13. Determinante di una matrice quadrata

13.1. Definizione. Dati *n* numeri reali $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{(n-2)}, x_{(n-1)}, x_n$ col simbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ indicheremo la loro somma $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n)$. Quindi,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n$$

13.2. Esempio.

- $\sum_{i=1}^{n} \alpha y_i = \alpha y_1 + \alpha y_2 + \alpha y_3 + \alpha y_4 + \dots.. + \alpha y_{(n-2)} + \alpha y_{(n-1)} + \alpha y_n$
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \dots.. + (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n)$
- $\sum_{i=1}^{n} x_{ih} = x_{1h} + x_{2h} + x_{3h} + x_{4h} + \dots.. + x_{(n-1),h} + x_{(n-1),h} + x_{nh}$
- $\sum_{i=1}^{n} (\alpha y_i + z_{ih}) = (\alpha y_1 + z_{1h}) + (\alpha y_2 + z_{2h}) + (\alpha y_3 + z_{3h}) + \dots.. + (\alpha y_{(n-1)} + z_{(n-1),h}) + (\alpha y_n + z_{nh})$
- $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{h=1}^{m} x_{hi}) = (\sum_{h=1}^{m} x_{h1}) + (\sum_{h=1}^{m} x_{h2}) + (\sum_{h=1}^{m} x_{h3}) + \dots.. + (\sum_{h=1}^{m} x_{h,(n-1)}) + (\sum_{h=1}^{m} x_{hn})$

13.3. Lemma. Valgono le seguenti proprietà:

(0) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_{(n-2)} = x_{(n-1)} = x_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n\alpha$

(1) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (\sum_{i=1}^{n} x_i) + (\sum_{i=1}^{n} y_i)$

(2) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

(3) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i) + \beta(\sum_{i=1}^{n} y_i)$

(4) $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{h=1}^{m} x_{hi}) = \sum_{h=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} x_{hi})$

Dimostrazione.

(0) $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{(n-1)} + x_n = \alpha + \alpha + \alpha + \ldots.. + \alpha + \alpha = n\alpha$

(1) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \ldots..+ (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n) =$

[per le proprietà associativa e commutativa della somma]

$= (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots.. + x_{(n-1)} + x_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots.. + y_{(n-1)} + x_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i) + (\sum_{i=1}^{n} y_i)$

(2) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) = (\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) + \ldots.. + (\alpha x_{(n-1)}) + (\alpha x_n) =$

[per le proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma]

$= \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

(3) Sia X la matrice di tipo m×n avente come elementi proprio i numeri reali x_{hi} .

$$X = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdot\ \cdot & x_{1,(n-1)} & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdot\ \cdot & x_{2,(n-1)} & x_{2,n} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdot\ \cdot & x_{3,(n-1)} & x_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{(m-1),1} & x_{(m-1),2} & x_{(m-1),3} & \cdot\ \cdot & x_{(m-1),(n-1)} & x_{(m-1),n} \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdot\ \cdot & x_{m,(n-1)} & x_{m,n} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to r_1 \\ \to r_2 \\ \to r_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \to r_{(m-1)} \\ \to r_m \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ s_1 & s_2 & s_3 & & s_{(n-1)} & s_n \end{array} & \begin{array}{l} \downarrow \\ \to S \end{array} \end{array}$$

Per ogni indice di riga $h \in \{1, 2, 3, \ldots, (m-1), m\}$ indichiamo con r_h il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della h-esima riga. Quindi,

$$r_h = x_{h1} + x_{h2} + x_{h3} + x_{h4} + \ldots + x_{h,(n-2)} + x_{h,(n-1)} + x_{hn} = \sum_{i=1}^{n} x_{hi}$$

Per ogni indice di colonna $i \in \{1, 2, 3, \ldots, (n-1), n\}$ indichiamo con s_i il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della i-esima colonna. Quindi,

$$s_i = x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} + \ldots + x_{(m-2),i} + x_{(m-1),i} + x_{mi} = \sum_{h=1}^{m} x_{hi}$$

