattro punti O, A B e C sono complanari e, quindi, per PM.3 volume di $\Omega = 0$. Se poniamo **t** := **u**$\wedge$**v** si ha, per definizione, che il vettore **t** è ortogonale al piano π_O e quindi **t** $\perp$ **w**. Per cui **t**•**w** = 0. Infine, si ha che |**u**$\wedge$**v**•**w**| = |**t**•**w**| = |0| = 0 = volume di Ω.



Siano infine **u**, **v** e **w** tre vettori liberi non complanari (come nella figura qui sotto).



Se poniamo **t** := **u**$\wedge$**v** si ha, per definizione, che il vettore **t** è ortogonale al piano π_O. Per PV.6 il modulo di **t** è uguale all'area del parallelogrammo OABD ovvero ||**t**|| = ||**u**$\wedge$**v**|| = area OABD. Si vede subito che l'altezza OH del parallelepipedo Ω è uguale alla lunghezza della proiezione ortogonale del vettore **w** lungo la direzione individuata dal vettore **t** ovvero OH = ||$\mathbf{w}_t$||. Per PS.7 si ha che |**t**•**w**| = ||**t**||*||$\mathbf{w}_t$||. Infine, abbiamo che

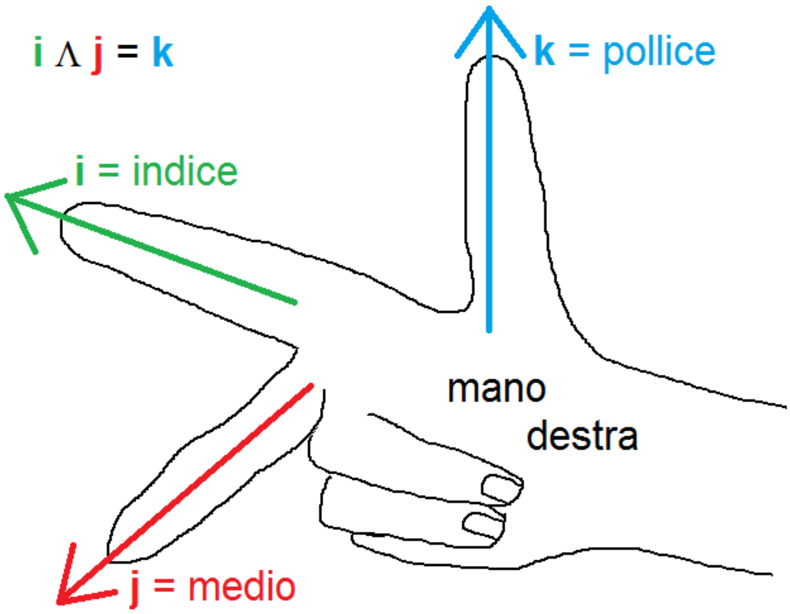
|**u**$\wedge$**v**•**w**| = |**t**•**w**| = ||**t**||*||$\mathbf{w}_t$|| = (area OABD)*(altezza OH) = volume di Ω. ■

BO.1. Osservazione. Ricordiamo che una terna ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) ordinata di vettori liberi è una base dello spazio vettoriale dei vettori liberi se e solo se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono complanari.

BO.2. Definizione. Diremo ***base ortonormale*** dello spazio dei vettori liberi una base ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) tale che i tre vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono versori (ovvero $||\mathbf{i}|| = ||\mathbf{j}|| = ||\mathbf{k}|| = 1$) a due a due ortogonali tra loro (ovvero $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \perp \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \perp \mathbf{k}$).

