1. Relazioni.

Una coppia è un insieme contenente due elementi. Siccome una coppia è un insieme, l'ordine con cui vengono considerati i due elementi della coppia non ha importanza. Quindi, la coppia {x, y} è uguale alla coppia {y, x} ovvero {x, y} = {y, x}.

Una *coppia ordinata* è un insieme contenente due elementi in cui è importante l'ordine in cui vengono considerati i due elementi. Quindi, ci sarà un primo elemento ed un secondo elemento. Per indicare una coppia ordinata useremo le parentesi tonde e scriveremo (x, y) per indicare una coppia di elementi dove x è il primo elemento e y è il secondo elemento.
Diremo che due coppie ordinate (x, y) e (a, b) sono *uguali*, e scriveremo $(x, y) = (a, b)$, se il primo elemento di una delle due coppie è uguale al primo elemento dell'altra coppia e il secondo elemento di una delle due coppie è uguale al secondo elemento dell'altra coppia ovvero $x = a$ e $y = b$.

1.1 Definizione. Dati due insiemi A e B diremo *prodotto cartesiano di A per B* in questo ordine (A è il primo insieme e B è il secondo insieme) l'insieme che ha come elementi tutte e sole le coppie ordinate dove il primo elemento della coppia è un elemento del primo insieme A mentre il secondo elemento della coppia è un elemento del secondo insieme B, ovvero $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A , b \in B\}$.

1.2 Definizione. Una *relazione tra un insieme A e un insieme B* è un sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times B$, cioè $R \subseteq A \times B$. Per ogni coppia ordinata $(a, b) \in A \times B$ diremo che:
- l'elemento $a \in A$ *è in relazione* con l'elemento $b \in B$ (e scriveremo aRb) se $(a, b) \in R$;
- l'elemento $a \in A$ *non è in relazione* con l'elemento $b \in B$ (e scriveremo $a \not R b$) se $(a, b) \notin R$.

1.3 Osservazione. Data una relazione R tra un insieme A e un insieme B, un elemento $a \in A$ può essere in quella relazione con nessuno, esattamente uno o più elementi di B (anche tutti).

1.4 Esempio. $A=\{1, 7, -3\}$, $B=\{q, s, t\}$, $R=\{(7, s), (-3, q), (-3, s), (-3, t)\}$
R è una relazione tra A e B in quanto R è un sottoinsieme di $A \times B$.
L'elemento $1 \in A$ non è in relazione R con alcun elemento $b \in B$. L'elemento $7 \in A$ è in relazione R solo con l'elemento $s \in B$. L'elemento $(-3) \in A$ è in relazione con tutti gli elementi di B.

2. Funzioni.

2.1 Definizione. Diremo che una relazione f tra A e B è una *funzione* se ogni elemento di A è in relazione f con esattamente un elemento di B. Una funzione f tra A e B verrà indicata nel modo seguente $f : A \to B$. Inoltre, per ogni elemento $a \in A$, se $b \in B$ è l'unico elemento in relazione con a allora invece che afb scriveremo f(a) = b e diremo che b è l'*immagine* di a tramite la funzione f.

2.2 Osservazione. Data una funzione $f : A \to B$, la definizione precedente non esclude che
(1) elementi distinti di A possano avere come immagine uno stesso elemento di B;
(**ATTENZIONE**: il fatto che ogni elemento di A abbia una ed una sola immagine **NON** è in contraddizione col fatto che elementi distinti di A abbiano la stessa immagine)
(2) possano esistere in B elementi che non siano immagine di alcun elemento di A.

2.3 Esempio. A={1, 7, -3}, B={q, s, t}, f={(1, q), (7, s), (-3, s)}
La relazione f tra A e B è una funzione in quanto ogni elemento di A è in relazione con esattamente un elemento di B: f(1) = q, f(7) = s e f(-3) = s. Inoltre, si osservi che:
(1) gli elementi distinti 7 e (-3) di A hanno la stessa immagine s in B;
(2) l'elemento t di B non è immagine di alcun elemento di A.

Col simbolo f(A) indicheremo il sottoinsieme di B costituito dagli elementi di B che sono immagine di qualche elemento di A. Cioè, $f(A) := \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$.

Funzioni che escludano quanto osservato in (1) e/o in (2) saranno funzioni più "ricche".