Se indichiamo con S la somma di tutti gli elementi della matrice X, è facile convincersi che

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = S = \sum_{h=1}^{m} r_h$$

Quindi, $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{h=1}^{m} x_{hi}) = \sum_{i=1}^{n} s_i = S = \sum_{h=1}^{m} r_h = \sum_{h=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} x_{hi})$. ■

13.4. Definizione. Sia A una matrice quadrata di tipo m×n ad elementi reali. Se h < m e k < n con il simbolo $A_{\{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3, \ldots,\, \alpha_h\},\{\beta_1,\, \beta_2,\, \beta_3, \ldots,\, \beta_k\}}$ indicheremo la matrice A' di tipo (m–h)×(n–k) ottenuta "*cancellando*" da A le righe di indici $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_h\}$, le colonne di indici $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_k\}$ e "*eliminando gli spazi vuoti*". Diremo anche che A' è una sottomatrice di A.
Se h = k = 1 invece di $A_{\{\alpha\},\{\beta\}}$ scriveremo brevemente $A_{\alpha,\beta}$ e, talvolta, anche solamente $A_{\alpha\beta}$.

13.5. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×8 seguente:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 & 1 & -7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2^a \\ \\ \\ \leftarrow 5^a \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\ 1^a & 2^a & & 4^a & & & 7^a & \end{array} & \end{array}$$

Cancellando da A le righe di indici {2, 5} e le colonne di indici {1, 2, 4, 7} otteniamo

$$\begin{bmatrix} & & 4 & & 1 & -7 & & 0 \\ & & & & & & & \\ & & -1 & & 0 & 0 & & 2 \\ & & 5 & & 5 & -5 & & -5 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Eliminando gli spazi vuoti otteniamo la seguente matrice di tipo 3×4

$$A' = A_{\{2,5\},\{1,2,4,7\}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

13.6. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Si ha che

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_{32} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_{33} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

13.7. Definizione. Sia A una matrice **quadrata** di ordine n ad elementi reali.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{(n-1),(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definiamo *determinante di A*, e lo indichiamo con detA, il **numero reale** seguente:

- se n = 1, cioe' A = $[a_{11}]$, allora $\det A := a_{11}$
- se $n \geq 2$ allora $\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$

13.8. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 2.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} =$$

$$= (-1)^2 a_{11} \det[a_{11}] + (-1)^3 a_{12} \det[a_{12}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

$$= \mathbf{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

13.9. Esempio. Utilizzando quanto visto nell'osservazione precedente abbiamo che:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 15 = -3 \qquad \det\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = (-7) - (-12) = 5 \qquad \det\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = 12 - (-12) = 0$$

13.10. Esempio. Considerando le sottomatrici di ordine 2 dell'esempio 13.6 si ha che:

$$\det A_{11} = \det\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27 \qquad \det A_{12} = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2 \qquad \det A_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5$$

$$\det A_{21} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12 \qquad \det A_{22} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21 \qquad \det A_{23} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38$$

$$\det A_{31} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8 \qquad \det A_{32} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14 \qquad \det A_{33} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35.$$

13.11. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 3.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} =$$

$$= (-1)^{2} a_{11} \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3} a_{12} \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{4} a_{13} \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} =$$

$$= \mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}}.$$

13.12. Osservazione. Lo sviluppo del determinante di ordine 3 si può ricordare utilizzando la "*regola di Sarrus*". Nella riga precedente si osserva che si hanno sei addendi ognuno prodotto di tre fattori. Costruiamo ora una matrice C aggiungendo alla matrice A le prime due colonne di A

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Si può notare che i primi tre addendi corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali discendenti verso destra mentre i secondi tre addendi (quelli preceduti dal segno negativo) corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali ascendenti verso destra.

