6.5 Prodotto di due matrici.

Consideriamo una matrice di tipo m×n ad elementi reali rappresentata nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . \ . \ . & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . \ . \ . & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . \ . \ . & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \ . \ . & . & . \\ . & . & . & . & . \ . \ . & . & . \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & a_{(m-1)3} & a_{(m-1)4} & . \ . \ . & a_{(m-1),(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & . \ . \ . & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Per ogni i = 1, 2, 3, 4, …, (m-1), m, col simbolo A_i indicheremo la i-esima riga della matrice A. Siccome A è una matrice di tipo m×n, la riga A_i è una n-upla ordinata di numeri reali

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, \ldots, a_{i(n-1)}, a_{in})$$

Per ogni j = 1, 2, 3, 4, …, (n-1), n, col simbolo A^j indicheremo la j-esima colonna della matrice A. Siccome A è una matrice di tipo m×n, la colonna A^j è una m-upla ordinata di numeri reali

$$A^j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}, \ldots, a_{(m-1)j}, a_{mj})$$

6.5.1. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

Le due **righe** di A sono le **terne** ordinate $A_1 = (2, 3, 0)$ e $A_2 = (1, -7, 4)$.

Le tre **colonne** di A sono le **coppie** ordinate $A^1 = (2, 1)$, $A^2 = (3, -7)$ e $A^3 = (0, 4)$.

6.5.2. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Le tre **righe** di A sono le **quaterne** ordinate $A_1 = (1, 1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 5, 1, 0)$ e $A_3 = (3, 23, 4, 0)$.

Le quattro **colonne** di A sono le **terne** ordinate $A^1 = (1, 0, 3)$, $A^2 = (1, 5, 23)$, $A^3 = (0, 10, 4)$ e $A^4 = (0, 0, 0)$.

6.5.3. Definizione. Siano **a** = (a_1, a_2, a_3, , a_n) e **b** = (b_1, b_2, b_3, , b_n) due n-uple ordinate di numeri reali. Diremo *prodotto scalare* delle due n-uple **a** e **b** il numero reale seguente:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$$

Il prodotto scalare delle due n-uple **a** e **b** sarà indicato col simbolo ● per cui scriveremo

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$$

Osserviamo che **non** è stato definito il prodotto scalare tra una n-upla ed una m-upla con $m \neq n$.

6.5.4. Esempio. Il prodotto scalare delle due quaterne ordinate **a** = (1, –2, 0, 7) e **b** = (3, –3, 7, –5) è

$$1*3 + (-2)*(-3) + 0*7 + 7*(-5) = 3 + 6 + 0 - 35 = \mathbf{-26}$$

6.5.5. Definizione. Sia A una matrice ad elementi reali di tipo m×n e B una matrice ad elementi reali di tipo p×q. Diremo che A è *conformabile* a B se il numero n delle colonne di A è uguale al numero p delle righe di B, cioè

$$A_{m\times n} \text{ è conformabile a } B_{p\times q} \text{ se } n = p$$

6.5.6. Osservazione. Se una matrice A è conformabile a una matrice B, non è detto che valga il viceversa ovvero che la matrice B sia conformabile alla matrice A. Infatti, per ogni scelta dei numeri m e q una matrice $A_{m\times n}$ è conformabile ad una matrice $B_{n\times q}$ ma $B_{n\times q}$ è conformabile ad $A_{m\times n}$ se e solo se q = m.

6.5.7. Esempio. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Si vede subito che la matrice A di tipo 2×3 è conformabile alla matrice B di tipo 3×4.

Inoltre, si vede anche che la matrice B non è conformabile alla matrice A.

6.5.8. Definizione. Sia A = $[a_{ih}]$ una matrice di tipo m×n conformabile ad una matrice B = $[b_{hj}]$ di tipo n×q. Sia C = $[c_{ij}]$ la matrice di tipo m×q tale che il generico elemento l'elemento c_{ij} (cioè quello che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna di C) è dato dal prodotto scalare della n-upla A_i con la n-upla B^j ovvero

$$c_{ij} := A_i \bullet B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{i(n-1)}b_{(n-1)j} + a_{in}b_{nj}$$

La matrice C viene detta ***prodotto*** della matrice A con la matrice B (in quest'ordine) e scriveremo

$$AB = C$$

6.5.9. Esempio. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Si vede subito che la matrice A è conformabile alla matrice B.

