15. Cambiamenti di base in uno spazio vettoriale.

15.1 Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia B = $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ una sua base.

Siano $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$

Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ rispetto alla base B e sia N la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ rispetto alla base B.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Poiché detM = 0 la matrice M non ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_M = \dim\mathcal{R}_M = \mathrm{rg}M \leq 2$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente dipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti. Così l'insieme $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ **NON** è una base di V_R.

Poiché detN = –23 ≠ 0 la matrice N ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_N = \dim\mathcal{R}_N = \mathrm{rg}N = 3$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Così l'insieme $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è un'altra base di V_R.

Sia **w** il vettore di V_R avente coordinate (4, 1, –6) rispetto alla base $\underline{B}$, cioè $\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$.

E' molto facile trovare le coordinate di **w** rispetto alla base B, infatti si ha che

$\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3 = 4(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + (-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) - 6(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 + 23\mathbf{u}_2 + 63\mathbf{u}_3$

Quindi, le coordinate di **w** rispetto alla base B sono (1, 23, 63).

Sia, ora, **t** il vettore di V_R avente coordinate (4, –8, –3) rispetto a B, cioè $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$.

Troviamo le coordinate (x, y, z) di **t** rispetto a $\underline{B}$, cioè tali che $\mathbf{t} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Si ha che

$\mathbf{t} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = x(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + y(-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + z(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3)$

$\mathbf{t} = (2x - y + z)\mathbf{u}_1 + (-x + 3y - 4z)\mathbf{u}_2 + (5x + y - 7z)\mathbf{u}_3$

Poichè la scrittura di $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ rispetto alla base B è unica deve essere

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 4z = -8 \\ 5x + y - 7z = -3 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è la terna ordinata (x, y, z) = (1, –1, 1), cioè $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

15.2 Esempio. Siano V_R , $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ come nell'Esempio 15.1. Quindi,

$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$

Sia **w** un generico vettore di V_R . Siccome B e $\underline{B}$ sono due basi, si ha che esistono, e sono <u>uniche</u>, due terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tali che

(I) $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3$

(II) $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3$

Ora, vedremo di trovare il "legame" che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di **w** rispetto alla base $\underline{B}$ e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di **w** rispetto alla base B.

Si ha che $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 = \beta_1(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + \beta_2(-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + \beta_3(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3)$

da cui (III) $\mathbf{w} = = (2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)\mathbf{u}_1 + (-\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3)\mathbf{u}_2 + (5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3)\mathbf{u}_3$

Si osservi che la (III) è una scrittura di **w** come combinazione lineare dei vettori della base B.
Per l'unicità della scrittura di **w** rispetto alla base B, da (I) e (III) si ha che deve essere:

$$(\#)\quad \begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1 \\ -\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 = \alpha_2 \\ 5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Queste equazioni sono il "legame" che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di **w** rispetto alla base $\underline{B}$ e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di **w** rispetto alla base B.

- Note le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di un vettore **w** rispetto alla base $\underline{B}$, con semplici calcoli si trovano le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di **w** rispetto alla base B.

Se (come nell'Esempio 15.1) $\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$ cioè $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (4, 1, -6)$, allora dal sistema (#) si ha **<u>subito</u>** che $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 23, 63)$ e, quindi, $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + 23\mathbf{u}_2 + 63\mathbf{u}_3$.

- Note le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di un vettore **w** rispetto alla base B, **<u>risolvendo</u>** un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, si trovano le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di **w** rispetto alla base $\underline{B}$.

Se (come nell'Esempio 15.1) $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ cioè $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (4, -8, -3)$, allora (#) diventa

$$\begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 4 \\ -\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 = -8 \\ 5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3 = -3 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è la terna ordinata $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, -1, 1)$, cioè $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Nel seguito ci occuperemo di generalizzare quanto appena visto nell'Esempio 15.2.

Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, ….., $\mathbf{u}_n$) una sua base.
Se **w** è un vettore di V_R e ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$) è l'unica n-upla ordinata di numeri reali tale che

(♥) $$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

allora la matrice matrice di tipo n×1 (matrice colonna) così definita:

$$\mathbf{w}_B := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

si dice (matrice) *colonna delle coordinate di **w** rispetto alla base B*.