13.13. Esempio. Si calcoli il determinante delle matrici A e B quadrate di ordine 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$\det A = (-48) + (-11) + (-105) - (220) - (14) - (-18) = -380$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det B = (-30) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -30$$

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

13.14. Lemma. Scambiando due righe il determinante cambia di segno.

13.15. Teorema (O.E.1). Effettuando s scambi di righe il determinante viene moltiplicato per $(-1)^s$.

13.16. Corollario. Se una matrice quadrata ha due righe uguali, allora il suo determinante vale zero.
Dimostrazione. Sia A una matrice avente avente la i-esima riga uguale alla h-esima riga con $i \neq h$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando la i-esima riga con la h-esima riga. Per il Lemma 13.14 è $\det B = -\det A$. D'altronde, è $B = A$ per cui $\det B = \det A$. Quindi, si ha che $\det A = 0$. ■

13.17. Teorema (1° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni indice di riga $h = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ si ha che $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}$

Dimostrazione. Per $h = 1$ la tesi e' vera per definizione. Sia ora $2 \leq h \leq n$.

Siano $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} A_h \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$. Si osservi che:

- B si ottiene da A mediante $(h - 1)$ scambi di righe, quindi, $\det A = (-1)^{h-1} \det B$;
- per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ è $b_{1j} = a_{hj}$
- per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ è $B_{1j} = A_{hj}$

Tenendo conto di tali osservazioni si ha:

$$\det A = (-1)^{h-1} \det B = (-1)^{h-1} [\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j}] = (-1)^{h-1} [\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj}] =$$

$(-1)^{h-1}$ non dipende dall'indice di sommatoria, quindi per la proprietà (2) del Lemma 13.3 ↥

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h-1} (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj} \quad ■$$

13.18. Teorema (O.E.2). Se si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per uno scalare allora il determinante risulta anch'esso moltiplicato per quello scalare.

Dimostrazione. Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando per α la sua h-esima riga, cioè

(♣) per ogni $i \neq h$ è $B_i = A_i$.

(♥) $B_h = \alpha A_h$

allora $\det B = \alpha \det A$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ (\alpha A_h) \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ si ha che

(♣) $\Rightarrow$ $B_{hj} = A_{hj}$

(♥) $\Rightarrow$ $b_{hj} = \alpha a_{hj}$

Per il 1° teorema di Laplace si ha:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} (\alpha a_{hj}) \det A_{hj} = \alpha\Big[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}\Big] = \alpha(\det A). \quad \blacksquare$$

↳ per la proprietà (2) del Lemma 13.3

13.19. Corollario. Se una matrice ha una riga nulla, allora il suo determinante vale zero.

Dimostrazione. Avere una riga nulla è come avere tutti gli elementi di quella riga moltiplicati per zero. ■

13.20. Lemma. Se A, B e C sono tre matrici quadrate di ordine n tali che:

(♣) per ogni $i \neq h$ è $A_i = B_i = C_i$ (A, B e C hanno tutte le righe, esclusa la h-esima, uguali)

(♥) $C_h = A_h + B_h$ (la h-esima riga di C è la somma delle h-esime righe di A e di B)

allora $\det C = \det A + \det B$.

Si osservi che, in generale, è la matrice C **NON** è la somma delle matrici A e B, cioè $C \neq A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ B_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h + B_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ si ha che

(♣) $\Rightarrow$ $C_{hj} = B_{hj} = A_{hj}$

(♥) $\Rightarrow$ $c_{hj} = a_{hj} + b_{hj}$

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} c_{hj} \det C_{hj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} (a_{hj} + b_{hj}) \det C_{hj} = \sum_{j=1}^{n} [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj} + (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj}] =$$

per la proprietà (1) del Lemma 13.3 ⮥

$$= [\sum_{j=1}^{n} [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj}] + [\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj}] =$$

$$= [\sum_{j=1}^{n} [(-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}] + [\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj}] = \det B + \det C \quad \blacksquare$$

13.21. Osservazione. Precisiamo ancora una volta che il Lemma precedente **NON** afferma che il determinante di una somma di due matrici è uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

13.22. Esempio. Per le seguenti matrici A e B si ha che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Se $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, allora $(A + B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$.

