22. Geometria analitica dello spazio (piani e rette).

22.1. Definizione. Siano O un punto dello spazio e (**i**, **j**, **k**) una **base ortonormale** dello spazio dei vettori liberi. Diremo che la quaterna ordinata (O, **i**, **j**, **k**) è un *riferimento cartesiano ortonormale dello spazio*, e lo indicheremo con il simbolo RC(O, **i**, **j**, **k**).

22.2. Osservazione. Se indichiamo con $\wp$ l'insieme dei punti dello spazio, allora per ogni punto $P \in \wp$ esiste ed è unico il vettore libero **u** = [(OP)]. Per il Teorema di caratterizzazione di una base, si ha che esiste un'unica terna ordinata di numeri reali $(x_P, y_P, z_P) \in R^3$ tali che $\mathbf{u} = x_P\mathbf{i} + y_P\mathbf{j} + z_P k$. Tenendo conto di quanto appena osservato si può definire una funzione $\Omega : \wp \to R^3$ che ad ogni punto P associa l'unica terna ordinata di numeri reali (x_P, y_P, z_P), cioè $\Omega(P) = (x_P, y_P, z_P)$. E' facile dimostrare che tale funzione è biettiva. Infatti, per ogni terna ordinata di numeri reali $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ esiste un unico vettore libero $\mathbf{t} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, per cui nello spazio esiste un unico punto Q tale che $[(OQ)] = \mathbf{t}$ ovvero $\Omega(Q) = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Tenendo conto dell'Osservazione 22.2 è ben posta la seguente

22.3. Definizione. La funzione **biettiva** che ad ogni punto P dello spazio associa l'unica terna (x_p, y_p, z_p) ordinata di numeri reali tali che $[OP] = x_p\mathbf{i} + y_p\mathbf{j} + z_p\mathbf{k}$ si dice *coordinatizzazione* dei punti dello spazio rispetto al riferimento cartesiano RC(O, **i**, **j**, **k**).

22.4. Definizione. L'unica terna ordinata di numeri reali (x_p, y_p, z_p) associata al punto P tramite la funzione di coordinatizzazione viene detta terna delle *coordinate del punto* P rispetto al riferimento cartesiano RC(O, **i**, **j**, **k**). Il primo, secondo e terzo elemento della terna (x_p, y_p, z_p) vengono detti rispettivamente *ascissa*, *ordinata* e *quota* del punto P.
Inoltre, scriveremo brevemente $P(x_p, y_p, z_p)$ invece che "il punto P di coordinate (x_p, y_p, z_p)".

22.5. Osservazione. Se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sono due punti dello spazio, allora

$$[P_1P_2] = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

Dimostrazione. Si ha che $[OP_1] = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ e $[OP_2] = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.
Dalla relazione vettoriale $[OP_1] + [P_1P_2] = [OP_2]$ si ottiene $[P_1P_2] = [OP_2] - [OP_1]$ da cui la tesi. ■

Ovviamente, essendo sottointesa la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, possiamo identificare il vettore $[P_1P_2]$ con la terna ordinata delle sue componenti, per cui scriveremo brevemente $[P_1P_2] = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1)$

22.6. Lemma. (*complanarità di 4 punti*).

Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ e $P_4(x_4, y_4, z_4)$ quattro punti dello spazio.

$$P_1, P_2, P_3 \text{ e } P_4 \text{ sono complanari} \iff \det\begin{bmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Si ha che $[P_1P_2] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $[P_1P_3] = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ e $[P_1P_4] = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$.
Sia H la matrice avente come righe le componenti dei tre vettori $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ e $[P_1P_4]$, cioè

$$H = \begin{bmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

I quattro punti P_1, P_2, P_3 e P_4 sono complanari $\iff$

$\iff$ i tre vettori $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ e $[P_1P_4]$ sono complanari $\iff$

$\iff$ i tre vettori $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ e $[P_1P_4]$ linearmente dipendenti $\iff$

$\iff$ le tre righe di H sono linearmente dipendenti $\iff$ $rg(H) < 3$ $\iff$ $\det H = 0$. ■

22.7. Teorema. (*equazione cartesiana di un piano*)

Per ogni piano π dello spazio esiste un'equazione lineare del tipo (♥) $ax + by + cz + d = 0$ nelle incognite (x, y, z) con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tale che un punto $P(x_p, y_p, z_p)$ dello spazio appartiene al piano π se e solo se la terna (x_p, y_p, z_p) è una soluzione dell'equazione (♥) ovvero si ha la seguente identità $ax_p + by_p + cz_p + d = 0$. L'equazione (♥), che caratterizza i punti di π, si dice ***equazione cartesiana del piano*** $\boldsymbol{\pi}$. Inoltre, diremo brevemente "il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$" invece che "il piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$".