2.4 Definizione. Data una funzione $f : A \to B$, diremo che essa è:
(1) *inettiva* se elementi distinti di A hanno immagini distinte in B (ovvero, se due elementi di A hanno la stessa immagine allora essi sono necessariamente lo stesso elemento);
(2) *suriettiva* se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A (ovvero f(A) = B).
(3) *biettiva* se f è sia iniettiva che suriettiva.

2.5 Osservazione. Si noti che le condizioni (1) e (2) sono "*indipendenti*", cioè esistono funzioni che sono iniettive ma non suriettive e funzioni che sono suriettive ma non iniettive.

2.6 Esempio. Siano A={1, 7} e B={q, s, t}. Si consideri la funzione $f : A \to B$ così definita f = {(1, q), (7, s)}. Si vede che gli elementi distinti 1 e 7 di A hanno in B immagini rispettivamente

f(1) = q e f(7) = s distinte. Quindi, la funzione f è iniettiva. Si vede anche che l'elemento t di B non è immagine di alcun elemento di A. Per cui la funzione f non è suriettiva.

2.7 Esempio. Siano A={1, 7, -3} e B={q, s}. Si consideri la funzione $f : A \to B$ così definita f = {(1, q), (7, q), (-3, s)}. Si vede che gli elementi distinti 1 e 7 di A hanno la stessa immagine q in B. Quindi, la funzione f non è iniettiva. Invece, ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A. Per cui la funzione f è suriettiva.

2.9 Esempio. Siano A={1, 7, -3} e B={q, s, t}. Si consideri la funzione $f : A \to B$ così definita f = {(1, q), (7, s), (-3, t)}. Si vede subito che f è una funzione biettiva tra A e B.

2.10 Osservazione. Data una relazione tra due insiemi A e B, il fatto che questa possa essere una funzione, una funzione iniettiva e/o suriettiva dipende **anche** dagli insiemi A e B.

Esempio. Siano A e B due sottoinsiemi dell'insieme R dei numeri reali.
Consideriamo la seguente relazione $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$ tra gli insiemi A e B. Tale relazione rappresenta la legge seguente "*all'elemento x di A associo l'elemento y di B se e solo se* $y = x^2$ "

1) se $A = R$ e $B = R^+ = \{y \in R \mid y > 0\}$ allora
- f **non** è una funzione in quanto per l'elemento $0 \in A$ non esiste alcun elemento $y \in B$ tale che $y = x^2$.

2) se $A = R$ e $B = R$ allora
- f è una funzione in quanto per ogni $x \in R$ esiste $y \in R$ tale che $y = x^2$ cioè y=f(x);
- f **non** è iniettiva in quanto sia $2 \in A$ che $(-2) \in R$ hanno la stessa immagine $4 \in R$;
- f **non** è suriettiva in quanto l'elemento $y=(-4) \in R$ non è immagine di alcun elemento $x \in R$.

3) se $A = R_0^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ e $B = R$ allora
- f è una funzione in quanto per ogni $x \in R_0^+$ esiste $y \in R$ tale che $y = x^2$ cioè y=f(x);
- f è iniettiva in quanto elementi distinti $x \in R_0^+$ e $x' \in R_0^+$ hanno immagini distinte x^2 e $(x')^2$ in R;
- f **non** è suriettiva in quanto l'elemento $y=(-4) \in R$ non è immagine di alcun elemento $x \in R_0^+$.

4) se $A = R$ e $B = R_0^+ = \{y \in R \mid y \geq 0\}$ allora
- f è una funzione in quanto per ogni $x \in R$ esiste $y \in R_0^+$ tale che $y = x^2$ cioè y=f(x);
- f **non** è iniettiva in quanto sia $2 \in R$ che $(-2) \in R$ hanno la stessa immagine $4 \in R_0^+$;
- f è suriettiva in quanto ogni elemento $y \in R_0^+$ è immagine di $x = \sqrt{y} \in R$.

5) se $A = R_0^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ e $B = R_0^+ = \{y \in R \mid y \geq 0\}$ allora f è una funzione biettiva.

