Svolgimento dello scritto dell'appello di ieri

Titolo nota 15/07/2022

1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & -2 & 5 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & -2 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(1-\lambda)$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^{2} \cdot (1-\lambda)^{1}$$

$\lambda_1 = 0$ $\quad m_a(0) = 2$

$\lambda_2 = 1$ $\quad m_a(1) = 1$

autovettori relativi a $\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$$x = 2y - 5z$$

$$(x, y, z) = (2y - 5z, y, z) = y\,\underline{(2, 1, 0)} + z\,\underline{(-5, 0, 1)}$$

$$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Base autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$

$$B(0) = \big((2, 1, 0), (-5, 0, 1)\big)$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 0x - 2y + 5z = 0 \\ 0x - y + 0z = 0 \\ 0x + 0y - z = 0 \end{cases}$$

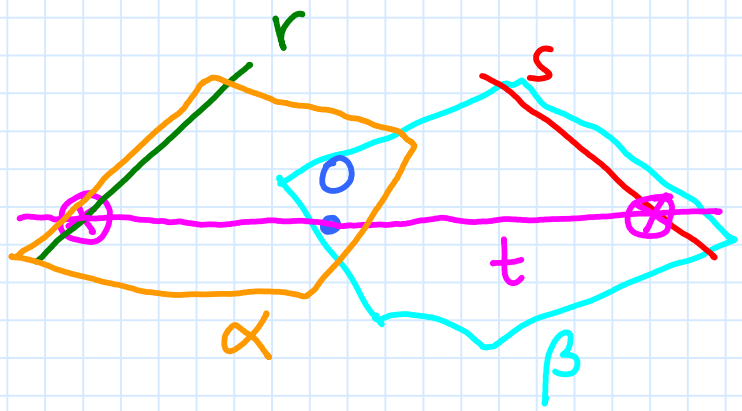
$$\begin{cases} -2y + 5z = 0 \\ -y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ -2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (\underset{\text{libera}}{x}, 0, 0) = x \cdot (1, 0, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

autovettori relativi a $\lambda_2 = 1$

$B(1) = (1, 0, 0) \leftarrow$ base autospazio relativo a $\lambda_1 = 1$

2) Scrivere le **equazioni della retta** passante per l'origine O(0, 0, 0) e che si appoggia alle seguenti rette: r: $y = 4x - y - 5z - 19 = 0$ e s: $x - 3y + 2z - 17 = 2y + z = 0$.



(1) α : $\alpha \in F(r)$ et $O \in \alpha$

(2) β : $\beta \in F(s)$ et $O \in \beta$

(3) $t = \alpha \cap \beta$

r : $\begin{cases} y = 0 \\ 4x - y - 5z - 19 = 0 \end{cases} \longrightarrow$ è proprio il piano α

s : $\begin{cases} x - 3y + 2z - 17 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow$ è proprio il piano β

$t = \alpha \cap \beta : \begin{cases} y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ $\quad t: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ t è <u>l'asse X</u> $\longleftarrow$

$\beta \in F(s)$: $\lambda \cdot (x - 3y + 2z - 17) + \mu(2y + z) = 0$

$O(0,0,0) \in \beta \Rightarrow \lambda \cdot (0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 17) + \mu \cdot (2 \cdot 0 + 0) = 0$

$-17 \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu \neq 0 \Rightarrow$ scelgo, a piacere, $\mu = 1$

$0 \cdot (x - 3y + 2z - 17) + 1 \cdot (2y + z) = 0$

$\beta : 2y + z = 0$

5

$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 10x - 6y + 1 = 0$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$; $p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (3-\lambda) & 5 \\ 5 & (3-\lambda) \end{bmatrix} =$

$= \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda - 8) \cdot (\lambda + 2)$

$\lambda_1 = 8$ $\quad \lambda_2 = -2$

autovettori relativi a $\lambda_1 = 8$

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$x - y = 0 \qquad y = x$$

$$(x, y) = (x, x) = x \cdot (1, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

scelgo $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

auto <u>VERSORE</u> $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ relativo $\lambda_1 = 8$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad C = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right]$$