Sia, ora, $\underline{B}$ = ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n$) un'altra base di V_R. Poiché $\underline{B}$ è una base di V_R esiste un'unica n-upla ordinata di numeri reali ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_n$) tale che:

(♣) $$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 + \beta_4\mathbf{v}_4 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n$$

Quindi, la colonna delle coordinate di **w** rispetto alla base $\underline{B}$ è

$$\mathbf{w}_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ . \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Poiché B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, ….., $\mathbf{u}_n$) è una base di V_R e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono vettori di V_R allora ognuno di essi si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B.
Poiché i coefficienti di tali combinazioni lineari dipendono sia dal vettore $\mathbf{u}_i$ della base B che dal vettore $\mathbf{v}_j$ della base $\underline{B}$, useremo un doppio indice con la convenzione che il primo sia l'indice i del vettore $\mathbf{u}_i$ di B mentre il secondo sia l'indice j del vettore $\mathbf{v}_j$ di $\underline{B}$. Quindi, scriveremo

(1) $\mathbf{v}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 + a_{41}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n1}\mathbf{u}_n$

(2) $\mathbf{v}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 + a_{42}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n2}\mathbf{u}_n$

(3) $\mathbf{v}_3 = a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3 + a_{43}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n3}\mathbf{u}_n$

(4) $\mathbf{v}_4 = a_{14}\mathbf{u}_1 + a_{24}\mathbf{u}_2 + a_{34}\mathbf{u}_3 + a_{44}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n4}\mathbf{u}_n$

....

(n) $\mathbf{v}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + a_{3n}\mathbf{u}_3 + a_{4n}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{nn}\mathbf{u}_n$

Da (♣), (1), (2), (3), (4), ..., (n) si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 + \beta_4\mathbf{v}_4 + \ldots\ldots + \beta_n\mathbf{v}_n = \\
&= \beta_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 + a_{41}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n1}\mathbf{u}_n) + \\
&+ \beta_2(a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 + a_{42}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n2}\mathbf{u}_n) + \\
&+ \beta_3(a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3 + a_{43}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n3}\mathbf{u}_n) + \\
&+ \beta_4(a_{14}\mathbf{u}_1 + a_{24}\mathbf{u}_2 + a_{34}\mathbf{u}_3 + a_{44}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{n4}\mathbf{u}_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \beta_n(a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + a_{3n}\mathbf{u}_3 + a_{4n}\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + a_{nn}\mathbf{u}_n)
\end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà PS1, PS2 e PS3 si ottiene

$$\begin{aligned}
(\blacklozenge)\quad \mathbf{w} &= (\beta_1a_{11} + \beta_2a_{12} + \beta_3a_{13} + \beta_4a_{14} + \ldots\ldots + \beta_na_{1n})\mathbf{u}_1 + \\
&+ (\beta_1a_{21} + \beta_2a_{22} + \beta_3a_{23} + \beta_4a_{24} + \ldots\ldots + \beta_na_{2n})\mathbf{u}_2 + \\
&+ (\beta_1a_{31} + \beta_2a_{32} + \beta_3a_{33} + \beta_4a_{34} + \ldots\ldots + \beta_na_{3n})\mathbf{u}_3 + \\
&+ (\beta_1a_{41} + \beta_2a_{42} + \beta_3a_{43} + \beta_4a_{44} + \ldots\ldots + \beta_na_{4n})\mathbf{u}_4 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (\beta_1a_{n1} + \beta_2a_{n2} + \beta_3a_{n3} + \beta_4a_{n4} + \ldots\ldots + \beta_na_{nn})\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

Si osservi che la (♦) è una scrittura di **w** come combinazione lineare dei vettori della base B.

