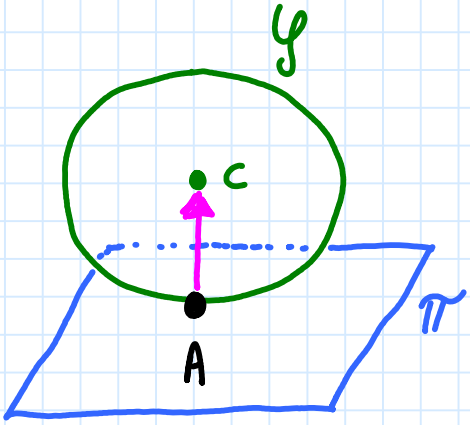
Esercizi su sfera e circonferenza nello spazio

Titolo nota 10/12/2020

8.4. Esercizio. Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $A(\frac{1}{2}, 1, 2\sqrt{3})$ alla sfera

$$\mathcal{S}: \ 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 48x - 16y - 13 = 0$$

$$\mathcal{S}: \ x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y - \frac{13}{4} = 0$$



$$C\left(-\frac{-12}{2}, -\frac{-4}{2}, -\frac{0}{2}\right) = (6, 2, 0)$$

$$[\vec{AC}] = \left(6 - \frac{1}{2}, 2 - 1, 0 - 2\sqrt{3}\right)$$

$$[\vec{AC}] = \left(\frac{11}{2}, 1, -2\sqrt{3}\right)$$

$$\pi \in S(A): \ a \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + b \cdot (y - 1) + c \cdot \left(z - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

con $(a, b, c) \perp \pi$

siccome $[\vec{AC}] \perp \pi$ prendo $(a, b, c) = \left(\frac{11}{2}, 1, -2\sqrt{3}\right)$

$$\frac{11}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \cdot (y - 1) - 2\sqrt{3} \cdot \left(z - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\frac{11}{2} x - \frac{11}{4} + y - 1 - 2\sqrt{3} \cdot z + 12 = 0$$

$$11 \cdot x + 4 \cdot y - 8\sqrt{3} \cdot z - 11 - 4 + 48 = 0$$

$$\pi: \ 11x + 4y - 8\sqrt{3} \cdot z + 33 = 0$$

8.5. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera di centro C(1, 0, –2) e raggio R = 1.

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + [z - (-2)]^2 = 1^2$$

$$\mathcal{S}: \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 4 = 0$$

8.6. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera di centro C(–2, 1, 3) e passante per l'origine .

$$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$O(0,0,0) \in \mathcal{S} \Rightarrow d=0$$

$$C(-2,1,3) \Rightarrow -2=\frac{-a}{2};\ 1=\frac{-b}{2};\ 3=\frac{-c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=4;\ b=-2;\ c=-6$$

$$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z=0$$

8.7. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per i quattro punti A(0, 0, 1), B(1, –1, 1), C(–1, 2, 0) e D(2, 1, –1).

$$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$A(0,0,1) \in \mathcal{S} \Rightarrow 0^2+0^2+1^2+a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0 \quad (1)$$

$$B(1,-1,1) \in \mathcal{S} \Rightarrow 1^2+(-1)^2+1^2+a\cdot 1+b(-1)+c\cdot 1+d=0 \quad (2)$$

$$C(-1,2,0) \in \mathcal{S} \Rightarrow (-1)^2+2^2+0^2+a(-1)+b\cdot 2+c\cdot 0+d=0 \quad (3)$$

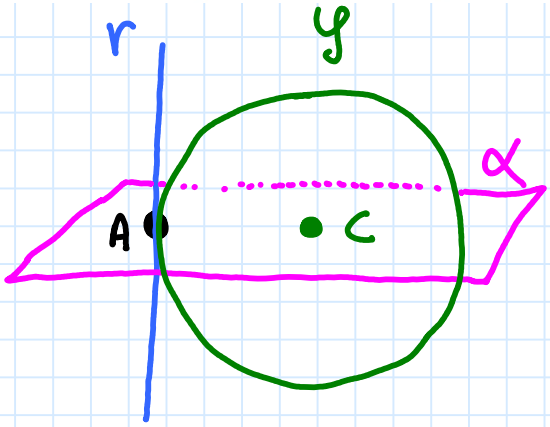
$$D(2,1,-1) \in \mathcal{S} \Rightarrow 2^2+1^2+(-1)^2+a\cdot 2+b\cdot 1+c(-1)+d=0 \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} c+d+1=0 \\ a-b+c+d+3=0 \\ -a+2b+d+5=0 \\ 2a+b-c+d+6=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=-1-c \\ a-b+2=0 \\ -a+2b-c+4=0 \\ 2a+b-2c+5=0 \end{cases}$$