$\det C = +1$

rotazione di $\frac{\pi}{4}$ rad verso antiorario

$$\begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) & (5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-8\sqrt{2} \qquad\qquad +2\sqrt{2}$$

dopo la rotazione ottengo

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - 8\sqrt{2}\,x' + 2\sqrt{2}\,y' + 1 = 0$$

$$\boxed{8(x')^2 - 8\sqrt{2}\,x'} \quad \boxed{-2(y')^2 + 2\sqrt{2}(y')} \quad +1 = 0$$

$$\boxed{8\cdot\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4} \quad \boxed{-2\cdot\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} \quad +1 = 0$$

traslazione $\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$8\cdot(x'')^2 - 4 - 2\cdot(y'')^2 + 1 + 1 = 0$$

$$8\cdot(x'')^2 - 2\cdot(y'')^2 = 2$$

$$4\cdot(x'')^2 - (y'')^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{(y'')^2}{1} = +1}$$ eq. canonica

IPERBOLE

4) Trovare i **parametri direttori** delle rette che si trovano sul piano $y - 2z + 6 = 0$ e formano un angolo di $\pi/6$ radianti col piano $x + 11 = 0$.

(l, m, n) parametri direttori delle rette che stiamo cercando

$\pi : y - 2z + 6 = 0 \qquad a = 0;\ b = 1;\ c = -2$

retta contenuta in π $\rightarrow$ $r \parallel \pi$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n = 0$ $\rightarrow$ $0 \cdot l + 1 \cdot m + (-2) \cdot n = 0$ $\rightarrow$

$$\boxed{m = 2 \cdot n}$$

$$(l, 2 \cdot n, n)$$

$\pi' : x + 11 = 0$ $\qquad a' = 1 ; b' = 0 ; c' = 0 ;$

angolo retta - piano è $\frac{\pi}{6}$ radianti

Formula

$$\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{6}\text{rad}}_{30^\circ}\right) = \frac{|a' \cdot l + b' \cdot m + c' \cdot n|}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2 + (c')^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|1 \cdot l + 0 \cdot m + 0 \cdot n|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{l^2 + (2n)^2 + n^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|l|}{\sqrt{l^2 + 5n^2}}$$

$\sqrt{l^2 + 5n^2} = 2 \cdot |l|$; $\quad l^2 + 5n^2 = 4l^2$

$3l^2 = 5n^2$; $\quad \boxed{\text{scelgo } n = 3} \rightarrow m = 2 \cdot n = 6$

$$3 \cdot l^2 = 5 \cdot 3^2 \rightarrow l^2 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$l = \pm\sqrt{15}$$

2 rette $\nearrow (l, m, n) = (\sqrt{15}, 6, 3)$

$\searrow (l', m', n') = (-\sqrt{15}, 6, 3)$

risultato finale

3) Sia A il punto di intersezione tra il piano $3x + 3y + 7z + 14 = 0$ e l'asse Z. Sia r la retta per l'origine O e perpendicolare al piano $11x + 2y + 3 = 0$. Trovare la **distanza** h di A dalla retta r. Poi, detti B e C i punti di r aventi distanza 4h da A, calcolare l'**area** del triangolo ABC.

$$\{A\}: \begin{cases} 3x+3y+7z+14=0 \\ x=y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7z+14=0 \\ x=y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-2 \\ x=y=0 \end{cases}$$

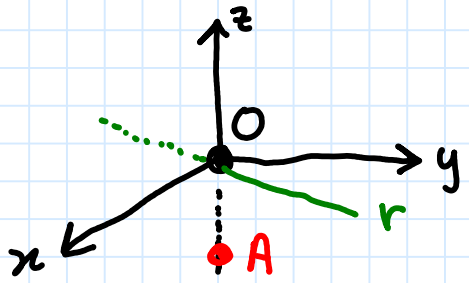
$$A(0,0,-2)$$

$$\pi: 11x+2y+3=0 \qquad a=11;\ b=2;\ c=0$$

$$r \perp \pi \rightarrow l=a=11;\ m=b=2;\ n=c=0$$

$$O \in r \rightarrow r: \begin{cases} x = 11 \cdot t + 0 \\ y = 2 \cdot t + 0 \\ z = 0 \cdot t + 0 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 11t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