Dimostrazione. Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$ tre punti **non allineati** di π.

Sia $P(x, y, z)$ un punto dello spazio e sia H la matrice del Lemma 22.6 con $P_4=P$.

Sviluppando il determinante di H secondo la sua prima riga si ottiene che

$$\det H = (x_p - x_1)\det H_{11} - (y_p - y_1)\det H_{12} + (z_p - z_1)\det H_{13}$$

Ponendo $a := \det H_{11}$, $b : -\det H_{12}$ e $c := \det H_{13}$ si ha che

$$\det H = a(x_p - x_1) + b(y_p - y_1) + c(z_p - z_1)$$

da cui

$$\det H = ax_p + by_p + cz_p + (-ax_1 - by_1 - cz_1)$$

Ponendo $d := -(ax_1 + by_1 + cz_1)$ si ha infine

$$\det H = ax_p + by_p + cz_p + d$$

Poichè, per ipotesi, i tre punti P_1, P_2 e P_3 non sono allineati si ha che i vettori liberi $[P_1P_2]$ e $[P_1P_3]$ non sono paralleli e, quindi, sono linearmente indipendenti. Per cui la matrice

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

ha rango uguale a due. Quindi, $(\det H_{11}, \det H_{12}, \det H_{13}) \neq (0, 0, 0)$ da cui $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Ora, si osservi che

$P(x_p, y_p, z_p)\in\pi \iff P_1, P_2, P_3$ e P sono complanari $\iff$ (per il Lemma 22.6) $\iff \det H = 0 \iff$

$\iff ax_p + by_p + cz_p + d = 0 \iff (x_p, y_p, z_p)$ è una soluzione di $ax + by + cz + d = 0$. ■

Per quanto visto nella precedente dimostrazione si ha subito la seguente

22.8. Osservazione. (*equazione di un piano passante per tre punti non allineati*)

Sia π il piano passante per i tre punti **non allineati** $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$.

L'equazione cartesiana π è data da $\det\begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix} = 0$

22.9. Osservazione. Se $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ è un'equazione cartesiana di un piano π, allora per ogni scalare α non nullo l'equazione $(\alpha a)x + (\alpha b)y + (\alpha c)z + (\alpha d) = 0$ è equivalente (ha le stesse soluzioni) all'equazione $ax + by + cz + d = 0$ e, quindi, anch'essa è un'equazione cartesiana di π.

22.10. Definizione. Diremo che un *vettore* libero non nullo **u** è *perpendicolare* ad un *piano* π se **u** è perpendicolare ad ogni retta del piano π.

22.11. Teorema. (*significato dei coefficienti delle incognite nell'equazione cartesiana di un piano*)

Se $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ è l'equazione cartesiana di un piano π, allora il vettore libero non nullo $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ è perpendicolare al piano π.

Dimostrazione. Sia r una (qualsiasi) retta di π. Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ due punti distinti della retta r. Si hanno le seguenti identità $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$. Inoltre, $[P_1P_2] = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$. Per cui si ha che

$\mathbf{u} \bullet [P_1P_2] = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = (ax_2 + by_2 + cz_2) + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = -d + d = 0$

Da $\mathbf{u} \bullet [P_1P_2] = 0$ si ha che $\mathbf{u} \perp [P_1P_2]$ ovvero $\mathbf{u} \perp r$. Poiché il vettore **u** è perpendicolare ad ogni retta del piano π, allora per la definizione precedente il vettore **u** è perpendicolare al piano π. ■

22.12. Osservazione. Consideriamo un'equazione lineare $ax + by + cz + d = 0$ nelle incognite (x, y, z). Sia G il *luogo* (cioè l'insieme di tutti e soli) dei punti Q dello spazio tali che terna di coordinate (α, β, γ) di Q sia una soluzione di tale equazione. Studiamo ora la "forma" di G. Se $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ e $d = 0$, allora per qualunque terna (α, β, γ) si ha che $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$ per cui G è costituito da tutti i punti del piano, brevemente "G è il piano". Se $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ e $d \neq 0$, allora per ogni terna (α, β, γ) si ha che $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = d \neq 0$ per cui G è l'insieme vuoto.