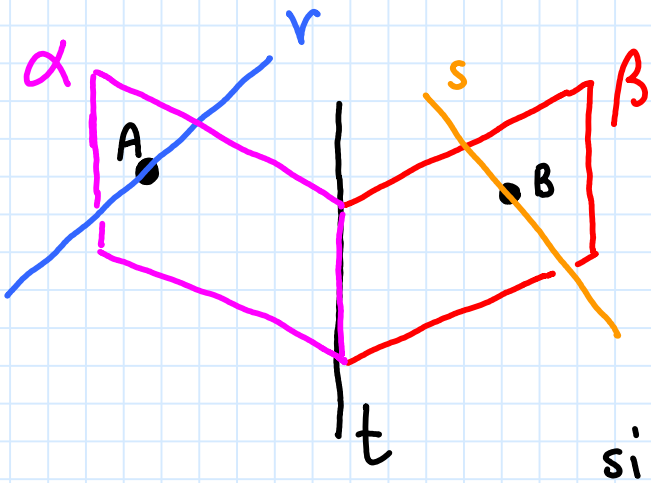
$$\begin{cases} d=-1-c \\ a=b-2 \\ b-c+6=0 \\ 3b-2c+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=-1-c \\ a=b-2 \\ b=c-6 \\ c-17=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=17 \\ d=-18 \\ b=11 \\ a=9 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2+9x+11y+17z-18=0$$

8.9. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente all'asse X nel punto A(2, 0, 0) e tangente alla retta $x - z + 1 = y - 2z + 1 = 0$ nel punto B(–1, –1, 0).



Osservazione: se la retta r è tangente ad una sfera $\mathcal{S}$ nel punto A, allora il piano α passante per A e perpendicolare a r contiene il centro C della sfera



Per lo stesso motivo il centro C della sfera appartiene al piano β

Quindi, il centro C si trova sulla retta $t = \alpha \cap \beta$

r = asse X ; $A(2,0,0) \in r \Rightarrow \alpha : x-2=0$

$s : x-z+1 = y-2z+1$; $B(-1,-1,0)$

$$s : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \nearrow l = +1 \\ \rightarrow m = -(-2) = +2 \\ \searrow n = +1 \end{array}$$

$(1,2,1) // r \Rightarrow (1,2,1) \perp \beta$

$\beta : 1\cdot x + 2\cdot y + 1\cdot z + d = 0$; $B \in \beta \Rightarrow 1(-1)+2(-1)+1\cdot 0+d=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = +3$

$\beta : x+2y+z+3=0$

$$t = \alpha \cap \beta : \quad x-2 = x+2y+z+3 = 0$$

$$x=2 \Rightarrow 2+2y+z+3=0 \Rightarrow z=-2y-5$$

$$C \in t \Rightarrow C(2, y, -2y-5)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(2,0,0) \in \mathcal{S} \\ B(-1,-1,0) \in \mathcal{S} \end{array}\right| \Leftrightarrow d(A,C) = d(B,C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [d(A,C)]^2 = [d(B,C)]^2$$

$$\cancel{(2-2)^2} + (y-0)^2 + \cancel{(-2y-5-0)^2} = (2-(-1))^2 + (y-(-1))^2 + \cancel{(-2y-5-0)^2}$$

$$\cancel{y^2} = 9 + \cancel{y^2} + 1 + 2y \quad ; \quad 2y+10=0 \quad ; \quad y=-5$$

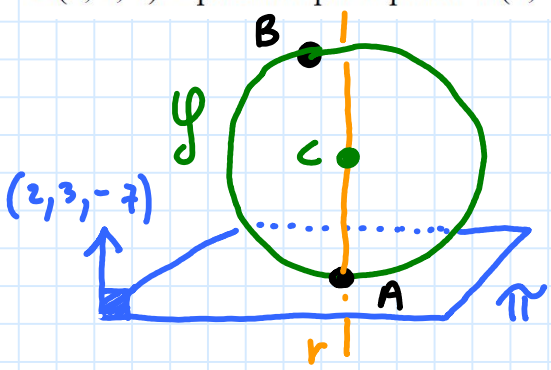
$$C(2,-5,+5) \quad ; \quad A(2,0,0)$$

$$R = d(C,A) = \sqrt{(2-2)^2 + (-5-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50}$$

$$\mathcal{S} : (x-2)^2 + [y-(-5)]^2 + (z-5)^2 = (\sqrt{50})^2$$

$$\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-4x+10y-10z+4=0$$

8.10. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $2x + 3y - 7z = 0$ nel suo punto $A(2, 1, 1)$ e passante per il punto $B(1, -2, 3)$.



osservazione: il centro C della sfera $\mathcal{S}$ è sulla retta r passante per A e perpendicolare a π

