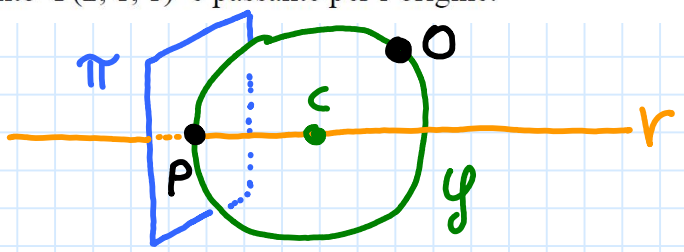
8.16. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $x + 2y + 3z - 7 = 0$ nel suo punto $P(2, 1, 1)$ e passante per l'origine.



$O \in S \Rightarrow d = 0$

$\vec{u}_\pi = (1,2,3) \perp \pi \Rightarrow \vec{u}_\pi = (1,2,3) \parallel r \Rightarrow$

$\Rightarrow (l, m, n) = (1,2,3)$ parametri direttori di r

$P(2,1,1) \in r$

$$C \in r: \begin{cases} x = 1 \cdot t + 2 \\ y = 2 \cdot t + 1 \\ z = 3 \cdot t + 1 \end{cases} \Rightarrow C(t+2, 2t+1, 3t+1)$$

$t + 2 = \frac{-a}{2}$; $2t + 1 = \frac{-b}{2}$; $3t + 1 = -\frac{c}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -2 \cdot (t+2)$; $b = -2 \cdot (2t+1)$; $c = -2 \cdot (3t+1)$;

$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2(t+2) \cdot x - 2(2t+1) \cdot y - 2 \cdot (3t+1) \cdot z = 0$

$P(2,1,1) \in S \Rightarrow 4 + 1 + 1 - 4(t+2) - 2 \cdot (2t+1) - 2 \cdot (3t+1) = 0 \Rightarrow$

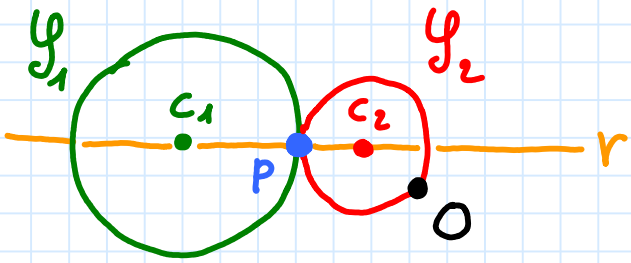
$\Rightarrow 14t + 6 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{7}$

$S: x^2 + y^2 + z^2 - \frac{22}{7} \cdot x - \frac{2}{7} \cdot y + \frac{4}{7} \cdot z = 0$

$S: 7 \cdot x^2 + 7 \cdot y^2 + 7 \cdot z^2 - 22 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z = 0$

8.17. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ nel suo punto P(0, 0, 1) e passante per l'origine.

$\mathcal{S}_1 \nearrow$



$C_1(2,-1,0)$

$[\overrightarrow{PC_1}] = (2,-1,-1)$

Il centro C_2 è sulla retta r passante per C_1 e P

$$r: \begin{cases} x = 2\cdot t + 0 \\ y = -1\cdot t + 0 \\ z = -1\cdot t + 1 \end{cases}$$

$C_2(2t, -t, -t+1)$

$2t = \frac{-a}{2}$; $-t = \frac{-b}{2}$; $-t+1 = -\frac{c}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -4t$; $b = 2t$; $c = 2t-2$; $O \in \mathcal{S}_2 \Rightarrow d = 0$;

$\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4t\cdot x + 2t\cdot y + 2\cdot(t-1)\cdot z = 0$

$P(0,0,1) \in \mathcal{S}_2 \Rightarrow 0 + 0 + 1 - 0 + 0 + 2\cdot(t-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$$C_2(2t, -t, -t+1) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2\cdot x + y - z = 0$$

8.19. Esercizio. Determinare le coordinate del centro C' e il raggio r della circonferenza

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 13 = y + 3 = 0$$

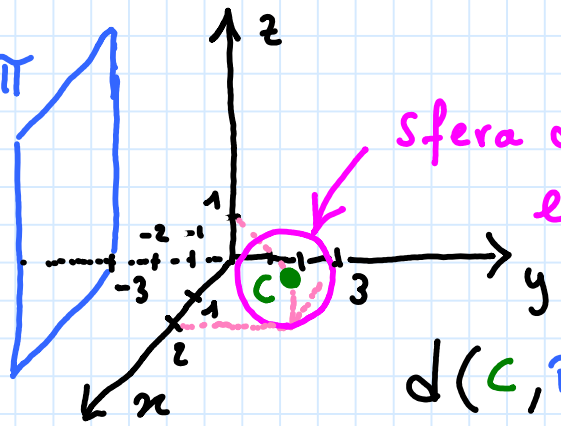
$$C\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}, -\frac{-2}{2}\right) = (2, 3, 1) \text{ centro sfera}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (-2)^2 - 4\cdot 13} = 1 \quad \text{raggio sfera}$$

$$\pi : y+3=0 \Rightarrow \pi \parallel \text{piano } XZ \Rightarrow \pi \perp \text{asse } Y$$