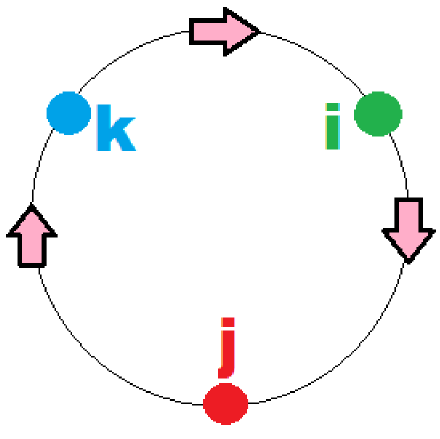
BO.3. Osservazione. Se ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) è una base ortonormale, allora per definizione il vettore $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$ è ortogonale sia a $\mathbf{i}$ che a $\mathbf{j}$ ovvero $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} \,//\, \mathbf{k}$. Inoltre, $||\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}|| = ||\mathbf{i}||*||\mathbf{j}||*\sin(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1*1*1 = 1$. Quindi, il vettore $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$ è un versore. Quindi, si ha che $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}$ oppure $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = -\mathbf{k}$.

BO.4. Lemma. Sia ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) una base <u>ortonormale</u> dello spazio dei vettori liberi tale che $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}$.



Si prova facilmente che

1) $\mathbf{i}\bullet\mathbf{i} = \mathbf{j}\bullet\mathbf{j} = \mathbf{k}\bullet\mathbf{k} = 1$
2) $\mathbf{i}\bullet\mathbf{j} = \mathbf{j}\bullet\mathbf{k} = \mathbf{k}\bullet\mathbf{i} = 0$
3) $\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{0}$
4) $\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}$

	$\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}$	$\mathbf{j}\wedge\mathbf{i} = -\mathbf{k}$ $\mathbf{k}\wedge\mathbf{j} = -\mathbf{i}$ $\mathbf{i}\wedge\mathbf{k} = -\mathbf{j}$

BO.5. Teorema. Sia (**i**, **j**, **k**) una base ortonormale dello spazio dei vettori liberi tale che $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}$. Siano **u** e **v** due vettori liberi. Se (u_1, u_2, u_3) è l'unica terna ordinata di numeri reali tali che $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ e (v_1, v_2, v_3) è l'unica terna ordinata di numeri reali tali che $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ allora si ha che

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Dimostrazione. Utilizzando le proprietà del prodotto scalare e il lemma **BO.4** otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k})\bullet(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = (u_1\mathbf{i})\bullet(v_1\mathbf{i}) + (u_1\mathbf{i})\bullet(v_2\mathbf{j}) + (u_1\mathbf{i})\bullet(v_3\mathbf{k}) + \\
&+ (u_2\mathbf{i})\bullet(v_1\mathbf{i}) + (u_2\mathbf{i})\bullet(v_2\mathbf{j}) + (u_2\mathbf{i})\bullet(v_3\mathbf{k}) + (u_3\mathbf{i})\bullet(v_1\mathbf{i}) + (u_3\mathbf{i})\bullet(v_2\mathbf{j}) + (u_3\mathbf{i})\bullet(v_3\mathbf{k}) = \\
&= u_1v_1(\mathbf{i}\bullet\mathbf{i}) + u_1v_2(\mathbf{i}\bullet\mathbf{j}) + u_1v_3(\mathbf{i}\bullet\mathbf{k}) + u_2v_1(\mathbf{j}\bullet\mathbf{i}) + u_2v_2(\mathbf{j}\bullet\mathbf{j}) + u_3v_3(\mathbf{j}\bullet\mathbf{k}) + \\
&+ u_3v_1(\mathbf{k}\bullet\mathbf{i}) + u_3v_2(\mathbf{k}\bullet\mathbf{j}) + u_3v_3(\mathbf{k}\bullet\mathbf{k}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3
\end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà del prodotto vettoriale e il lemma **BO.4** otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k})\wedge(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = (u_1\mathbf{i})\wedge(v_1\mathbf{i}) + (u_1\mathbf{i})\wedge(v_2\mathbf{j}) + (u_1\mathbf{i})\wedge(v_3\mathbf{k}) + \\
&+ (u_2\mathbf{i})\wedge(v_1\mathbf{i}) + (u_2\mathbf{i})\wedge(v_2\mathbf{j}) + (u_2\mathbf{i})\wedge(v_3\mathbf{k}) + (u_3\mathbf{i})\wedge(v_1\mathbf{i}) + (u_3\mathbf{i})\wedge(v_2\mathbf{j}) + (u_3\mathbf{i})\wedge(v_3\mathbf{k}) = \\
&= u_1v_1(\mathbf{i}\wedge\mathbf{i}) + u_1v_2(\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}) + u_1v_3(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) + u_2v_1(\mathbf{j}\wedge\mathbf{i}) + u_2v_2(\mathbf{j}\wedge\mathbf{j}) + u_2v_3(\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}) + \\
&+ u_3v_1(\mathbf{k}\wedge\mathbf{i}) + u_3v_2(\mathbf{k}\wedge\mathbf{j}) + u_3v_3(\mathbf{k}\wedge\mathbf{k}) = u_1v_1\mathbf{0} + u_1v_2\mathbf{k} + u_1v_3(-\mathbf{j}) + \\
&+ u_2v_1(-\mathbf{k}) + u_2v_2\mathbf{0} + u_2v_3\mathbf{i} + u_3v_1\mathbf{j} + u_3v_2(-\mathbf{i}) + u_3v_3\mathbf{0} = \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Come immediata conseguenza del teorema precedente si ha il seguente