Se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ allora G è costituito da tutti e soli i punti di un piano, infatti si può provare il seguente

22.13. Teorema. Per ogni equazione lineare del tipo $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ esiste un piano π tale che una sua equazione cartesiana sia proprio $ax + by + cz + d = 0$.

22.14. Definizione. Sia P_0 un punto dello spazio. Diremo *stella di piani di centro P_0* la totalità dei piani "passanti" per il punto P_0. Col simbolo *$S(P_0)$* indicheremo l'insieme delle equazioni dei piani della stella di piani di centro P_0.

22.15. Osservazione. π appartiene alla stella di piani di centro P_0 se e solo se P_0 appartiene a π.

22.16. Teorema. (*equazione di una stella di piani*)

Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ allora $S(P_0) = \{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \mid (a,b,c) \in R^3 - \{(0, 0, 0)\}\}$.

Dimostrazione. Sia $H = \{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \mid (a,b,c) \in R^3 - \{(0,0,0)\}\}$. Devo provare che $H = S(P_0)$. Si vede subito che ogni equazione del tipo $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ rappresenta un piano passante per P_0. Quindi, $H \subseteq S(P_0)$. Se ora $\pi : ax + by + cz + d = 0$ è un piano dello spazio passante per P_0, allora si ha la seguente identità $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ da cui si ottiene l'identità $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Per cui $\pi : ax + by + cz + -(ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$, ovvero $\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ e, dunque, $\pi \in H$. Quindi, $S(P_0) \subseteq H$. ■

22.17. Teorema. (*mutua posizione di due piani*)

Siano $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ due piani.

Ponendo $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ si ha che

1) i due piani sono lo stesso piano $(\pi_1 \equiv \pi_2)$ $\Leftrightarrow$ $rgC = 1$

2) i due piani non hanno alcun punto in comune $(\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing)$ $\Leftrightarrow$ $rgC = 2$ et $rgA = 1$

3) i due piani hanno una retta in comune $(\pi_1 \cap \pi_2 = r)$ $\Leftrightarrow$ $rgA = 2$

Dimostrazione. Considerato il sistema lineare costituito dalle equazioni dei due piani si ha che A è la matrice incompleta (matrice dei coefficienti) del sistema mentre C è quella completa.

Da $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$ e $(a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$ si ha che $rgA \geq 1$.

Poiché $1 \leq rgA \leq 2$ e $rgA \leq rgC \leq \min\{2, (1+rgA)\}$, i casi possibili sono:

I) $rgC = 1$ (quindi anche $rgA = 1$)

II) $rgC = 2$ et $rgA = 1$

III) $rgA = 2$ (quindi anche $rgC = 2$)

I) $rgC = 1$ $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha \in R - \{0\} : (a_2, b_2, c_2, d_2) = \alpha(a_1, b_1, c_1, d_1)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le equazioni dei due piani differiscono per un fattore moltiplicativo non nullo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le due equazioni sono equivalenti $\Leftrightarrow$ i due piani sono lo stesso piano.

Per cui è completamente provata la (1).

II) $rgA = 1 \neq 2 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema non ha soluzioni $\Leftrightarrow$ i piani non hanno punti in comune.

Quindi, è completamente provata la (2).

III) Se $rgA = 2 = rgC$, allora il sistema ha infinite soluzioni. Quindi, i due piani hanno infiniti punti in comune. Inoltre, essendo $rgC \neq 1$, per la (1) i due piani sono distinti per cui sono incidenti in una retta. Viceversa, se due piani hanno una retta in comune, allora (avendo già provato completamente i casi precedenti) deve per forza essere $rgA = 2$. Quindi, è completamente provata anche la (3). ■

22.18. Definizione. Diremo che due *piani* π_1 e π_2 sono *paralleli* se sono lo stesso piano ($\pi_1 \equiv \pi_2$) oppure non hanno alcun punto in comune ($\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$).

22.19. Corollario. Due piani $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sono paralleli se e solo se esiste un numero reale non nullo α tale che $(a_2, b_2, c_2) = \alpha(a_1, b_1, c_1)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 22.17 si ha che i piani π_1 e π_2 sono paralleli se e solo se rgA = 1, quindi, se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti ovvero sono proporzionali. ■

22.20. Definizione. Diremo *fascio (improprio) di piani paralleli al piano π_1* la totalità dei piani paralleli a π_1. Col simbolo *$F(\pi_1)$* indicheremo l'insieme delle <u>equazioni</u> dei piani del fascio di piani paralleli a π_1.