Ricordiamo che

(♥) $$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \ldots\ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

Per l'unicità della scrittura di **w** rispetto alla base B, dalle (♥) e (♦) si ha che deve essere:

$(E_1)\ \ \alpha_1 = \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \beta_3 a_{13} + \beta_4 a_{14} + \ldots.. + \beta_n a_{1n}$

$(E_2)\ \ \alpha_2 = \beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{23} + \beta_4 a_{24} + \ldots.. + \beta_n a_{2n}$

$(E_3)\ \ \alpha_3 = \beta_1 a_{31} + \beta_2 a_{32} + \beta_3 a_{33} + \beta_4 a_{34} + \ldots.. + \beta_n a_{3n}$

$(E_4)\ \ \alpha_4 = \beta_1 a_{41} + \beta_2 a_{42} + \beta_3 a_{43} + \beta_4 a_{44} + \ldots.. + \beta_n a_{4n}$

……………………………………………

$(E_n)\ \ \alpha_n = \beta_1 a_{n1} + \beta_2 a_{n2} + \beta_3 a_{n3} + \beta_4 a_{n4} + \ldots.. + \beta_n a_{nn}$

Il sistema di equazioni (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), …., (E_n) è il "legame" che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots.., \beta_n)$ di **w** rispetto a <u>B</u> e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ di **w** rispetto a B.

<u>Ora troviamo un modo comodo di rappresentare questo sistema</u>.

Da (1), (2), (3), (4), ..., (n) si che le colonne delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots.., \mathbf{v}_n$ rispetto alla base B = $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots.., \mathbf{u}_n)$ sono

$$(\mathbf{v}_1)_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_2)_B = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_3)_B = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ . \\ . \\ a_{n3} \end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_4)_B = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ . \\ . \\ a_{n4} \end{bmatrix}, \ldots.. ,\ (\mathbf{v}_n)_B = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Stabiliamo</u> che $A_{(\underline{B}\to B)}$ sia la matrice quadrata di ordine n avente come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate (rispetto alla base B) dei vettori della base <u>B</u>, cioè:

$$A_{(\underline{B}\to B)} = [\ (\mathbf{v}_1)_B \mid (\mathbf{v}_2)_B \mid (\mathbf{v}_3)_B \mid (\mathbf{v}_4)_B \mid \ldots\ldots \mid (\mathbf{v}_n)_B\ ]$$

$$A_{(\underline{B}\to B)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & a_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & . & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Osservando (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), ….., (E_n) e tenendo conto di come è definito il prodotto riga per colonna tra due matrici moltiplicabili e si ha che:

• l'elemento α_1 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della prima riga di $A_{(\underline{B}\rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

• l'elemento α_2 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della seconda riga di $A_{(\underline{B}\rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

• l'elemento α_3 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della terza riga di $A_{(\underline{B}\rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

• l'elemento α_4 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della quarta riga di $A_{(\underline{B}\rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

………………………………………

• l'elemento α_n di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della n-esima riga di $A_{(\underline{B}\rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

Quindi, la colonna $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della matrice $A_{(\underline{B}\rightarrow B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$ ovvero

$$\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B}\rightarrow B)}\mathbf{w}_{\underline{B}}$$

Per cui, il sistema di equazioni (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), …., (E_n) si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . \; . \; . \; . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . \; . \; . \; . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . \; . \; . \; . & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . \; . \; . \; . & a_{4n} \\ . & . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & . \; . \; . \; . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ . \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Tenendo conto che ognuna delle n colonne delle coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B è univocamente determinata, si ha subito la seguente:

15.3 Osservazione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Ogni volta che si **<u>fissano</u>** due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice $A_{(\underline{B}\rightarrow B)}$ quadrata di ordine n avente come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B è univocamente determinata.

15.4 Lemma. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n.

Siano B = $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ due sue basi.

Sia **w** un generico vettore di V_R. Se H è una matrice tale che $\mathbf{w}_B = H\mathbf{w}_{\underline{B}}$ allora $H = A_{(\underline{B}\to B)}$.

Dimostrazione. Per i vettori della base $\underline{B}$ si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots + 0\mathbf{v}_n\\
\mathbf{v}_2 &= 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots + 0\mathbf{v}_n\\
\mathbf{v}_3 &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots + 0\mathbf{v}_n\\
\mathbf{v}_4 &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 1\mathbf{v}_4 + \ldots + 0\mathbf{v}_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{v}_n &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots + 1\mathbf{v}_n
\end{aligned}$$

Quindi, le colonne delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n$ rispetto alla base $\underline{B}$ sono:

$$(\mathbf{v}_1)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_2)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_3)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_1)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ \ldots\ldots,\ (\mathbf{v}_1)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\.\\.\\1\end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che per ogni vettore $\mathbf{v}_i$ è $H(\mathbf{v}_i)_{\underline{B}}$ = i-esima colonna di H. Quindi, si ha che

- prima colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_1)_B = H(\mathbf{v}_1)_{\underline{B}}$ = prima colonna di H;
- seconda colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_2)_B = H(\mathbf{v}_2)_{\underline{B}}$ = seconda colonna di H;
- terza colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_3)_B = H(\mathbf{v}_3)_{\underline{B}}$ = terza colonna di H;
- quarta colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_4)_B = H(\mathbf{v}_4)_{\underline{B}}$ = quarta colonna di H;

……………………………………………………..