$\vec{u}_\pi = (2,3,-7) \perp \pi \Rightarrow \vec{u}_\pi \parallel r$

$$r: \begin{cases} x = 2\cdot t + 2 \\ y = 3\cdot t + 1 \\ z = -7\cdot t + 1 \end{cases}$$

$C \in r \Rightarrow C(2t+2, 3t+1, -7t+1)$

$A(2,1,1) \in \mathcal{S}$; $B(1,-2,3) \in \mathcal{S}$; C centro di $\mathcal{S}$

$d(A,C) = d(B,C)$; $[d(A,C)]^2 = [d(B,C)]^2$;

$$(2t+2-2)^2 + (3t+1-1)^2 + (-7t+1-1)^2 = (2t+2-1)^2 + (3t+1-(-2))^2 + (-7t+1-3)^2$$

$$\cancel{4t^2} + \cancel{9t^2} + \cancel{49t^2} = \cancel{4t^2} + 1 + 4t + \cancel{9t^2} + 9 + 18t + \cancel{49t^2} + 4 + 28t$$

$50t + 14 = 0$; $t = -\frac{7}{25}$;

$$C(2t+2, 3t+1, -7t+1) = \left(\frac{36}{25}, \frac{4}{25}, \frac{74}{25}\right)$$

$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

$$\frac{36}{25} = \frac{-a}{2} ; \quad \frac{4}{25} = \frac{-b}{2} ; \quad \frac{74}{25} = \frac{-c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -\frac{72}{25} ; \quad b = -\frac{8}{25} ; \quad c = -\frac{148}{25} ;$$

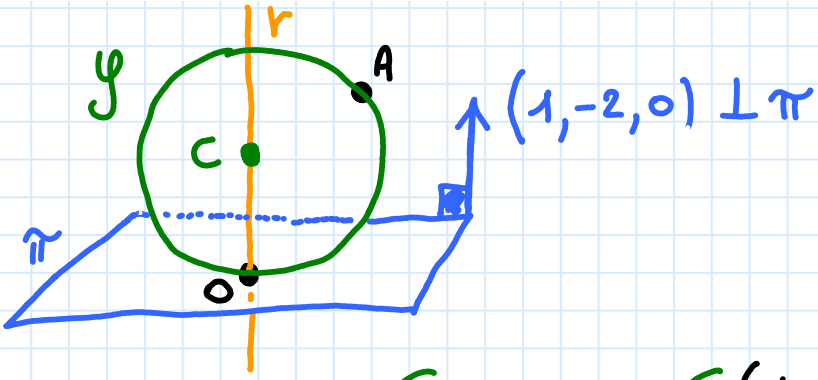
$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 - \frac{72}{25}\cdot x - \frac{8}{25}\cdot y - \frac{148}{25}\cdot z + d = 0$$

$$A(2,1,1) \in \mathcal{S} \Rightarrow 2^2 + 1^2 + 1^2 - \frac{72}{25}\cdot 2 - \frac{8}{25}\cdot 1 - \frac{148}{25}\cdot 1 + d = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow d = 6$;

$$\mathcal{S}: 25x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 72\cdot x - 8y - 148\cdot z + 150 = 0$$

8.12. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente nell'origine al piano $x - 2y = 0$ e passante per il punto $A(2, 3, 1)$.



$$r: \begin{cases} x = 1\cdot t + 0 \\ y = -2\cdot t + 0 \\ z = 0\cdot t + 0 \end{cases}$$

$$C \in r \Rightarrow C(t, -2t, 0)$$

$$\mathcal{S}: \; x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\underbrace{t}_{x_c} = \frac{-a}{2}; \; \underbrace{-2t}_{y_c} = \frac{-b}{2}; \; \underbrace{0}_{z_c} = \frac{-c}{2} \Rightarrow a = -2t; \; b = 4t; \; c = 0;$$

$$\mathcal{S}: \; x^2 + y^2 + z^2 - 2tx + 4ty + d = 0$$

$$O(0,0,0) \in \mathcal{S} \Rightarrow d = 0$$

$$\mathcal{S}: \; x^2 + y^2 + z^2 - 2tx + 4ty = 0$$

$$A(2,3,1) \in \mathcal{S} \Rightarrow 2^2 + 3^2 + 1^2 - 2\cdot t\cdot 2 + 4\cdot t\cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8t + 14 = 0 \Rightarrow t = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4}$$

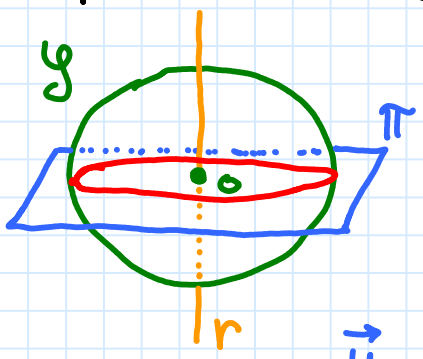
$$\mathcal{S}: \; x^2 + y^2 + z^2 + \frac{7}{2}\cdot x - 7\cdot y = 0$$

$$\mathcal{S}: \; 2\cdot x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot z^2 + 7\cdot x - 14\cdot y = 0$$

8.13. Esercizio. Scrivere le equazioni delle sfere di raggio $R = 2$ e passanti per la circonferenza

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + 2y - z = 0$$

La circonferenza $\mathcal{C}$ è l'intersezione della sfera $\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2=1$ (di centro l'origine O e raggio 1) col piano $\pi: x+2y-z=0$ passante per l'origine O.