22.21. Teorema. (*equazione di un fascio improprio di piani*)

Se $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ allora $F(\pi_1) = \{a_1x + b_1y + c_1z + t = 0 \mid t \in R\}$.

Dimostrazione. Sia $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ un generico piano dello spazio.

$\pi_2 \in F(\pi_1) \Rightarrow \pi_2 // \pi_1 \Rightarrow$ (per il Corollario 22.19) $\Rightarrow \exists \alpha \in R-\{0\} : (a_2, b_2, c_2) = \alpha(a_1, b_1, c_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 : \alpha a_1x + \alpha b_1y + \alpha c_1z + d_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 : a_1x + b_1y + c_1z + (d_2/\alpha) = 0.$

Viceversa, se un piano π_2 ha un'equazione del tipo $a_1x + b_1y + c_1z + t = 0$ allora (per il Corollario 22.19) il piano π_2 è parallelo al piano π_1 e, quindi, $\pi_2 \in F(\pi_1)$. ■

22.22. Osservazione. (*equazioni cartesiane di una retta*)

Tenendo conto della (3) del Teorema 22.17 si ha che nello spazio è possibile rappresentare tutti e soli i punti di una retta (e, quindi, la retta stessa) come l'insieme delle soluzioni (punti) di un sistema lineare costituito dalle equazioni di due piani π_1 e π_2 tali che rgA = 2.

Per cui scriveremo $r : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Le due equazioni lineari $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ vengono dette ***equazioni cartesiane della retta r***. Ovviamente, poiché sono infiniti i piani (e, quindi, le loro equazioni) contenenti la retta r, ad una retta è possibile associare <u>infinite</u> coppie di equazioni cartesiane.

22.23. Teorema. (*mutua posizione di una retta e un piano con le equazioni cartesiane della retta*).

Siano r una retta di equazioni $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

e π un piano di equazione $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$.

Ponendo $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$ si ha che

1) r è contenuta in π $(r \subset \pi)$ $\Leftrightarrow$ $rgC = 2$

2) r e π non hanno alcun punto in comune $(r \cap \pi = \emptyset)$ $\Leftrightarrow$ $rgA = 2$ et $3 = rgC$

3) r è incidente π in un punto $(r \cap \pi = \{P\})$ $\Leftrightarrow$ $rgA = 3$

Dimostrazione. Considerato il sistema lineare costituito dalle due equazioni lineari della retta e dall'equazione lineare del piano si ha che A è la matrice incompleta (matrice dei coefficienti) del sistema mentre C è quella completa.

Poiché $2 \leq rgA \leq 3$ e $rgA \leq rgC \leq \min\{3, 1 + rgA\}$ i casi possibili sono:

1) $rgA = 2 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ r e π hanno infiniti punti in comune $\Leftrightarrow$ r è contenuta in π;

2) $rgA = 2 \neq 3 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema non ha alcuna soluzione $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ r e π non hanno alcun punto in comune;

3) $rgA = 3 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema è di Cramer $\Leftrightarrow$ il sistema ha una sola soluzione $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ r e π hanno un solo punto P in comune $\Leftrightarrow$ r è incidente π in un punto P. ■

22.24. Definizione. Diremo che una *retta* r e un *piano* π sono *paralleli* se non hanno alcun punto in comune $(r \cap \pi = \emptyset)$ oppure la retta è contenuta nel piano $(r \subset \pi)$.

22.25. Corollario. (*condizione di parallelismo retta-piano con le equazioni cartesiane della retta*)

Una retta $r : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ e un piano $\pi : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$ sono paralleli se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Per il Teorema 22.23 si ha che la retta e il piano sono paralleli se e solo se $rgA = 2$, ovvero il rango di A non è massimo. Ciò accade se e solo se $\det A = 0$. ■

22.26. Definizione. Diremo *fascio (proprio) dei piani per la retta r* la totalità dei piani contenenti la retta r. Col simbolo *F(r)* indicheremo l'insieme delle <u>equazioni</u> di un fascio di piani per la retta r.

22.27. Lemma. Se $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sono due piani **<u>non paralleli</u>**, allora per ogni coppia $(\lambda, \mu)\in R^2-\{(0, 0)\}$ l'equazione

$$\omega : \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

rappresenta sempre un piano.