3. Relazioni di equivalenza e partizioni.

3.1 Definizione. Una relazione $R \subseteq A \times A$, tra un insieme A e se stesso, viene detta *relazione in A.*

3.2 Definizione. Una relazione in A si dice

- *riflessiva* se vale la condizione (RIFL) $\forall a \in A$ aRa
- *simmetrica* se vale la condizione (SIMM) $\forall a,b \in A$ $(aRb \Rightarrow bRa)$
- *transitiva* se vale la condizione (TRAN) $\forall a,b,c \in A$ $(aRb \text{ et } bRc \Rightarrow aRc)$

3.3 Osservazione. Negli esempi che seguono vedremo che le condizioni (RIFL), (SIMM) e (TRAN) sono "*indipendenti*", cioè esistono relazioni che ne soddisfano alcune e non altre.

3.4 Esempi. A={2, b, ♥} A×A={(2,2), (2,b), (2,♥), (b,2), (b,b), (b,♥), (♥,2),(♥,b), (♥,♥)}

1) R={(b,b), (♥,♥), (2,b), (b,♥)} è una relazione in A non riflessiva (poiché 2$\not R$2), non simmetrica (poiché 2Rb ma b$\not R$2) e non transitiva (poiché 2Rb e bR♥ ma 2$\not R$♥).

2) R={(b,b), (♥,♥), (2,b), (b,2), (b,♥), (♥,b)} è una relazione in A simmetrica, non riflessiva (poiché 2$\not R$2), simmetrica e non transitiva (poiché 2Rb e bR♥ ma 2$\not R$♥).

3) R={(b,b), (♥,♥), (2,b), (b,♥), (2,♥)} è una relazione in A transitiva, non riflessiva (2$\not R$2) e non simmetrica (poiché 2Rb ma b$\not R$2).

4) R={(2,2), (b,b), (2,b), (b,2)} è una relazione in A simmetrica, transitiva e non riflessiva (♥$\not R$♥).

5) R={(2,2), (b,b), (♥,♥), (2,b), (b,♥)} è una relazione in A riflessiva, non simmetrica (poiché 2Rb ma b$\not R$2) e non transitiva (poiché 2Rb e bR♥ ma 2$\not R$♥).

6) R={(2,2), (b,b), (♥,♥), (2,b), (b,2), (b,♥), (♥,b)} è una relazione in A riflessiva, simmetrica ma non transitiva (poiché 2Rb e bR♥ ma 2$\not R$♥).

7) R={(2,2), (b,b), (♥,♥), (2,b), (b,♥), (2,♥)} è una relazione in A riflessiva, transitiva ma non simmetrica (poiché 2Rb ma b$\not R$2).

8) R={(2,2), (b,b), (♥,♥), (2,b), (b,2)} è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

Per l'osservazione precedente ha senso dare la seguente:

3.5 Definizione. Una *relazione* in A si dice *di equivalenza* se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

3.6 Definizione. Sia R una relazione di equivalenza in un insieme A. Per ogni elemento $a \in A$ definiamo *classe di equivalenza di a rispetto a R*, e la indichiamo con $[a]_R$, il sottoinsieme $\{b \in A \mid bRa\}$ di A contenente tutti e soli gli elementi di A che sono in relazione R con a.

3.7 Lemma. Per le classi di equivalenza valgono le seguenti proprietà:

(CE1) $\forall a \in A \quad a \in [a]_R$

(CE2) $\forall a,b \in A \quad ([a]_R = [b]_R \Leftrightarrow aRb)$

(CE3) $\forall a,b \in A \quad ([a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing \Rightarrow [a]_R = [b]_R)$ ovvero $([a]_R \neq [b]_R \Rightarrow [a]_R \cap [b]_R = \varnothing)$

Dimostrazione.

(CE1) $aRa \Rightarrow a \in [a]_R$

(CE2$\Rightarrow$) $a \in [a]_R$ et $[a]_R = [b]_R \Rightarrow a \in [b]_R \Rightarrow aRb$

(CE2$\Leftarrow$)

$(x \in [a]_R$ et $aRb \Rightarrow xRa$ et $aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow x \in [b]_R) \Rightarrow [a]_R \subseteq [b]_R$ |

| $\Rightarrow [a]_R = [b]_R$

$(y \in [b]_R$ et $aRb \Rightarrow yRb$ et $bRa \Rightarrow yRa \Rightarrow y \in [a]_R) \Rightarrow [b]_R \subseteq [a]_R$ |

(CE3) $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in A : x \in [a]_R$ et $x \in [b]_R \Rightarrow [x]_R = [a]_R$ et $[x]_R = [b]_R \Rightarrow [a]_R = [b]_R$ ■

3.8 Definizione. Sia R una relazione di equivalenza in un insieme A. Definiamo *insieme quoziente dell'insieme A rispetto alla relazione di equivalenza R*, e lo indichiamo col simbolo $A_{/R}$, l'**insieme** delle classi di equivalenza degli elementi di A rispetto a R.