Si ha che $\det(A + B) = -2 \neq -13 = -27 + 14 = \det A + \det B$.

Dal Lemma 13.20 e dal Corollario 13.16 segue subito il seguente:

13.23. Teorema (O.E.3). Se ad una riga si aggiunge un'**altra** (diversa) riga moltiplicata per uno scalare qualsiasi allora il determinante **non** cambia.

Dimostrazione. Sia B la matrice ottenuta dalla matrice A aggiungendo alla sua k-esima riga la sua h-esima riga moltiplicata per α. Cioè,

(♣) per ogni $i \neq k$ è $B_i = A_i$.

(♥) $B_k = A_k + \alpha A_h$

$$\det B = \det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_k + \alpha A_h \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_k \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ \alpha A_h \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha\det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha 0 = \det A \quad \blacksquare$$

Dal teorema 13.23 e dal corollario 13.16 seguono subito i seguenti corollari.

13.24. Corollario. Se ad una riga aggiungiamo una combinazione lineare di altre (diverse) righe, allora il determinante non cambia.

13.25. Corollario. Se una riga è combinazione lineare di altre righe, allora il determinante è nullo.

Tenendo conto dei Teoremi 13.15, 13.18 e 13.23 si prova subito il seguente:

13.26. TEOREMA. Sia A una matrice quadrata e sia B la matrice quadrata ottenuta da A tramite un numero finito di operazioni elementari sulle righe di A. Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari **non nulli** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora

$$\det B = (-1)^s(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{(t-1)}\alpha_t)\det A$$

Si osservi che $\quad \det B \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$

13.27. Teorema. Il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.

Dimostrazione. (*per induzione*). Si verifica subito per matrici di ordine 1 e di ordine 2. Proviamo, ora, che se l'enunciato è vero per matrici di ordine (n–1), allora è vero anche per matrici di ordine n. Sia A una matrice quadrata di ordine n triangolare superiore. Per il 1° teorema di Laplace applicato alla sua (ultima) n-esima riga si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

Poiché A è triangolare superiore si ha che per ogni $j \leq (n-1)$ è $a_{nj} = 0$. Quindi,

$$\det A = (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn} = (-1)^{2n} a_{nn} \det A_{nn} = a_{nn} \det A_{nn}$$

Poiché A_{nn} è una matrice di ordine (n-1) triangolare superiore, per l'ipotesi induttiva, si ha che il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale

$$\det A_{nn} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \cdot \ldots . a_{(n-2),(n-2)} a_{(n-1),(n-1)}$$

Quindi, $\det A = a_{nn} \det A_{nn} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \cdot \ldots . a_{(n-2),(n-2)} a_{(n-1),(n-1)} a_{nn}$ ■

13.28. Osservazione. I Teoremi 13.26 e 13.27 ci forniscono un modo comodo per calcolare il determinante di una matrice di ordine "grande". Infatti, se dobbiamo calcolare il determinante di una matrice A possiamo procedere nel modo seguente:

(1) troviamo (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B a scalino; ovviamente, la matrice B è anche triangolare superiore;

(2) calcoliamo il determinante di B che è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale;

(3) Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari **non nulli** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora $\det A = (-1)^s (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{(t-1)}\alpha_t)^{-1} \det B$

13.29. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 38 & -21 \end{bmatrix} \to$

$\to D = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 190 & -105 \end{bmatrix} \to E = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -181 \end{bmatrix}$

$905 = \det E = \det D = 5\det C = 5\det B = 5(-\det A) \Rightarrow \det A = -905/5 = -181.$

Dal Teorema 13.27 e dal Corollario 12.17 si ha subito il seguente:

13.30. Lemma. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

13.31. Teorema. Una matrice quadrata A ha rango massimo se e solo se detA $\neq 0$.

Dimostrazione. Sia A una matrice quadrata. Per il Teorema 11.25 è possibile trovare (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B che abbia lo stesso rango di A. Quindi, il rango di A è massimo se e solo se il rango di B è massimo, ovvero (per il Lemma 13.30) se e solo se il determinante di B è diverso da zero e, quindi, (per il Teorema 13.26) se e solo se il determinante di A è diverso da zero. ■

13.32. Corollario. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione n.
Sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$) una base di V_R.
Sia D = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$) una n-upla ordinata di vettori di V_R.
Per ogni $s \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ sia $\mathbf{a}_s$ la n-upla di coordinate del vettore $\mathbf{v}_s$ rispetto alla base B.
Sia A la matrice avente come righe (o come colonne) le n-uple $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, …, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$.
L'insieme D è una base di V_R se e solo se il determinante della matrice A è diverso da zero.

13.33. Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$) una sua base.
Se consideriamo i seguenti vettori $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$ allora si ha che $\mathbf{a}_0 = (5, 0, 16)$, $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, 1)$ e $\mathbf{a}_3 = (1, -4, -7)$.
Stabilire se le seguenti terne C = ($\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) e D = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$) sono basi di V_R.Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori di C e sia N la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori di D.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Poiché detM = 0 la matrice M <u>non </u>ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_M = \dim\mathcal{R}_M = \mathrm{rg}M \leq 2$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente dipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti. Così la terna C = ($\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) **NON** è una base di V_R.

Poiché detN = $-23 \neq 0$ la matrice N ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_N = \dim\mathcal{R}_N = \mathrm{rg}N = 3$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Così la terna D = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$) è un'<u>altra base</u> di V_R.

13.34 Teorema (2° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni coppia di indici di riga $h,k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ con $h \neq k$ si ha che

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0.$$

Dimostrazione. Siano A e B due matrici tali che sia $B_k = A_h$ e per ogni $i \neq k$ sia $B_i = A_i$. Cioè,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_h \\ . \\ A_k \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ B_h = A_h \\ . \\ B_k = A_h \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ si ha che:

- $b_{kj} = a_{hj}$
- $B_{kj} = A_{kj}$

Per il 1° teorema di Laplace applicato alla k-esima riga di B si ha:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj}$$

D'altronde, si ha anche che $\det B = 0$ poiché B ha due righe uguali (la h-esima e la k-esima).

Quindi, $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0.$ ■

13.35. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Per ogni i,j = 1,2,…,n il numero reale $\mathcal{a}_{ij} := (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ si dice *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij}.

13.36. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo *matrice cofattore* della matrice A, e la indichiamo col simbolo cofA, la matrice quadrata di ordine n ad elementi reali formata dai complementi algebrici $\mathcal{a}_{ij}$ degli elementi a_{ij} di A.

13.37. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo *matrice aggiunta* di A, e la indichiamo col simbolo aggA, la trasposta della matrice cofattore di A.

13.38. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 dell'esempio 13.6:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Dall'Esempio 13.10 si ha che

$\det A_{11} = \det\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27$ $\det A_{12} = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2$ $\det A_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5$

$\det A_{21} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12$ $\det A_{22} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21$ $\det A_{23} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38$

$\det A_{31} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8$ $\det A_{32} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14$ $\det A_{33} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35.$

Quindi,

$\mathcal{a}_{11} = (-1)^{1+1}(-27) = -27$ $\mathcal{a}_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$ $\mathcal{a}_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$

$\mathcal{a}_{21} = (-1)^{2+1}(12) = -12$ $\mathcal{a}_{22} = (-1)^{2+2}(-21) = -21$ $\mathcal{a}_{23} = (-1)^{2+3}(38) = -38$

$\mathcal{a}_{31} = (-1)^{3+1}(-8) = -8$ $\mathcal{a}_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$ $\mathcal{a}_{33} = (-1)^{3+3}(35) = 35$