Dimostrazione. Riscriviamo l'equazione ω nel modo seguente:

$$\omega : (\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2)z + (\lambda d_1 + \mu d_2) = 0$$

Poiché i due piani non sono paralleli, i vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono linearmente indipendenti. Quindi, la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo nelle incognite (x, y)

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = 0 \\ b_1x + b_2y = 0 \\ c_1x + c_2y = 0 \end{cases}$$

ha rango 2 uguale al numero delle incognite. Per cui il sistema non ha autosoluzioni. Essendo $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ si ha che $(\lambda a_1 + \mu a_2 , \lambda b_1 + \mu b_2 , \lambda c_1 + \mu c_2) \neq (0, 0, 0)$. Dunque, ω è un piano. ■

22.28. Teorema. (*equazione di un fascio proprio di piani*)

Se r è una retta di equazioni cartesiane $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ allora

$$F(r) = \{\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \mid (\lambda, \mu)\in R^2-\{(0, 0)\}\}.$$

Dimostrazione. Posto

$$H := \{\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \mid (\lambda, \mu)\in R^2-\{(0, 0)\}\}.$$

per il Lemma 22.27, H è un insieme di piani. Proviamo che $H = F(r)$.

Sia $\omega\in H$, cioè $\omega : \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$.

Osserviamo che ogni soluzione (x_0, y_0, z_0) comune alle equazioni della retta r è anche una soluzione dell'equazione del piano ω, cioè ogni punto di r appartiene al piano ω. Quindi, la retta r è contenuta nel piano ω. Per cui $\omega\in F(r)$. Abbiamo così provato che $H \subseteq F(r)$.

Sia ora $\pi : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$ l'equazione di un piano di F(r). Il seguente sistema lineare non omogeneo $\begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \\ c_1x + c_2y = c_3 \end{cases}$ si ha $rg\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = 2$ e $rg\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ (poiché $r \subset \pi$). Quindi, tale sistema è equivalente ad un sistema di Cramer. Sia $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ la sua unica soluzione. Sia ω il piano di H di equazione $(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + (\alpha c_1 + \beta c_2)z + (\alpha d_1 + \beta d_2) = 0$. Quindi, $\omega : a_3x + b_3y + c_3z + (\alpha d_1 + \beta d_2) = 0$. Per cui ω e π sono paralleli. Da $r \subset \pi \cap \omega$ si ha che $\pi \equiv \omega$. Dunque, il piano π appartiene all'insieme H. Abbiamo così provato che $F(r) \subseteq H$. ■

22.29. Teorema. (*equazioni parametriche di una retta nello spazio*).

Per ogni retta r dello spazio esiste un sistema di equazioni lineari del tipo

$$(\clubsuit)\ \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

nelle incognite (x, y, z; t) con **(l, m, n) ≠ (0, 0, 0)** tale che un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ appartiene alla retta r se e solo se esiste $t_1 \in R$ tale che la quaterna $(x_1, y_1, z_1; t_1)$ è una soluzione del sistema (♣).

Le equazioni del sistema (♣) si dicono ***equazioni parametriche*** della retta r.

(l, m, n) sono le componenti di un vettore parallelo ad r e si dicono ***parametri direttori*** della retta.

Dimostrazione. Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto della retta r e sia $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ un vettore libero **non nullo parallelo alla retta r**. Quindi, (l, m, n) ≠ (0, 0, 0). Se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ è un generico punto dello spazio si ha che

$P_1 \in r \iff [(P_0P_1)]$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli $\iff [(P_0P_1)]$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti $\iff$

$\iff \exists t_1 \in R : [(P_0P_1)] = t_1\mathbf{v} \iff \exists t_1 \in R : (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = t_1(l, m, n) \iff$

$$\iff \exists t_1 \in R : (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (lt_1, mt_1, nt_1) \iff \exists t_1 \in R : \begin{cases} x - x_0 = lt_1 \\ y - y_0 = mt_1 \\ z - z_0 = nt_1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \exists t_1 \in R : \begin{cases} x = lt_1 + x_0 \\ y = mt_1 + y_0 \\ z = nt_1 + z_0 \end{cases} \iff \text{la terna } (x_1, y_1; t_1) \text{ è una soluzione del sistema } \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

22.30. Corollario. (*equazioni parametriche di una retta dello spazio per due punti distinti*).

Siano $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ sono due punti **distinti** di una retta r. Poiché il vettore $[P_0P_1] \neq \mathbf{0}$ è parallelo alla retta r, per la retta r si hanno subito le seguenti equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y = (y_1 - y_0)t + y_0 \\ z = (z_1 - z_0)t + z_0 \end{cases}$$

Tenendo conto del significato dei parametri direttori di una retta si ha subito il seguente

22.31. Lemma. (*parallelismo tra due rette con i loro parametri direttori*).

Siano $v_1 = (l_1, m_1, n_1) \neq (0, 0, 0)$ un vettore parallelo ad una retta r_1 e $v_2 = (l_2, m_2, n_2) \neq (0, 0, 0)$ un vettore parallelo ad una retta r_2. Le rette r_1 e r_2 sono parallele se e solo se i vettori v_1 e v_2 sono paralleli, ovvero se e solo se esiste un numero reale non nullo α tale che $(l_2, m_2, n_2) = \alpha(l_1, m_1, n_1)$.