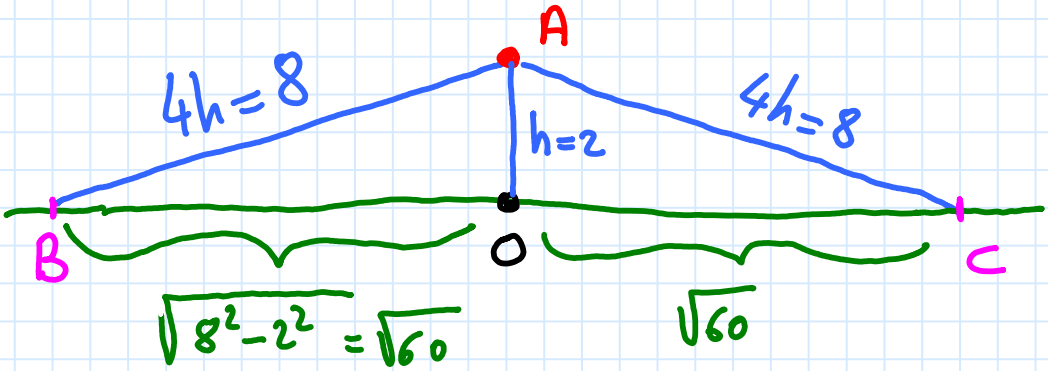
quindi r è sul piano $z=0$ e passa per O



Quindi, SI VEDE SUBITO CHE,

$$h = d(A,r) = d(A,O) = 2$$

$$\boxed{h=2} \longrightarrow 4h = 4\cdot 2 = 8$$



$$\text{area } \overset{\triangle}{ABC} = 2\cdot(\text{area } \overset{\triangle}{AOB}) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{60}\cdot 2\right) = 2\cdot\sqrt{60}$$

$$\text{area } \overset{\triangle}{ABC} = 2\cdot\sqrt{60} = 4\cdot\sqrt{15}$$

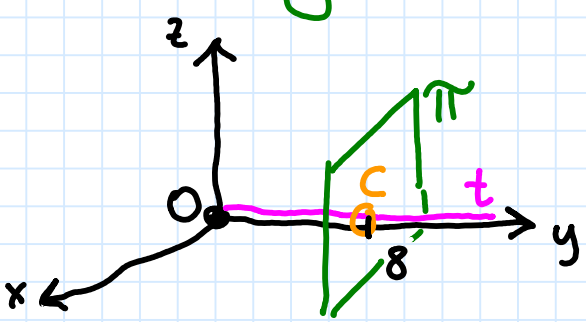
6) Sia Σ la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 100$. Sia π il piano parallelo al piano XZ e passante per il punto A(0, 8, 4). Trovare le coordinate del **centro** C e il **raggio** r della circonferenza γ ottenuta intersecando la sfera Σ col piano π.

Dall'equazione della sfera si vede subito che ha centro nell'origine $O(0,0,0)$ e raggio $R=10$.

$\pi \parallel$ piano XZ : $y=0 \rightarrow \pi : y+d=0$

$A(0,8,4)\in\pi \Rightarrow 8+d=0 \Rightarrow d=-8$

$$\pi : y-8=0$$



si vede subito che la retta t passante per il centro O della sfera e perpendicolare al piano π

e proprio l'asse y
di equazioni $x = z = 0$

Quindi, il centro C della circonferenza, essendo dato dall'intersezione della retta t col piano π, ha coordinate $C(0, 8, 0)$.

Inoltre, la distanza del centro $C(0,8,0)$ della circonferenza dal centro $O(0,0,0)$ della sfera è $d = 8$.

Infine, utilizzando il teorema di Pitagora si ha che $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$

Quindi, la circonferenza ha raggio $r = 6$