π è esterno alla sfera

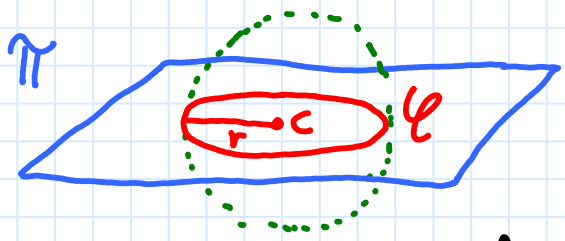
<u>NO</u> circonferenza reale



sfera di centro $C(2,3,1)$ e raggio $R=1$

$$d(C, \pi) = 6 > 1 = R$$

8.20. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza appartenente al piano $2x - 3y - 2z = 0$ e avente centro in $C(1, 0, 1)$ e raggio $r = 3$.



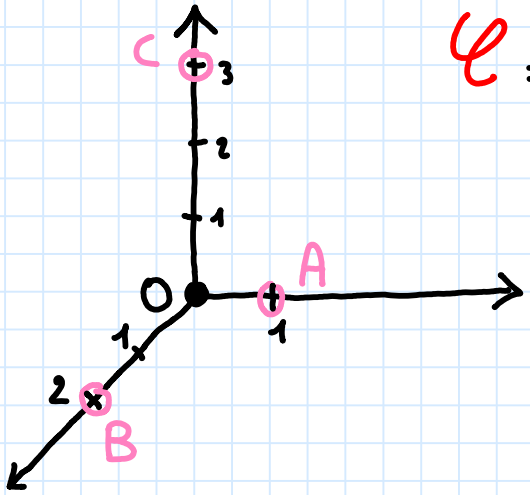
$\varphi = \pi \cap \mathcal{S}$; $\mathcal{S} = ?$

come sfera $\mathcal{S}$ prendo la sfera di centro $C(1,0,1)$ e raggio $r=3$.

$$\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2\cdot x - 2\cdot z - 7 = 0$$

8.21. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza passante per i tre punti $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 3)$.



$\varphi = \pi \cap \mathcal{S}$; $\pi = ?$; $\mathcal{S} = ?$;

π è, ovviamente, l'unico piano passante per i tre punti non allineati A, B e C

$P(x,y,z) \in \pi \iff [\vec{AP}], [\vec{AB}]$ e $[\vec{AC}]$ complanari $\iff$

$$\iff \det \begin{bmatrix} (x-1) & (y-0) & (z-0) \\ (0-1) & (2-0) & (0-0) \\ (0-1) & (0-0) & (3-0) \end{bmatrix} = 0 \iff \det \begin{bmatrix} (x-1) & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\pi : 6\cdot x + 3\cdot y - 2\cdot z - 6 = 0$$

$$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} A(1,0,0)\in\mathcal{S} \Rightarrow \\ B(0,2,0)\in\mathcal{S} \Rightarrow \\ C(0,0,3)\in\mathcal{S} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} 1+a+d=0 \\ 4+2b+d=0 \\ 9+3c+d=0 \end{cases}$$

3 equazioni in 4 incognite (infinite soluzioni)

osservazione: per 3 punti passano infinite sfere; quindi, scelgo (a piacere) un 4° punto.

Prendendo l'origine $O(0,0,0)$ ho che i 4 punti O, A, B e C sono a 3 a 3 non allineati.

Per cui per essi passa un'unica sfera.

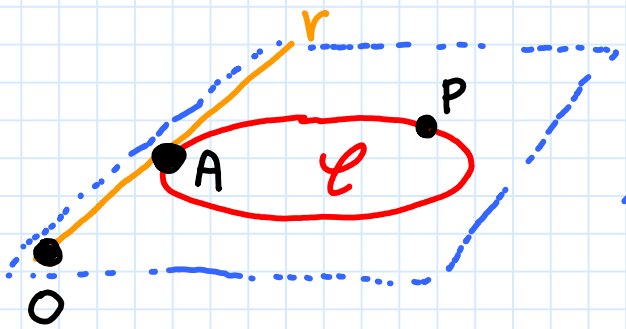
$$O(0,0,0)\in\mathcal{S} \Rightarrow d=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

$$\boxed{\mathcal{C}: x^2+y^2+z^2-x-2y-3z = 6x+3y+2z-6=0}$$

8.22. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza tangente alla retta $x=y=z$ nel suo punto $A(1, 1, 1)$ e passante per il punto $P(3, 1, 0)$.