22.32. Teorema. (*mutua posizione piano-retta con le equazioni parametriche della retta*)

Sia π un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia r una retta parallela al vettore (l, m, n) e passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Si ha che:

(1) la retta r e il piano π sono paralleli se e solo se $\mathbf{al + bm + cn = 0}$;

(2) la retta è contenuta nel piano se e solo se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;

(3) la retta e il piano non hanno alcun punto in comune se e solo se

$al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$;

(4) r è incidente π in un punto se e solo se $al + bm + cn \neq 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il sistema formato dalle tre equazioni di r e dall'equazione di π.

$$(\heartsuit)\quad \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Sostituendo x, y e z nella quarta equazione si ottiene la seguente equazione di primo grado in t

$$a(lt + x_0) + b(mt + y_0) + (nt + z_0) + d = 0$$

da cui
$$(al + bm + cn)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad (\clubsuit)$$

(1) La retta e il piano sono paralleli $\Leftrightarrow$ la retta è contenuta nel piano o non hanno alcun punto $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ il sistema ($\heartsuit$) ha infinite soluzioni o nessuna soluzione $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ l'equazione ($\clubsuit$) è indeterminata o impossibile $\Leftrightarrow$ $al + bm + cn = 0$.

(2) Se $al + bm + cn = 0$, allora per (1) la retta e il piano sono paralleli. Se $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, allora il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ della retta r appartiene al piano π. Avendo un punto in comune col piano ed essendo parallela al piano, la retta è contenuta nel piano. Viceversa, se la retta è contenuta nel piano allora la retta è parallela al piano e il suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ appartiene al piano. Quindi, $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

(3) Se $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$, allora per (1) la retta e il piano sono paralleli e la retta non è contenuta nel piano poiché il suo punto P_0 non appartiene al piano. Quindi, la retta e il piano non hanno alcun punto in comune. Viceversa, se la retta e il piano non hanno alcun punto in comune, allora sono paralleli e il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ della retta non appartiene al piano. Quindi, $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$.

(4) Per (1) si ha che $al + bm + cn \neq 0$ se e solo se la retta e il piano non sono paralleli, ovvero la retta è incidente il piano in un punto. Inoltre, se $\tau = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)/(al + bm + cn)$ è l'unica soluzione di ($\clubsuit$), allora le coordinate di tale punto sono $(x, y, z) = (l\tau + x_0, m\tau + y_0, n\tau + z_0)$. ■

22.33. Teorema. (*mutua posizione di due rette nello spazio con le loro equazioni parametriche*)

Siano r_1 una retta parallela al vettore $v_1 = (l_1, m_1, n_1) \neq (0, 0, 0)$ e passante per il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ed r_2 una retta parallela al vettore $v_2 = (l_2, m_2, n_2) \neq (0, 0, 0)$ e passante per il punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Ponendo $H = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix}$ si ha che le due rette sono:

(1) coincidenti $\Leftrightarrow$ $\text{rg}H = 1$

(2) parallele in senso stretto $\Leftrightarrow$ $\text{rg}H = 2$ e $\text{rg}K = 1$

(3) incidenti in un punto $\Leftrightarrow$ $\text{rg}H = 2$ e $\text{rg}K = 2$

(4) sghembe $\Leftrightarrow$ $\text{rg}H = 3$

Dimostrazione. Si osservi che $1 \leq \text{rg}K \leq 2$ e $\text{rg}K \leq \text{rg}H \leq 1 + \text{rg}K$.