Per definizione il prodotto di A con B è la matrice C di tipo 2×1 i cui elementi sono:

$c_{11} = A_1 \bullet B^1 = (2, 3, 0) \bullet (-1, 3, -2) = 2*(-1)+3*3+0*(-2) = -2+9+0 = 7$

$c_{21} = A_2 \bullet B^1 = (1, -7, 4) \bullet (-1, 3, -2) = 1*(-1)+(-7)*3+4*(-2) = -1-21-8 = -30$

Per cui abbiamo che $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -30 \end{bmatrix}$

6.5.10. Esempio. Siano $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$.

Si vede subito che la matrice A è conformabile alla matrice B.

Per definizione il prodotto di A con B è la matrice C di tipo 1×3 i cui elementi sono:

$c_{11} = A_1 \bullet B^1 = (2, -5) \bullet (2, 1) = 2*2+(-5)*1 = 4-5 = -1$

$c_{12} = A_1 \bullet B^2 = (2, -5) \bullet (3, -7) = 2*3+(-5)*(-7) = 6+35 = 41$

$c_{13} = A_1 \bullet B^3 = (2, -5) \bullet (0, 4) = 2*0+(-5)*4 = 0-20 = -20$

Per cui abbiamo che $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 41 & -20 \end{bmatrix}$

6.5.11. Esempio. Siano A = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Si vede subito che la matrice A è conformabile alla matrice B.

Per definizione il prodotto di A con B è la matrice C di tipo 1×1 i cui elementi sono:

$c_{11} = A_1 \bullet B^1 = (5, 0, -2) \bullet (-1, 3, -2) = 5*(-1)+0*3+(-2)*(-2) = -5+0+4 = -1$

Per cui abbiamo che AB = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

6.5.12. Esempio. Siano A = $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Si vede subito che A è conformabile ad B.

Per definizione il prodotto è una matrice di tipo 3×3 i cui elementi sono:

$c_{11} = A_1 \bullet B^1 = (-1)*0 = 0$ $\quad c_{12} = A_1 \bullet B^2 = (-1)*3 = -3$ $\quad c_{13} = A_1 \bullet B^3 = (-1)*(-2) = 2$

$c_{21} = A_2 \bullet B^1 = 5*0 = 0$ $\quad c_{22} = A_2 \bullet B^2 = 5*3 = 15$ $\quad c_{23} = A_2 \bullet B^3 = 5*(-2) = -10$

$c_{31} = A_3 \bullet B^1 = (-2)*0 = 0$ $\quad c_{32} = A_3 \bullet B^2 = (-2)*3 = -6$ $\quad c_{33} = A_3 \bullet B^3 = (-2)*(-2) = 4$

Per cui abbiamo che AB = $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 15 & -10 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

6.5.13. Esempio. Siano A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice A è conformabile alla matrice B.

Per definizione il prodotto di A con B è la matrice C di tipo 2×4 i cui elementi sono:

$c_{11} = A_1 \bullet B^1 = (2, 3, 0) \bullet (1, 0, 3) = 2*1+3*0+0*3 = 2+0+0 = 2$

$c_{12} = A_1 \bullet B^2 = (2, 3, 0) \bullet (1, 5, 23) = 2*1+3*5+0*23 = 2+15+0 = 17$

$c_{13} = A_1 \bullet B^3 = (2, 3, 0) \bullet (0, 10, 4) = 2*0+3*10+0*4 = 0+30+0 = 30$

$c_{14} = A_1 \bullet B^4 = (2, 3, 0) \bullet (0, 0, 0) = 2*0+3*0+0*0 = 0+0+0 = 0$