- n-esima colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_n)_B = H(\mathbf{v}_n)_{\underline{B}}$ = n-esima colonna di H.

Essendo le colonne di H ordinatamente uguali alle colonne di $A_{(\underline{B}\to B)}$ si ha che $H = A_{(\underline{B}\to B)}$. ■

Tenendo conto del Lemma 15.4 è ben posta la seguente:

15.5 DEFINIZIONE. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n.

Siano B = $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ due sue basi.

La matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ che ha come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B viene detta *matrice del cambiamento di base da $\underline{B}$ a B.*

Le n equazioni rappresentate con l'equazione matriciale $\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B}\to B)}\mathbf{w}_{\underline{B}}$ si dicono *equazioni del cambiamento di base*.

Tenendo conto che, per costruzione, le colonne di $A_{(\underline{B}\to B)}$ sono le n-uple delle coordinate di n vettori linearmente indipendenti (gli elementi della base $\underline{B}$) si ha che tali colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ ha rango massimo. Per il Teorema 13.31 il determinante della matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è diverso da zero, cioè la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è non singolare. Tenendo conto del Teorema 14.12 abbiamo subito la seguente:

15.6 Osservazione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Fissate due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è invertibile.

15.7 TEOREMA. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Fissate due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice del cambiamento di base da da B a $\underline{B}$ è uguale all'inversa della matrice del cambiamento di base da $\underline{B}$ a B. Cioè

$$A_{(B\to\underline{B})} = [A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{w}$ è un generico vettore di V_R si ha che $\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B}\to B)}\mathbf{w}_{\underline{B}}$. Tenendo conto che per l'Osservazione 15.6 la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è invertibile, si ha che $[A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1}\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_{\underline{B}}$.

Per il Lemma 15.4 è $[A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1} = A_{(B\to\underline{B})}$. ■

15.8 TEOREMA. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Fissate tre sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $C = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \ldots, \mathbf{e}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ si ha che:

$$A_{(\underline{B}\to B)} = A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{w}$ è un generico vettore di V_R si ha che

$$[A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}]\mathbf{w}_{\underline{B}} = A_{(C\to B)}[A_{(\underline{B}\to C)}\mathbf{w}_{\underline{B}}] = A_{(C\to B)}\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_B$$

Per cui, la matrice $A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}$ esprime il cambiamento di coordinate dalla base $\underline{B}$ alla base B. Quindi, per il Lemma 15.4 si ha che $A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)} = A_{(\underline{B}\to B)}$. ■

15.9 Osservazione. Il Teorema 15.7 ci permette di trovare la matrice del cambiamento di base dalla base $\underline{B}$ alla base B "*transitando*" per la base C. Inoltre, **<u>si noti</u>** l'ordine delle matrici nel prodotto

$$A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}$$

La matrice che fa passare da $\underline{B}$ a C è il fattore a destra mentre la matrice che poi fa passare da C a B è il fattore a sinistra. Questo è dovuto (come si vede nella dimostrazione del Teorema 15.7) al fatto che prima la matrice $A_{(\underline{B}\to C)}$ "*agisce*" su $\mathbf{w}_{\underline{B}}$ e, poi, la matrice $A_{(C\to B)}$ "*agisce*" su $\mathbf{w}_C$.

15.10 Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 2 e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ una sua base. Consideriamo i seguenti vettori $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$ di V_R.

Sia $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ la matrice avente come colonne ordinatamente $(\mathbf{v}_1)_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $(\mathbf{v}_2)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det M = -1 \neq 0$ le due colonne di M sono linearmente indipendenti. Quindi, anche i due vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Così l'insieme $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è un'<u>altra base</u> di V_R.