(1) Se $\text{rg}H = 1$, allora anche $\text{rg}K = 1$ e le due rette sono parallele. Inoltre, la prima e la seconda riga di H sono proporzionali. Quindi, il vettore $[(P_1P_2)] = (x_1 - x_2, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ è parallelo al vettore $v_1 = (l_1, m_1, n_1)$. Per cui, il punto P_2 della retta r_2 appartiene anche alla retta r_1. Essendo parallele e avendo un punto in comune, le due rette sono coincidenti. Viceversa, se le due rette sono coincidenti, allora i vettori $[(P_1P_2)] = (x_1 - x_2, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $v_1 = (l_1, m_1, n_1)$ e $v_2 = (l_2, m_2, n_2)$ hanno la stessa direzione. Quindi, $\text{rg}H = 1$.

(2) Se $\text{rg}K = 1$ allora le due rette sono parallele. Se, inoltre, $\text{rg}H = 2 \neq 1$ allora, per (1), le due rette non sono coincidenti. Quindi, le due rette sono parallele in senso stretto. Viceversa, se le due rette sono parallele in senso stretto allora, essendo parallele, si ha che $\text{rg}K = 1$. Inoltre, non essendo coincidenti si ha che $1 \leq \text{rg}K < \text{rg}H \leq \text{rg}K + 1 = 2$. Per cui, $\text{rg}H = 2$.

(3) Se $\text{rg}K = 2$, allora le due rette non sono parallele. Inoltre, la seconda e la terza riga di H sono linearmente indipendenti. Se $\text{rg}H = 2$, allora la prima riga di H è una combinazione lineare delle ultime due. Quindi, i vettori $[(P_1P_2)] = (x_1 - x_2, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $v_1 = (l_1, m_1, n_1)$ e $v_2 = (l_2, m_2, n_2)$ sono complanari. Per cui le due rette sono complanari. Essendo non parallele, le due rette sono incidenti. Viceversa, se le due rette sono incidenti, allora sono non parallele. Per cui, $\text{rg}K = 2$. Poiché le due rette sono complanari, anche i vettori $[(P_1P_2)] = (x_1 - x_2, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $v_1 = (l_1, m_1, n_1)$ e $v_2 = (l_2, m_2, n_2)$ sono complanari. Per cui $\text{rg}H = 2$.

(4) Se $\text{rg}H = 3$, allora per (1), (2) e (3) le due rette non sono complanari, ovvero sono sghembe. Viceversa, se le rette sono sghembe, ovvero non complanari, allora per (1), (2) e (3) si ha che $\text{rg}H \neq 1$ e $\text{rg}H \neq 2$. Essendo $1 \leq \text{rg}H \leq 3$, si ha che $\text{rg}H = 3$ necessariamente. ■

22.34. Teorema. (*parametri direttori di una retta dai coefficienti delle sue equazioni cartesiane*)

Se r è una retta avente equazioni cartesiane $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, allora i suoi parametri direttori sono proporzionali alla terna

$$\left(\det\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)$$

ovvero sono proporzionali ai minori di ordine due della matrice $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$.

Dimostrazione. La retta r è data dall'intersezione del piano $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e del piano $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Il vettore $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ è ortogonale al piano π_1 e, quindi, anche alla retta r in esso contenuta. Il vettore $\mathbf{u}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$ è ortogonale al piano π_2 e, quindi, anche alla retta e in esso contenuta. Si vede subito che Il prodotto vettoriale $\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2$ è un vettore non nullo (essendo entrambi non nulli e non paralleli fra loro) parallelo alla retta r. Quindi, per ogni $\alpha\neq 0$, le componenti del vettore $\alpha(\mathbf{u}_1\wedge\mathbf{u}_2)$, ovvero la terna

$$\alpha\left(\det\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)$$

è una terna di parametri direttori della retta r. ■

22.35. Lemma. Due rette

$$r : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$s : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

sono parallele se e solo se $\mathrm{rg}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} = 2$.

Dimostrazione. Sia A la matrice che ha come righe le componenti dei vettori $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$, $\mathbf{u}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$, $\mathbf{u}_3 = a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_4 = a_4\mathbf{i} + b_4\mathbf{j} + c_4\mathbf{k}$. Poiché i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, così come i vettori $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$, sono linearmente indipendenti (non essendo paralleli) il rango di A è maggiore di uno e, quindi, $2 \leq \mathrm{rg}A \leq 3$. Sia π_r un piano parallelo ai vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ e sia π_s un piano parallelo ai vettori $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$. Il piano π_r è la retta r, così come il piano π_s è la retta s, sono ortogonali tra loro. Le rette r e s sono parallele tra loro se e solo se i piani π_r e π_s sono paralleli ovvero se e solo i vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ sono complanari. Ciò accade se e solo se $\mathrm{rg}A \leq 2$. Quindi, $\mathrm{rg}A = 2$. ■

22.36. Teorema. (*mutua posizione di due rette nello spazio con le loro equazioni cartesiane*).

Consideriamo due rette $r: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ e $s: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$.