$c_{21} = A_2 \bullet B^1 = (1, -7, 4) \bullet (1, 0, 3) = 1*1+(-7)*0+4*3 = 1+0+12 = 13$

$c_{22} = A_2 \bullet B^2 = (1, -7, 4) \bullet (1, 5, 23) = 1*1+(-7)*5+4*23 = 1-35+92 = 58$

$c_{23} = A_2 \bullet B^3 = (1, -7, 4) \bullet (0, 10, 4) = 1*0+(-7)*10+4*4 = 0-70+16 = -54$

$c_{24} = A_2 \bullet B^4 = (1, -7, 4) \bullet (0, 0, 0) = 1*0+(-7)*0+4*0 = 0+0+0 = 0$

Per cui abbiamo che

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 4 & 0 \end{bmatrix} = AB = C = \begin{bmatrix} 2 & 17 & 30 & 0 \\ 13 & 58 & -54 & 0 \end{bmatrix}$$

6.5.14. Osservazione. Siano A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Abbiamo appena visto che AB = $\begin{bmatrix} 2 & 17 & 30 & 0 \\ 13 & 58 & -54 & 0 \end{bmatrix}$. Inoltre, siccome la matrice B non è conformabile alla matrice A <u>**non**</u> è possibile definire la matrice prodotto BA.

6.5.15. Esempio. Siano A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Siccome la matrice A è conformabile alla matrice B è possibile definire la matrice prodotto AB che, per definizione, è una matrice di tipo 2×2. Inoltre, facendo i conti si ha che

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -26 & -11 \end{bmatrix}.$$

Inoltre, si ha anche che la matrice B è conformabile alla matrice A. Quindi, è possibile anche definire il prodotto BA che, per definizione, è una matrice di tipo 3×3. Facendo i conti si ha che

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 6 & -8 & 8 \\ -5 & -16 & 4 \end{bmatrix}$$

Si noti che pur esistendo sia la matrice AB che la matrice BA esse **<u>non</u>** sono dello stesso tipo.

6.5.16. Esempio. Siano A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Siccome la matrice A è conformabile alla matrice B è possibile definire la matrice prodotto AB che, per definizione, è una matrice di tipo 2×2. Inoltre, facendo i conti si ha che

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -29 & 3 \end{bmatrix}.$$

Inoltre, si ha anche che la matrice B è conformabile alla matrice A. Quindi, è possibile anche definire il prodotto BA che, per definizione, è una matrice di tipo 2×2. Facendo i conti si ha che

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Si noti che pur esistendo sia la matrice AB che la matrice BA e pur essendo dello stesso tipo 2×2 esse **<u>non</u>** sono uguali.

6.5.17. Osservazione. Negli esempi precedenti abbiamo visto che se esiste il prodotto AB di due matrici non è detto che esista anche il prodotto BA. Ma, se anche esistesse il prodotto BA, non è detto che i prodotti AB e BA siano dello stesso tipo. Infine, abbiamo visto che anche quando AB e BA sono dello stesso tipo, non è detto che AB e BA siano uguali. Quindi, anche in quest'ultimo caso si ha che il prodotto di due matrici **<u>non</u>** è commutativo.

6.5.18. Osservazione. Siano $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ e sia α un numero reale. E' facile rendersi conto che:

- la matrice αA è di tipo $m\times n$;
- esiste la matrice $(\alpha A)B$ che è di tipo $m\times p$;
- la matrice αB è di tipo $n\times p$;
- esiste la matrice $A(\alpha B)$ che è di tipo $m\times p$;
- esiste la matrice AB che è di tipo $m\times p$;
- la matrice $\alpha(AB)$ è di tipo $m\times p$;

Si può inoltre provare che $\boldsymbol{\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)}$

6.5.19. Osservazione. Siano $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times q}$. E' facile rendersi conto che:

- esiste la matrice AB che è di tipo $m\times p$;
- esiste la matrice $(AB)C$ che è di tipo $m\times q$;
- esiste la matrice BC che è di tipo $n\times q$;
- esiste la matrice $A(BC)$ che è di tipo $m\times p$.