3.9 Definizione. Dato un insieme A, diremo *partizione* di A un insieme $\mathfrak{I}$ di sottoinsiemi di A che soddisfi le seguenti proprietà:

(P1) $\forall X \in \mathfrak{I} \quad X \neq \varnothing$ ogni elemento di $\mathfrak{I}$ è un sottoinsieme non vuoto di A

(P2) $\forall X,Y \in \mathfrak{I} \quad (X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \varnothing)$ elementi distinti di $\mathfrak{I}$ sono sottoinsiemi di A disgiunti

(P3) $\forall a \in A \quad \exists X \in \mathfrak{I} : a \in X$ ogni elemento di A è contenuto in un elemento di $\mathfrak{I}$

3.10 Teorema. Dare una relazione di equivalenza in un insieme equivale a darne una partizione.

Dimostrazione. Se R è una relazione di equivalenza in A, allora l'insieme quoziente $A_{/R}$ (visto come famiglia di sottoinsiemi di A) è una partizione dell'insieme A. Infatti, (CE1) implica (P1) e (P3) mentre (CE3) implica (P2). Viceversa, se $\mathfrak{I}$ è una partizione di A, allora è facile provare che la relazione $R := \{(a, b) \in A \times A \mid \exists X \in \mathfrak{I} : a,b \in X\}$ è una relazione di equivalenza in A. ■

4. Operazioni binarie e gruppi.

4.1 Definizione. Diremo

- *operazione binaria ovunque definita in A×B a valori in C* ogni funzione $f : A\times B \to C$
- *operazione binaria ovunque definita in A a valori in C* ogni funzione $f : A\times A \to C$
- *operazione binaria ovunque definita ed interna ad A* ogni funzione $f : A\times A \to A$

4.2 Definizione. Sia $\oplus$ un'operazione binaria ovunque definita in A×B a valori in C. Dalla definizione 4.1, si ha che ogni coppia ordinata (x, y) di A×B ha un'**unica** immagine z in C.
Invece di $\oplus(x, y) = z$ scriveremo $x\oplus y = z$ e diremo che z è il *risultato (**unico**) dell'operazione* $\oplus$ tra x e y (in quest'ordine).

Tenendo conto dell'**unicità del risultato** si ha che:

(U1) $\forall x, y\in A\ ,\ \forall z\in B \qquad x = y \ \Rightarrow\ x\oplus z = y\oplus z$

(U2) $\forall x\in A\ ,\ \forall w, z\in B \qquad w = z \ \Rightarrow\ x\oplus w = x\oplus z$

4.3 Definizione. Se $\oplus$ è un'operazione binaria ovunque definita in G×G a valori in G, allora diremo che $\oplus$ è un'*operazione binaria ovunque definita ed interna a* G.

4.4 Definizione. Diremo *gruppo* una coppia $(G, \oplus)$ dove G è un insieme non vuoto e $\oplus$ è un'operazione binaria ovunque definita ed interna a G tale che valgano le proprietà seguenti:

(G1) $\forall a,b,c\in G \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (si dice che $\oplus$ è *associativa*)

(G2) $\exists 0\in G : \forall a\in G \quad a \oplus 0 = a = 0 \oplus a$ (si dice che 0 è l'*elemento neutro* rispetto a $\oplus$)

(G3) $\forall a\in G\ \exists -a\in G : a\oplus(-a) = 0 = (-a)\oplus a$ (si dice che $-a$ è il *simmetrico* di a rispetto a $\oplus$)

4.5 Definizione. Un gruppo $(G, \oplus)$ si dice *abeliano* o *commutativo* se vale la proprietà seguente:

(G4) $\forall a,b\in G \qquad a \oplus b = b \oplus a$ (si dice che $\oplus$ è *commutativa*)