Inoltre, M è proprio la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ del cambiamento di base da $\underline{B}$ a B, cioè

$$A_{(\underline{B}\to B)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Per il Teorema 15.7 la matrice $A_{(B\to\underline{B})}$ del cambiamento di base da B a $\underline{B}$ è $[A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1}$. Quindi,

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Poiché $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = (1/-1)(\mathrm{agg}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}) = -\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ si ha che

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Sia $\mathbf{w}$ un generico vettore dello spazio V_R. Se indichiamo con:

- (β_1, β_2) le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\underline{B}$
- (α_1, α_2) le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B

allora le equazioni del cambiamento di base da $\underline{B}$ a B sono $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

mentre le equazioni del cambiamento di base da B a $\underline{B}$ sono $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$

Con tali equazioni è molto veloce trovare come cambiano le coordinate di un vettore.

Se $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ cioè $(\beta_1, \beta_2) = (1, 2)$ si ha <u>**subito**</u> che $(\alpha_1, \alpha_2) = (4, -11)$ cioè $\mathbf{w} = 4\mathbf{u}_1 - 11\mathbf{u}_2$.

Se $\mathbf{t} = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$ cioè $(\alpha_1, \alpha_2) = (3, -2)$ si ha <u>**subito**</u> che $(\beta_1, \beta_2) = (7, -11)$, cioè $\mathbf{t} = 7\mathbf{v}_1 - 11\mathbf{v}_2$.

15.11 Esempio. Sia $V_R = R^3$ lo spazio vettoriale reale delle terne ordinate di numeri reali.

Siano $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 5, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$.

Dopo aver verificato che $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono due basi di R^3 trovare la matrice del cambiamento di base dalla base $\underline{B}$ alla base B.

(1) Sia M la matrice avente come colonne proprio le terne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e sia N la matrice avente come colonne proprio le terne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, cioè $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Poiché $\det M = -1 \neq 0$ e $\det N = -1 \neq 0$ sia le tre terne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ che le tre terne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Quindi, $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono due basi di R^3.

(2) Ricordiamo che se $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ allora $C = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base (canonica) di R^3. Si noti che:

$\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1) = 2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

$\mathbf{u}_2 = (0, 5, 1) = 0\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

$\mathbf{u}_3 = (-1, 3, 0) = (-1)\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0) = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1) = 1\mathbf{e}_1 + (-1)\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1) = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

Quindi, si ha che $M = A_{(B\to C)}$ e $N = A_{(\underline{B}\to C)}$

Per i Teoremi 15.8 e 15.7 si ha che $A_{(\underline{B}\to B)} = A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)} = [A_{(B\to C)}]^{-1}A_{(\underline{B}\to C)} = M^{-1}N$.

Da $\operatorname{cof} M = \operatorname{cof}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -6 & 10 \end{bmatrix}$ si ha subito che $M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

Si ha che $A_{(\underline{B}\to B)} = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \\ 7 & -7 & -5 \end{bmatrix}$.

Tenendo conto che le colonne di $A_{(\underline{B}\to B)}$ sono le coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B, possiamo <u>verificare</u> la correttezza del risultato nel modo seguente:

$\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + 7\mathbf{u}_3 = 4(2, 0, 1) - 4(0, 5, 1) + 7(-1, 3, 0) = (1, 1, 0)$ ☺

$\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3 = -3(2, 0, 1) + 4(0, 5, 1) - 7(-1, 3, 0) = (1, -1, 1)$ ☺

$\mathbf{v}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3 = -2(2, 0, 1) + 3(0, 5, 1) - 5(-1, 3, 0) = (1, 0, 1)$ ☺

Tenendo conto che per ogni numero reale ω si ha che $(\cos^2\omega + \sin^2\omega) = 1$, **ogni** matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

è non singolare e, quindi, è invertibile. Inoltre, è facile verificare che

$$\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

15.12 Osservazione. Sia $V_R = R^2$ lo spazio vettoriale reale delle coppie ordinate di numeri reali. Per ogni numero reale ω, le due coppie $\mathbf{w}_1 = (\cos\omega, \sin\omega)$ e $\mathbf{w}_2 = (-\sin\omega, \cos\omega)$ sono linearmente indipendenti e, quindi, l'insieme $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ è una base di R^2.