Ogni altra sfera passante per la circonferenza $\mathcal{C}$ ha il centro sulla retta r

$$\vec{u}_\pi = (1,2,-1) \perp \pi \Rightarrow (1,2,-1) \parallel r$$

$$r: \begin{cases} x = 1\cdot t + 0 \\ y = 2\cdot t + 0 \\ z = -1\cdot t + 0 \end{cases} \Rightarrow C(t, 2t, -t)$$

Ora troviamo un punto di $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = z-2y \\ (z-2y)^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z-2y \\ z^2+4y^2-4yz+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z-2y \\ 5y^2+2z^2-4yz-1=0 \end{cases} \qquad \text{scelgo } y=0 \quad \begin{cases} x = z \\ 2z^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \text{scelgo } z=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

il punto $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \mathcal{C}$

ora impongo che $d(B,C) = R = 2$ ovvero

$$[d(B,C)]^2 = 4 \; ; \; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-t\right)^2+(0-2t)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-(-t)\right)^2 = 4$$

$$\frac{1}{2}+t^2-\sqrt{2}\cdot t+4t^2+\frac{1}{2}+t^2+\sqrt{2}\cdot t=4$$

$$6\cdot t^2=3\ ;\quad 2t^2=1\ ;\quad t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$

$$C(t,2t,-t)=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathcal{S}:\ x^2+y^2+z^2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\pm\sqrt{2}\cdot y\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot z+d=0$$

$$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in\mathcal{S}\Rightarrow\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}\pm\cancel{\frac{1}{2}}\pm 0\mp\cancel{\frac{1}{2}}+d=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=-1$$

$$\mathcal{S}:\ x^2+y^2+z^2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\pm\sqrt{2}\cdot y\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot z-1=0$$

$$\mathcal{S}_1:\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2+\sqrt{2}\cdot x+2\sqrt{2}y-\sqrt{2}z-2=0$$

$$\mathcal{S}_2:\ 2\cdot x^2+2y^2+2\cdot z^2-\sqrt{2}\cdot x-2\sqrt{2}\cdot y+\sqrt{2}\cdot z-2=0$$

8.15. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per il punto A(2, –3, –1) e passante per la circonferenza di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y = 3x - z = 0$.

La circonferenza $\mathcal{C}$ è l'intersezione della sfera $\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2-x+2y=0$ (di centro $\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$ e passante per l'origine $O(0,0,0)$) e il piano $\pi: 3x-z=0$ (passante per O).

Quindi, $O(0,0,0)\in\mathcal{C}$.

Il centro di ogni sfera passante per $\mathcal{C}$ appartiene alla retta r passante per

il punto $\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$ e perpendicolare a π.

$\vec{u}_\pi = (3,0,-1) \perp \pi \Rightarrow \vec{u}_\pi \parallel r$

$$r: \begin{cases} x = 3\cdot t + \frac{1}{2} \\ y = 0\cdot t - 1 \\ z = -1\cdot t + 0 \end{cases} \qquad C \in r \Rightarrow C\left(3t+\frac{1}{2}, -1, -t\right)$$

$3t+\frac{1}{2} = \frac{-a}{2}$; $-1 = \frac{-b}{2}$; $-t = \frac{-c}{2}$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = -6t-1$; $b = 2$; $c = 2t$

$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2-(6t+1)\cdot x + 2\cdot y + (2\cdot t)\cdot z + d = 0$

$O(0,0,0) \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow O \in \mathcal{S} \Rightarrow d = 0$

$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2-(6t+1)\cdot x + 2\cdot y + (2\cdot t)\cdot z = 0$

$A(2,-3,-1) \in \mathcal{S} \Rightarrow 4+9+1-2\cdot(6t+1)+2(-3)-2\cdot t = 0$

$6-14t=0$; $t = \frac{3}{7}$

$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2-\frac{25}{7}\cdot x + 2\cdot y + \frac{6}{7}\cdot z = 0$

$\mathcal{S}: 7\cdot x^2+7\cdot y^2+7\cdot z^2-25\cdot x+14\cdot y+6\cdot z = 0$