Per cui $\text{cof}A = \begin{bmatrix} -27 & -2 & 5 \\ -12 & -21 & -38 \\ -8 & -14 & 35 \end{bmatrix}$ e $\text{agg}A = (\text{cof}A)^T = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$

13.39. Osservazione. Tenendo conto della Definizione 13.35 i due teoremi di Laplace si possono brevemente sintetizzare nel modo seguente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj}\boldsymbol{a}_{kj} = (\det A)\delta_{hk}$$

dove δ_{hk} è la *delta di Kronecker* ($\delta_{hk} = 0$ se $h \neq k$, $\delta_{hk} = 1$ se $h = k$).

13.40. Definizione. Chiameremo *matrice unità di ordine n*, e la indicheremo con il simbolo I_n, la matrice quadrata diagonale di ordine n avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1. Quindi, l'elemento che si trova sulla h-esima riga e sulla k-esima colonna di I_n è δ_{hk}.

13.41. Teorema. Per ogni matrice A quadrata di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\mathrm{agg}A) = (\mathrm{agg}A)A = (\det A)I_n$$

dove $(\det A)I_n$ è la matrice diagonale avente come elementi $\delta_{hk}\det A$, cioè avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a detA.

Dimostrazione. Sia $B := A(\mathrm{agg}A)$. Proviamo che $B = I_n$.

Il generico elemento b_{hk} di B è uguale al prodotto riga per colonna della h-esima riga di A

$$(a_{h1} \quad a_{h2} \quad a_{h3} \quad a_{h4} \quad \ldots.. \quad a_{h,(n-1)} \quad a_{hn})$$

per la k-esima colonna di aggA, che è proprio la k-esima riga di cofA

$$(\boldsymbol{a}_{k1} \quad \boldsymbol{a}_{k2} \quad \boldsymbol{a}_{k3} \quad \boldsymbol{a}_{k4} \quad \ldots.. \quad \boldsymbol{a}_{k,(n-1)} \quad \boldsymbol{a}_{kn})$$

Quindi, $b_{hk} = \sum_{j=1}^{n} a_{hj}\boldsymbol{a}_{kj} = (\det A)\delta_{hk}$. Per cui $B = I_n$. Analogamente si ha che $(\mathrm{agg}A)A = (\det A)I_n$. ■

Ricordiamo che il determinante di una somma di due matrici quadrate dello stesso ordine **NON** è, in generale, uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

Invece, vale (ne omettiamo la dimostrazione) il seguente:

13.42. Teorema (Binet). Il determinante del prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici.

14. Matrici invertibili.

14.1. Definizione. Diremo che una *matrice* A **quadrata** di ordine n ad elementi reali è *invertibile* se esiste una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Ovviamente, anche la matrice B è invertibile.

14.2. Osservazione. Se A è una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali invertibile allora esiste ed è unica una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Dimostrazione. Poiché A è per ipotesi invertibile, dobbiamo provare solamente che B è unica. Se esistesse un'altra matrice C quadrata di ordine n ad elementi reali tale che $AC = I_n = CA$, si avrebbe:

$AB = I_n \Rightarrow C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_nB = C \Rightarrow B = C.$ ■

Tenendo conto dell'Osservazione 14.2 è ben posta la seguente:

14.3. Definizione. Se A è una matrice invertibile, allora diremo *matrice inversa* della matrice A, e la indicheremo con il simbolo A^{-1}, l'unica matrice B tale che $AB = I_n = BA$. Quindi,

$$A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

14.4. Osservazione. Ovviamente, se A è invertibile, allora anche A^{-1} è invertibile. Inoltre, l'inversa di A^{-1} è A stessa, cioè $(A^{-1})^{-1} = A$.

14.5. Teorema. Se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche la matrice AB è invertibile ed è $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. Quindi, l'inversa di un prodotto di due matrici invertibili è uguale al prodotto delle inverse delle due matrici prese in ordine "inverso".