15.13 Esempio. Sia $V_R = R^2$ lo spazio vettoriale reale delle coppie ordinate di numeri reali.
Siano $\mathbf{u}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathbf{u}_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, $\mathbf{v}_1 = (\cos\beta, \sin\beta)$ e $\mathbf{v}_2 = (-\sin\beta, \cos\beta)$.
Per l'Osservazione 15.12 gli insiemi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ sono due basi di R^2.
Trovare la matrice $A_{(B\to\underline{B})}$ del cambiamento di base dalla base B alla base $\underline{B}$.

Se indichiamo con $C = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonica di R^2 si ha che

$$A_{(B\to C)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{(\underline{B}\to C)} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Per i Teoremi 15.8 e 15.7 si ha che $A_{(B\to\underline{B})} = A_{(C\to\underline{B})}A_{(B\to C)} = [A_{(\underline{B}\to C)}]^{-1}A_{(B\to C)}$. Per cui

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) & -(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) \\ (\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) & (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) \end{bmatrix}$$

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

16. Teorema degli orlati e sue applicazioni.

Ricordiamo che se $p \in N$ allora col simbolo I_p indichiamo l'insieme $\{1, 2, 3, 4, \ldots, p\}$.

Sia A una matrice ad elementi reali di tipo $m \times n$ e sia s un intero tale che $0 \le s \le \min\{m, n\}$.

Si scelgano s righe di A e s colonne di A.

Siano $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \ldots < i_s$ gli indici delle righe scelte.

Siano $j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < \ldots < j_s$ gli indici delle colonne scelte.

Sia B la *sottomatrice* di A che si ottiene "cancellando" da A

- le $(m-s)$ righe aventi indice nell'insieme $I_m - \{i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_s\}$;
- le $(n-s)$ colonne aventi indice nell'insieme $I_n - \{j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots, j_s\}$.

Se poniamo $R_B := \{i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_s\} \subseteq I_m$ e $C_B := \{j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots, j_s\} \subseteq I_n$ allora

$$B = A_{(I_m - R_B),(I_n - R_C)}$$

Ovviamente, B è una matrice **quadrata** di ordine s.

16.1. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sia s = 3 e scegliamo la 2^a, 3^a e 5^a riga di A e la 3^a, 4^a e 6^a colonna di A.

Quindi, si ha che $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 5$, $j_1 = 3$, $j_2 = 4$ e $j_3 = 6$. Cioè, $R_B = \{2, 3, 5\}$ e $C_B = \{3, 4, 6\}$.

B è la sottomatrice di A ottenuta "cancellando" da A la 1^a e 4^a riga e la 1^a, 2^a, 5^a e 7^a colonna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & 1 & 0 & \# & -2 & \# \\ \# & \# & 0 & 0 & \# & 4 & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -7 & 7 & \# & 0 & \# \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = A_{\{1,4\},\{1,2,5,7\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

B è una matrice quadrata di ordine 3.

<u>Per costruzione</u>, l'elemento che si trova sulla h-esima riga e k-esima colonna di B è l'elemento che si trova sulla i_h-esima riga e sulla j_k -esima colonna di A, cioè

$$b_{hk} = a_{i_h j_k}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & . & . & . & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & . & . & . & b_{2s} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & . & . & . & b_{3s} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & . & . & . & b_{4s} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & b_{s4} & . & . & . & b_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & a_{i_1 j_4} & . & . & . & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & a_{i_2 j_4} & . & . & . & a_{i_2 j_s} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} & a_{i_3 j_4} & . & . & . & a_{i_3 j_s} \\ a_{i_4 j_1} & a_{i_4 j_2} & a_{i_4 j_3} & a_{i_4 j_4} & . & . & . & a_{i_4 j_s} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & a_{i_s j_3} & a_{i_s j_4} & . & . & . & a_{i_s j_s} \end{bmatrix}$$

16.2. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo scelto $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 5$, $j_1 = 3$, $j_2 = 4$ e $j_3 = 6$

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & a_{23} & a_{24} & \# & a_{26} & \# \\ \# & \# & a_{33} & a_{34} & \# & a_{36} & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & a_{53} & a_{54} & \# & a_{56} & \# \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{26} \\ a_{33} & a_{34} & a_{36} \\ a_{53} & a_{54} & a_{56} \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Quindi,