4.6 Osservazione. Se, come nelle Definizioni **4.4** e **4.5**. utilizziamo la notazione additiva $\oplus$ per indicare l'operazione del gruppo G, allora l'elemento neutro rispetto a $\oplus$ viene indicato con 0 (zero) e il simmetrico di un elemento a viene indicato con $(-a)$ e viene detto l'*opposto* di a.
Se, invece, utilizziamo la notazione moltiplicativa $\otimes$ per indicare l'operazione del gruppo G, allora l'elemento neutro rispetto a $\otimes$ viene indicato con 1 (uno) e il simmetrico di un elemento a viene indicato con a^{-1} e viene detto l'*inverso* di a.

4.7 Esempio. Sia R l'insieme dei numeri reali.

Le classiche operazioni + e $\bullet$ di somma e prodotto tra due numeri reali sono due operazioni binarie ovunque definite ed interne a R. Inoltre, tali operazioni sono sia associative che commutative.

Rispetto a + esiste il numero reale *zero* 0 che si comporta da elemento neutro e per ogni numero reale x esiste il suo simmetrico (opposto) –x. Quindi, la coppia (R, +) è un gruppo abeliano.

Rispetto a $\bullet$ esiste il numero reale *uno* 1 che si comporta da elemento neutro e per ogni numero reale $x \neq 0$ esiste il suo simmetrico (inverso) x^{-1}. Quindi, la coppia (R-{0}, $\bullet$) è un gruppo abeliano.

4.8 Definizione. Diremo che una terna $(K, \oplus, \otimes)$ è un *campo* se valgono le seguenti proprietà:

(C1) $\oplus$ e $\otimes$ sono due operazioni binarie ovunque definite ed interne a K;

(C2) $(K, \oplus)$ è un gruppo abeliano

(C3) $(K-\{0\}, \otimes)$ è un gruppo abeliano (dove 0 l'elemento neutro rispetto a $\oplus$)

(C4) $\forall a,b,c \in K \quad a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ (si dice che $\otimes$ è *distributiva rispetto a* $\oplus$)

4.9 Esempio. La terna $(R, +, \bullet)$ è un campo. Infatti, abbiamo già visto che sono soddisfatte le proprietà (C1), (C2) e (C3). Inoltre, per i numeri reali vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, cioè: $\forall a,b,c \in R \quad a(b + c) = (ab) + (ac)$.

Nel seguito indicheremo brevemente con R il campo dei numeri reali $(R, +, \bullet)$.

4.10 Teorema. Se $(G, \oplus)$ è un gruppo allora valgono <u>anche</u> le proprietà seguenti:

(G5) l'elemento neutro 0 è unico

(G6) $\forall a \in G$ il simmetrico (–a) di a è unico

(G7) Se (–a) è il simmetrico di a allora il simmetrico di (–a) è a, cioè, (–(–a)) = a.

(G8) $\forall a,b,c \in G \quad a \oplus b = c \Rightarrow b = (-a) \oplus c$ (spostabilità attraverso = dalla sinistra di $\oplus$)

(G9) $\forall a,b,c \in G \quad a \oplus b = c \Rightarrow a = c \oplus (-b)$ (spostabilità attraverso = dalla destra di $\oplus$)

(G10) $\forall a,b,c \in G \quad c \oplus a = c \oplus b \Rightarrow a = b$ (cancellabilità a sinistra rispetto a $\oplus$)

(G11) $\forall a,b,c \in G \quad a \oplus c = b \oplus c \Rightarrow a = b$ (cancellabilità a destra rispetto a $\oplus$)

(G12) $\forall a \in G \quad a \oplus a = a \Leftrightarrow a = 0$

Dimostrazione.

(G5) Se $k \in G$ è un altro elemento neutro, allora $0 \oplus k = 0$.

Ma, per (G2) è anche $0 \oplus k = k$.

Essendo unico il risultato dell'operazione $0 \oplus k$ si ha che $0 = k$.