Dimostrazione. Poiché A e B sono invertibili esiste la matrice $C := B^{-1}A^{-1}$. Si ha che:

$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

Quindi, per la Definizione 14.1 AB è invertibile e la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ è, per l'Osservazione 14.2, la sua unica inversa. Per cui $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. ■

14.6. Definizione. Diremo che una *matrice quadrata* è *singolare* se il suo determinante è nullo.

Per il Teorema 13.41, per **ogni** matrice quadrata A di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\text{agg}A) = (\text{agg}A)A = (\det A)I_n$$

Come immediata conseguenza del Teorema 13.41 si ha il seguente:

14.7. Lemma. Per ogni matrice A quadrata di ordine n **non** singolare (cioè $\det A \neq 0$) si ha che

$$A[(\det A)^{-1}(\text{agg}A)] = [(\det A)^{-1}(\text{agg}A)]A = I_n$$

Tenendo conto della Definizione 14.1 e dell'Osservazione 14.2 si ha il seguente:

14.8 Teorema. Se A è una matrice quadrata **non** singolare, allora A è invertibile e la sua (unica) inversa è data dal prodotto dell'inverso del determinante di A per la matrice aggiunta di A, cioè

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(\text{agg}A)$$

14.9 Esempio. Se esiste, trovare l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Nell'Esempio 13.29 abbiamo visto che $\det A = -181 \neq 0$. Quindi, la matrice A è non singolare e, per il Teorema 14.8, è invertibile. Inoltre, $A^{-1} = (\det A)^{-1}(\text{agg}A)$.

Nell'Esempio 13.38 abbiamo visto che

$\text{agg}A = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$. Per cui si ha che $A^{-1} = (-1/181)\begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$.

14.10 Esempio. Troviamo l'inversa di una generica matrice non singolare di ordine 2.

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ con $\det A = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$.

$\mathcal{a}_{11} = (-1)^{1+1}\det A_{11} = (-1)^2\det[a_{22}] = a_{22}$ $\mathcal{a}_{12} = (-1)^{1+2}\det A_{12} = (-1)^3\det[a_{21}] = -a_{21}$

$\mathcal{a}_{21} = (-1)^{2+1}\det A_{21} = (-1)^3\det[a_{12}] = -a_{12}$ $\mathcal{a}_{22} = (-1)^{2+2}\det A_{22} = (-1)^4\det[a_{11}] = a_{11}$

Per cui $\operatorname{cof}A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ e $\operatorname{agg}A = (\operatorname{cof}A)^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Infine, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & -\dfrac{a_{12}}{\det A} \\ -\dfrac{a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}$.

Dal Teorema (di Binet) 13.42 abbiamo subito il seguente:

14.11 Corollario. Se A è una matrice invertibile, allora si ha che $\det A \neq 0$, cioè A è **non** singolare. Inoltre, è $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dimostrazione. Sia A una matrice invertibile e A^{-1} la sua inversa. Allora si ha

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$$

Per cui $\det A \neq 0$. Si osservi, inoltre, che è $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. ■

Conseguenza immediata del Teorema 14.8 e del Corollario 14.11 è il seguente:

14.12 Teorema. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se è non singolare.

14.13 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Ovviamente, si ha che

$$B = C \ \Rightarrow \ AB = AC$$

In generale, non vale il viceversa come possiamo vedere nel seguente

14.14 Esempio. Si considerino le seguenti tre matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con semplici calcoli si vede che $AB = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ et $AC = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Quindi, si ha che $AB = AC$ et $B \neq C$

14.15 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Si ha che

$$AB = AC \text{ et } A \text{ è invertibile} \ \Rightarrow \ B = C$$

Dimostrazione.

$AB = AC \ \Rightarrow \ A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \ \Rightarrow \ (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \ \Rightarrow \ I_nB = I_nC \ \Rightarrow \ B = C$ ■

14.16 Esercizi. Se esistono, calcolare le matrici inverse delle seguenti matrici.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -21 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$