$b_{11} = a_{23} = a_{i_1 j_1}$ $\quad b_{12} = a_{24} = a_{i_1 j_2}$ $\quad b_{13} = a_{26} = a_{i_1 j_3}$

$b_{21} = a_{33} = a_{i_2 j_1}$ $\quad b_{22} = a_{34} = a_{i_2 j_2}$ $\quad b_{23} = a_{36} = a_{i_2 j_3}$

$b_{31} = a_{53} = a_{i_3 j_1}$ $\quad b_{32} = a_{54} = a_{i_3 j_2}$ $\quad b_{33} = a_{56} = a_{i_3 j_3}$

cioè

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{bmatrix}$$

Siano, ora, $x\in(I_m-R_B)$ l'indice di una riga di A che <u>non</u> è stata scelta per costruire B e $y\in(I_n-C_B)$ l'indice di una colonna di A che <u>non</u> è stata scelta per costruire B.

16.3. Definizione. Sia La sottomatrice C **<u>quadrata</u>** di ordine (s+1) così ottenuta

$$C=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & . & . & b_{1s} & a_{i_1y} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & . & . & b_{2s} & a_{i_1y} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & . & . & b_{3s} & a_{i_1y} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & . & . & b_{4s} & a_{i_1y} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & b_{s4} & . & . & b_{ss} & a_{i_sy} \\ a_{xj_1} & a_{xj_2} & a_{xj_3} & a_{xj_4} & . & . & a_{xj_s} & a_{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & a_{i_1j_3} & a_{i_1j_4} & . & . & a_{i_1j_s} & a_{i_1y} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & a_{i_2j_3} & a_{i_2j_4} & . & . & a_{i_2j_s} & a_{i_2y} \\ a_{i_3j_1} & a_{i_3j_2} & a_{i_3j_3} & a_{i_3j_4} & . & . & a_{i_3j_s} & a_{i_3y} \\ a_{i_4j_1} & a_{i_4j_2} & a_{i_4j_3} & a_{i_4j_4} & . & . & a_{i_4j_s} & a_{i_4y} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i_sj_1} & a_{i_sj_2} & a_{i_sj_3} & a_{i_sj_4} & . & . & a_{i_sj_s} & a_{i_sy} \\ a_{xj_1} & a_{xj_2} & a_{xj_3} & a_{xj_4} & . & . & a_{xj_s} & a_{xy} \end{bmatrix}$$

viene detta *sottomatrice orlata di B*.

16.4. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & 1 & 0 & \# & -2 & \# \\ \# & \# & 0 & 0 & \# & 4 & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -7 & 7 & \# & 0 & \# \end{bmatrix}$$

e sia B la sua seguente sottomatrice quadrata di ordine 3

$$B=A_{\{1,4\},\{1,2,5,7\}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Siano x = 4 e y = 1 rispettivamente l'indice di una riga e l'indice di una colonna di A che non sono state usate per costruire B.

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & & b_{11} & b_{12} & & b_{13} & \\ 0 & & b_{21} & b_{22} & & b_{23} & \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & & b_{31} & b_{32} & & b_{33} & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \# & & & & & & \\ 1 & & b_{11} & b_{12} & & b_{13} & \\ 0 & & b_{21} & b_{22} & & b_{23} & \\ 9 & \# & -1 & 1 & \# & 8 & 1 \\ -7 & & b_{31} & b_{32} & & b_{33} & \end{bmatrix}$$

Quindi, $C=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & -7 \\ -1 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -7 & 7 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice orlata di B.

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

16.5. Teorema (degli orlati). Sia A una matrice non nulla ad elementi reali di tipo m×n e sia B una sua sottomatrice quadrata di ordine s non singolare. Il rango della matrice A è uguale a s se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

16.6. Esempio. Al variare del parametro reale t, trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ -1 & 2 & t \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \# \\ -1 & 2 & \# \\ \# & \# & \# \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = 2 \neq 0$).

Quindi, $2 \leq rg(A) \leq 3$. Inoltre, $rg(A) = 2$ se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Ma l'unica sottomatrice orlata di B è la matrice A stessa. Quindi, $rg(A) = 2$ se solo se $\det A = 0$.