BO.6. Corollario. Sia (**i**, **j**, **k**) una base ortonormale dello spazio vettoriale dei vettori liberi. Siano **u**, **v** e **w** tre vettori liberi. Sia (u_1, u_2, u_3) l'unica terna ordinata di numeri reali tali che $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$. Sia (v_1, v_2, v_3) l'unica terna ordinata di numeri reali tali che $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Sia (w_1, w_2, w_3) l'unica terna ordinata di numeri reali tali che $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$. Allora si ha che

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3$$

Possiamo ricordare il prodotto vettoriale e il prodotto misto nel modo seguente:

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = \det\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Infatti, si ha che

$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} =$

$$= \mathbf{i}(u_2v_3 - v_2u_3) - \mathbf{j}(u_1v_3 - v_1u_3) + \mathbf{k}(u_1v_2 - v_1u_2) = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

e che

$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3 =$

$$= w_1(u_2v_3 - v_2u_3) - w_2(u_1v_3 - v_1u_3) + w_3(u_1v_2 - v_1u_2) = \det\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Osservazione. Siano **u**, **v** e **w** tre vettori liberi.

1) Siccome il prodotto scalare $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ è un numero reale e $\bullet$ è un'operazione tra due vettori liberi, la scrittura $(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}$ **non** ha senso. Quindi, <u>non ha senso chiedersi</u> se per il prodotto scalare di due vettori liberi valga la proprietà associativa.
2) Siccome il prodotto vettoriale $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è un vettore libero e $\wedge$ è un'operazione tra due vettori liberi, la scrittura $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}$ ha senso. Quindi, <u>ha senso chiedersi</u> se per il prodotto vettoriale di due vettori liberi valga la proprietà associativa ovvero ha senso chiedersi se
   per ogni terna di vettori liberi **u**, **v** e **w** si ha che $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w} = \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$ **??????**
3) Il prodotto vettoriale <u>**NON**</u> gode della **proprietà associativa**
   ovvero esiste almeno una terna di vettori liberi per i quali si ha che $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w} \neq \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$.
   Ad esempio prendendo $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ si ha che
   $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w} = (\mathbf{i}\wedge\mathbf{j})\wedge(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}) = \mathbf{k}\wedge(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}) = 2(\mathbf{k}\wedge\mathbf{i})+3(\mathbf{k}\wedge\mathbf{j}) = 2\mathbf{j}+3(-\mathbf{i}) = 2\mathbf{j}-3\mathbf{i}$
   $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = \mathbf{i}\wedge[\mathbf{j}\wedge(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})] = \mathbf{i}\wedge[2(\mathbf{j}\wedge\mathbf{i})+3(\mathbf{j}\wedge\mathbf{j})] = \mathbf{i}\wedge[2(-\mathbf{k})] = -2(\mathbf{i}\wedge\mathbf{k}) = -2(-\mathbf{j}) = 2\mathbf{j}$