(G6) Supponiamo che, oltre ad $(-a)$, esista un altro simmetrico a' di a; quindi $a' \oplus a = 0 = a \oplus a'$ $0 = a \oplus a' \Rightarrow (-a) \oplus 0 = (-a) \oplus (a \oplus a') \Rightarrow (-a) \oplus 0 = [(-a) \oplus a] \oplus a' \Rightarrow (-a) = 0 \oplus a' \Rightarrow (-a) = a'$

(G7) da (G3) si ha che a è il simmetrico di $(-a)$; per (G6) il simmetrico è unico, quindi $(-(-a)) = a$

(G8) $a \oplus b = c \Rightarrow_{(G3 \text{ e } U2)} (-a) \oplus (a \oplus b) = (-a) \oplus c \Rightarrow_{(G1)} [(-a) \oplus a] \oplus b = (-a) \oplus c \Rightarrow_{(G3)} 0 \oplus b = (-a) \oplus c \Rightarrow_{(G2)} b = (-a) \oplus c$

(G9) $a \oplus b = c \Rightarrow_{(G3 \text{ e } U1)} (a \oplus b) \oplus (-b) = c \oplus (-b) \Rightarrow_{(G1)} a \oplus [b \oplus (-b)] = c \oplus (-b) \Rightarrow_{(G3)} a \oplus 0 = c \oplus (-b) \Rightarrow_{(G2)} a = c \oplus (-b)$

(G10) $c \oplus a = c \oplus b \Rightarrow_{(G8)} a = (-c) \oplus (c \oplus b) \Rightarrow_{(G1)} a = [(-c) \oplus c] \oplus b \Rightarrow_{(G3)} \Rightarrow a = 0 \oplus b \Rightarrow_{(G2)} a = b$

(G11) $a \oplus c = b \oplus c \Rightarrow_{(G9)} a = (b \oplus c) \oplus (-c) \Rightarrow_{(G1)} a = b \oplus [c \oplus (-c)] \Rightarrow_{(G3)} \Rightarrow a = b \oplus 0 \Rightarrow_{(G2)} a = b$

(G12) ovviamente $0 \oplus 0 = 0$; viceversa $a \oplus a = a \Rightarrow_{(G2)} a \oplus a = a \oplus 0 \Rightarrow_{(G10)} a = 0$ ■

5. Spazi vettoriali <u>reali</u>.

5.1 Definizione. Indicato con R il campo dei numeri reali, diremo *spazio vettoriale reale* una terna $(V, \oplus, *)$ dove $(V, \oplus)$ è un gruppo abeliano ovvero

(G1) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V \quad (\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\oplus\mathbf{w} = \mathbf{u}\oplus(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w})$ — $\oplus$ è *associativa*

(G2) $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{u} \in V \quad \mathbf{u}\oplus\mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0}\oplus\mathbf{u}$ — **0** è l'*elemento neutro* rispetto a $\oplus$

(G3) $\forall \mathbf{u} \in V \ \exists(-\mathbf{u}) \in V : \mathbf{u}\oplus(-\mathbf{u}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{u})\oplus\mathbf{u}$ — $(-\mathbf{u})$ è il *simmetrico* di a rispetto a $\oplus$

(G4) $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V \quad \mathbf{u}\oplus\mathbf{v} = \mathbf{v}\oplus\mathbf{u}$ — $\oplus$ è *commutativa*

e $* : R\times V \to V$ è un'operazione tale che:

(PS1) $\forall \alpha \in R$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ $\quad \alpha*(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) = (\alpha*\mathbf{u})\oplus(\alpha*\mathbf{v})$ — *distributività* di * rispetto a $\oplus$

(PS2) $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad (\alpha+\beta)*\mathbf{u} = (\alpha*\mathbf{u})\oplus(\beta*\mathbf{u})$ — *distributività* di * rispetto a +

(PS3) $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad (\alpha\bullet\beta)*\mathbf{u} = \alpha*(\beta*\mathbf{u})$ — *associatività* "mista"

(PS4) $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad 1*\mathbf{u} = \mathbf{u}$ — 1 è *elemento neutro* rispetto a *

Gli elementi di V si diranno *vettori*, mentre quelli di R *scalari*.

L'operazione $\oplus : V\times V \to V$ (tra due vettori) viene detta *somma di due vettori*.

L'operazione $* : R\times V \to V$ (tra uno scalare e un vettore il cui <u>unico</u> risultato è un vettore) viene detta *prodotto di uno scalare per un vettore*.