$O \in r$



$\mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{S}$;

$\pi = ?$ et $\mathcal{S} = ?$

osservazione: il piano π che contiene $\mathcal{C}$ contiene il punto $P \in \mathcal{C}$ e la retta r tangente a $\mathcal{C}$ in A. Quindi, $\pi \in F(r)$ et $P \in \pi$.

$$r: \quad x - y = y - z = 0$$

$$\pi \in F(r): \lambda \cdot (x-y) + \mu \cdot (y-z) = 0$$

$$P(3,1,0) \in \pi \Rightarrow \lambda \cdot (3-1) + \mu \cdot (1-0) = 0 \Rightarrow 2\lambda + \mu = 0$$

come autosoluzione scelgo la coppia $(\lambda, \mu) = (1,-2)$

$$\pi: 1 \cdot (x-y) - 2 \cdot (y-z) = 0$$

$$\mathcal{C} \subseteq \pi: \quad x - 3 \cdot y + 2 \cdot z = 0$$

osservazione: il centro C della sfera $\mathcal{S}$ si trova sul piano α perpendicolare alla retta r e passante per il punto A

$$O(0,0,0) \in r, \; A(1,1,1) \in r \Rightarrow [\overrightarrow{OA}] = (1,1,1) \parallel r$$

$$(1,1,1) \parallel r \Rightarrow (1,1,1) \perp \alpha \Rightarrow (a,b,c) = (1,1,1)$$

$$\alpha: 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + d = 0$$

$$A(1,1,1) \in \alpha \Rightarrow 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$C \in \alpha: \quad x + y + z - 3 = 0$$

osservazione: il centro C della sfera $\mathcal{S}$ si trova sul piano β perpendicolare al vettore $[\overrightarrow{AP}]$ e' passante per il punto medio M del segmento AP.

$A(1,1,1)$; $P(3,1,0) \Rightarrow [\overrightarrow{AP}] = (2,0,-1)$; $M(2,1,\frac{1}{2})$

$[\overrightarrow{AP}] \perp \beta \Rightarrow (a,b,c) = (2,0,-1)$

$$\beta : 2\cdot x + 0\cdot y + (-1)\cdot z + d = 0$$

$$\beta : 2x - z + d = 0$$

$$M(2,1,\tfrac{1}{2}) \in \beta \Rightarrow 2\cdot 2 - \tfrac{1}{2} + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{7}{2}$$

$$\beta : 2x - z - \frac{7}{2} = 0$$

$$C \in \beta : 4\cdot x - 2\cdot z - 7 = 0$$

Quindi, il centro C della sfera $\mathcal{S}$ si trova sulla retta $S = \alpha \cap \beta$.

$$C \in S : x + y + z - 3 = 4x - 2z - 7 = 0$$

$$4x - 2z - 7 = 0 \Rightarrow z = 2\cdot x - \frac{7}{2}$$

$$x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - x - z = 3 - x - \left(2x - \frac{7}{2}\right) = -3x + \frac{13}{2}$$

ponendo $t \overset{\text{DEF.}}{=} x$ otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 1\cdot t \\ y = -3\cdot t + \frac{13}{2} \\ z = 2\cdot t - \frac{7}{2} \end{cases} ; \quad C \in r \Rightarrow C\left(t, -3t + \frac{13}{2}, 2t - \frac{7}{2}\right)$$

(si osservi che, ovviamente, $r \perp \pi$)

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$t = x_c = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = -2t$$

$$-3t + \frac{13}{2} = y_c = \frac{-b}{2} \Rightarrow b = 6t - 13$$

$$2t - \frac{7}{2} = z_c = \frac{-c}{2} \Rightarrow c = -4t + 7$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 + (-2t)\cdot x + (6t-13)\cdot y + (7-4t)\cdot z + d = 0$$

$$A(1,1,1) \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow A \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 1 - \cancel{2t} + \cancel{6t} - 13 + 7 - \cancel{4t} + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

$$P(3,1,0) \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow P \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 1 + 0 - \cancel{6t} + \cancel{6t} - 13 + d \Rightarrow d = 3$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 + (-2t)\cdot x + (6t-13)\cdot y + (7-4t)\cdot z + 3 = 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$; se scelgo $t = 0$ ottengo

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 13\cdot y + 7\cdot z + 3 = 0$$

$$\mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{S}$$

$$\boxed{\mathcal{C} : x - 3\cdot y + 2\cdot z = x^2 + y^2 + z^2 - 13\cdot y + 7\cdot z + 3 = 0}$$