Siccome $\det A = 6 - 2t$, si ha che $rg(A) = 2$ solo per $t = 3$ e $rg(A) = 3$ per ogni altro valore di t.

16.7. Esempio. Al variare del parametro reale t, trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $\begin{bmatrix} \# & 0 & 1 & \# \\ \# & 1 & 0 & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = -1 \neq 0$).

Quindi, $2 \leq rg(A) \leq 3$. Inoltre, $rg(A) = 2$ se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Esistono due sottomatrici orlate di B

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per cui, $rg(A) = 2$ se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$, ovvero se e solo se $t^2 - 1\ 0$ et $t + 1 = 0$.

Quindi, $rg(A) = 2$ solo per $t = -1$ e $rg(A) = 3$ per ogni altro valore di t.

16.8. Esempio. Al variare del parametro reale t, trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} t & t^2 & 0 & 64 & -8 \\ 1 & 8 & 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Si vede che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & 8 & 0 & \# & \# \\ \# & 0 & 6 & \# & \# \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare (detB = 48 ≠ 0).

Quindi, 2 ≤ rg(A) ≤ 3. Inoltre, rg(A) = 2 se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Esistono tre sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} t & t^2 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} t^2 & 0 & 64 \\ 8 & 0 & t \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ $C_3 = \begin{bmatrix} t^2 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Per cui, rg(A) = 2 se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$ et $\det C_3 = 0$, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} 6t(8-t) = 0 \\ 6(8-t)(t^2+8t+64) = 0 \\ 6(t-8)(t+8) = 0 \end{cases}$$

Quindi, rg(A) = 2 solo per t = 8 e rg(A) = 3 per ogni altro valore di t.

16.9. Esempio. Sia $V_R = R^4$. Sia $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$.

Trovare le *equazioni cartesiane del sottospazio* $U = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$.

Sia **v** = (w, x, y, z) un generico vettore di R^4. Il vettore **v** appartiene al sottospazio U se e solo se **v** è multiplo del vettore $\mathbf{u}_1$ ovvero **v** e $\mathbf{u}_1$ sono linearmente dipendenti.

Sia $A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ la matrice avente come righe le quaterne **v** e $\mathbf{u}_1$.

I vettori **v** e $\mathbf{u}_1$ sono linearmente dipendenti se e solo se rg(A) = 1.

Si vede subito che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 1 & \# & \# & \# \end{bmatrix} \to B = [1]$ è una sottomatrice non singolare (detB = 1 ≠ 0).

Esistono tre sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} w & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} w & y \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $C_3 = \begin{bmatrix} w & z \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Per cui, rg(A) = 1 se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$ et $\det C_3 = 0$, ovvero se e solo se

$\begin{cases} x = 0 \\ 2w + y = 0 \\ 3w - z = 0 \end{cases}$. Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid x = 2w + y = 3w - z = 0\}$.

16.10. Esempio. Sia $V_R = R^4$. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$ e $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 1)$.

Trovare le equazioni del sottospazio $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.

Sia $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ un generico vettore di R^4. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al sottospazio U se e solo se $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ ovvero $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente dipendenti. Sia A la matrice avente le quaterne $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ come righe

$$A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se rg(A) = 2.

Si vede che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -2 & 3 \\ \# & \# & 0 & 1 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = -2 \neq 0$).

Esistono due sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} w & y & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Per cui, rg(A) = 2 se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$, ovvero se e solo se $\begin{cases} x = 0 \\ 2w - 5y - 4z = 0 \end{cases}$.

Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid x = 2w - 5y - 4z = 0\}$.

16.11. Esempio. Sia $V_R = R^4$. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 7, -4)$.

Trovare le equazioni del sottospazio $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.

Sia $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ un generico vettore di R^4. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al sottospazio U se e solo se $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ ovvero $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti. Sia A la matrice avente le quaterne $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ come righe

$$A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

I vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti se e solo se rg(A) = 3, cioè A non ha rango massimo, ovvero se e solo se $\det A = 0$ e, quindi, se e solo se $(-2w - 19x + 5y + 4z) = 0$.

Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid 2w + 19x - 5y - 4z = 0\}$.