Si può inoltre provare che $\mathbf{(AB)C = A(BC)}$

6.5.20. Osservazione. Siano $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{n\times p}$ tre matrici. E' facile rendersi conto che

- la matrice $B+C$ è di tipo $n\times p$;
- esiste la matrice $A(B+C)$ che è di tipo $m\times p$;
- esiste la matrice AB che è di tipo $m\times p$;
- esiste la matrice AC che è di tipo $m\times p$;
- la matrice $AB+AC$ è di tipo $m\times p$.

Si può inoltre provare che $\mathbf{A(B+C) = AB+AC}$

6.5.21. Osservazione. Siano $B_{n\times p}$, $C_{n\times p}$ e $D_{p\times m}$ tre matrici. E' facile rendersi conto che

- la matrice $B+C$ è di tipo $n\times p$;
- esiste la matrice $(B+C)D$ che è di tipo $n\times m$;
- esiste la matrice BD che è di tipo $n\times m$;
- esiste la matrice CD che è di tipo $n\times m$;
- la matrice $BD+CD$ è di tipo $n\times m$.

Si può inoltre provare che $\mathbf{(B+C)D = BD+CD}$

6.5.22. Osservazione. Sia $A_{m\times n}$ una matrice di tipo m×n e sia B una matrice di tipo n×m che ha ordinatamente come colonne le righe di A. E' immediato rendersi conto che:

- la matrice B è unica;
- le righe di B sono ordinatamente le colonne di A.

6.5.23. Esempio. Sia A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ una matrice di tipo 3×4.

Le righe di A sono le quattro n-uple

$A_1 = (1, 1, 0, 0)$

$A_2 = (0, 5, 10, 0)$

$A_3 = (3, 23, 4, 0)$

Sia ora B la matrice di tipo 4×3 che ha ordinatamente come colonne le righe di A

$B^1 = A_1 = (1, 1, 0, 0)$

$B^2 = A_2 = (0, 5, 10, 0)$

$B^3 = A_3 = (3, 23, 4, 0)$

ovvero B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 23 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si osservi che

$B_1 = (1, 0, 3) = A^1$

$B_2 = (1, 5, 23) = A^2$

$B_3 = (0, 10, 4) = A^3$

$B_4 = (0, 0, 0) = A^4$

ovvero che le righe di B sono ordinatamente le colonne di A.

6.5.24. Definizione. Sia $A_{m\times n}$ una matrice di tipo m×n. Diremo matrice ***trasposta*** di A, e la indichiamo col simbolo A^T, l'unica matrice di tipo n×m che ha ordinatamente come colonne le righe di A.

6.5.25. Osservazione. Siano $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$. E' facile rendersi conto che:

- esiste la matrice AB che è di tipo m×p;
- la matrice $(AB)^T$ è di tipo p×m;
- la matrice A^T è di tipo n×m;
- la matrice B^T è di tipo p×n (quindi B^T è conformabile ad A^T)
- esiste la matrice B^TA^T (mentre non è detto che esista la matrice A^TB^T);
- la matrice B^TA^T è dello stesso tipo p×m della matrice $(AB)^T$.

Si può inoltre provare che $$\mathbf{(AB)^T = B^TA^T}$$

6.5.26. Esempio. Siano A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Abbiamo già visto che

AB = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -26 & -11 \end{bmatrix}$. Quindi, $(AB)^T = \begin{bmatrix} 6 & -26 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$.

Si ha inoltre che $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Se ora calcoliamo il prodotto B^TA^T otteniamo

$B^TA^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -26 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$.

Quindi, abbiamo verificato che $(AB)^T = B^TA^T$.

6.5.27. Osservazione. Si noti che nell'esempio precedente (è un **caso particolare**), la matrice A^T è conformabile ad B^T. Quindi, in questo caso particolare, esiste anche la matrice A^TB^T.
Facendo i calcoli otteniamo

$A^TB^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 7 & -8 & -16 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

Si noti che la matrice A^TB^T è di tipo 3×3 mentre $(AB)^T$ è di tipo 2×2.