5.2 Teorema. Se $(V, \oplus, *)$ è uno spazio vettoriale reale, allora valgono <u>anche</u> le proprietà seguenti:

(PS5) $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad 0*\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (dove 0 è lo zero di R e **0** è l'elemento neutro di V rispetto a $\oplus$)

(PS6) $\forall \alpha \in R$ $\quad \alpha*\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(PS7) $\forall \alpha \in R$, $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad \alpha*\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $\alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(PS8) $\forall \alpha \in R$, $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad \alpha*\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ vel $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (legge di annullamento del prodotto)

(PS9) $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad (-1)*\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ (dove $-\mathbf{u}$ è il simmetrico di **u**)

(PS10) $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad (-\alpha)*\mathbf{u} = -(\alpha*\mathbf{u})$ (dove $-(\alpha*\mathbf{u})$ è il simmetrico di $\alpha*\mathbf{u}$)

(PS11) $\forall \alpha \in R$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ $\quad \alpha*\mathbf{u} = \alpha*\mathbf{v}$ et $\alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ (cancellabilità di $\alpha \neq 0$)

(PS12) $\forall \alpha, \beta \in R$, $\forall \mathbf{u} \in V$ $\quad \alpha*\mathbf{u} = \beta*\mathbf{u}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$ (cancellabilità di $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$)

Dimostrazione.

(PS5) $(0+0) = 0 \Rightarrow_{(U1)} (0+0)*\mathbf{u} = 0*\mathbf{u} \Rightarrow_{(PS2)} (0*\mathbf{u})\oplus(0*\mathbf{u}) = 0*\mathbf{u} \Rightarrow_{(G12)} \Rightarrow 0*\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(PS6) (G12) $\Rightarrow (\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow_{(U2)} \alpha*(\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}) = \alpha*\mathbf{0} \Rightarrow_{(PS1)} (\alpha*\mathbf{0})\oplus(\alpha*\mathbf{0}) = \alpha*\mathbf{0} \Rightarrow_{(G12)} \alpha*\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(PS7) $\alpha*\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $\alpha \neq 0 \Rightarrow_{(U2)} \alpha^{-1}*(\alpha*\mathbf{u}) = \alpha^{-1}*\mathbf{0} \Rightarrow_{(PS3\ e\ PS6)} (\alpha^{-1}\alpha)*\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow 1*\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow_{(PS4)} \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(PS8) immediata conseguenza di (PS5), (PS6) e (PS7)

(PS9) $[1+(-1)] = 0 \Rightarrow_{(U1)} [1+(-1)]*\mathbf{u} = 0*\mathbf{u} \Rightarrow_{(PS2\ e\ PS5)} (1*\mathbf{u})\oplus[(-1)*\mathbf{u}] = \mathbf{0} \Rightarrow_{(PS4)}$

$\Rightarrow \mathbf{u}\oplus[(-1)*\mathbf{u}] = \mathbf{0} \Rightarrow$ $[(-1)*\mathbf{u}]$ è un simmetrico di $\mathbf{u} \Rightarrow_{(G6)} (-1)*\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(PS10) $(-\alpha)*\mathbf{u} = [(-1)\alpha]*\mathbf{u} =_{(PS3)} = (-1)*(\alpha*\mathbf{u}) =_{(PS9)} = -(\alpha*\mathbf{u})$

(PS11) $\alpha*\mathbf{u} = \alpha*\mathbf{v}$ et $\alpha \neq 0 \Rightarrow_{(U2)} \alpha^{-1}*(\alpha*\mathbf{u}) = \alpha^{-1}*(\alpha*\mathbf{v}) \Rightarrow_{(PS3)} (\alpha^{-1}\alpha)*\mathbf{u} = (\alpha^{-1}\alpha)*\mathbf{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1*\mathbf{u} = 1*\mathbf{v} \Rightarrow_{(PS4)} \mathbf{u} = \mathbf{v}$

(PS12) $\alpha*\mathbf{u} = \beta*\mathbf{u}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow_{(G3)} (\alpha*\mathbf{u})\oplus[-(\beta*\mathbf{u})] = \mathbf{0}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow_{(PS10)}$

$(\alpha*\mathbf{u})\oplus[(-\beta)*\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow_{(PS2)} [\alpha+(-\beta)]*\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow_{(PS8)} [\alpha+(-\beta)] = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$ ■