Ponendo $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}$ si ha che le due rette sono

1) coincidenti $\Leftrightarrow$ $rgC = 2$

2) parallele in senso stretto $\Leftrightarrow$ $rgA = 2 \neq 3 = rgC$

3) incidenti in un punto $\Leftrightarrow$ $rgA = 3 = rgC$

4) sghembe $\Leftrightarrow$ $rgC = 4$

Dimostrazione. Poichè $2 \leq rgA \leq 3$ e $rgA \leq rgC \leq (1 + rgA)$ i casi possibili sono:

1) $rgA = 2 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema ha infinite soluzioni $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le due rette hanno infiniti punti in comune $\Leftrightarrow$ le due rette sono la stessa retta.

2) $rgA = 2 \neq 3 = rgC$ $\Leftrightarrow$ le rette sono parallele e il sistema non ha soluzioni $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le rette sono parallele e non hanno punti in comune $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le rette sono parallele in senso stretto.

3) $rgA = 3 = rgC$ $\Leftrightarrow$ il sistema è equivalente ad un sistema di Cramer $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ il sistema ha una sola soluzione $\Leftrightarrow$ le due rette hanno un solo punto in comune.

4) $rgA = 3 \neq 4 = rgC$ $\Leftrightarrow$ le rette **non** sono parallele e il sistema non ha soluzioni $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le rette non sono parallele e non hanno punti in comune $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le rette sono sghembe. ■

22.37. Corollario. Due rette

$$r: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$s: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

sono complanari se e solo se $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = 0$.

Dimostrazione. Per il Teorema 22.36 le due rette sono sghembe se e solo se $rgA = 4$, ovvero la matrice A ha rango massimo. Ciò accade se e solo se $\det A \neq 0$. Quindi, le due rette sono complanari (ovvero non sono sghembe) se e solo $\det A = 0$. ■

22.38 Teorema. (*perpendicolarità retta-piano*). Sia π un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia r una retta di parametri direttori (l, m, n). La retta e il piano π sono perpendicolari tra loro se e solo se esiste un numero reale $\alpha \neq 0$ tale che $(a, b, c) = \alpha(l, m, n)$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} := l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$. Tenendo conto che $\mathbf{u} \perp \pi$ e $\mathbf{v}$ // r si ha

$r \perp \pi \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} // \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; (a, b, c) // (l, m, n) \;\Leftrightarrow\; \exists\alpha\in R-\{0\} : (a, b, c) = \alpha(l, m, n)$. ■

22.39 Corollario. (*piano per un punto perpendicolare ad una retta*)

Sia π il piano passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e perpendicolare ad una retta di parametri direttori (l, m, n). Il piano π ha equazione cartesiana

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

22.40. Corollario. (*retta per un punto perpendicolare ad un piano*)

Sia r la retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e perpendicolare al piano $ax + by + cz + d = 0$.

La retta r ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$

22.41. **<u>Ricordiamo che</u>**

22.41.1 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} := \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

22.41.1 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$;

22.41.1 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2; \;\Rightarrow\; \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}$;

22.41.1 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})/(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)$

22.41.1 $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{u}}$:= lunghezza proiezione di $\mathbf{v}$ lungo direzione di $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{u}} = |\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|/\|\mathbf{u}\|$;

Inoltre, se $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ con $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ base **<u>ortonormale</u>** allora

22.41.1 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$;

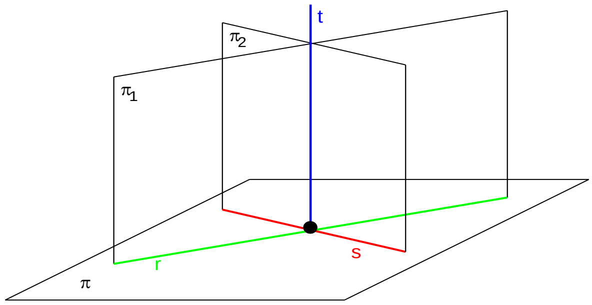
22.41.1 $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$;

22.41.1 $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$

ANGOLO FRA DUE PIANI

22.42. Definizione. (*angolo tra due piani*)

Se π_1 e π_2 sono due piani **non** paralleli tra loro, allora sia t la retta in cui si intersecano e sia π un piano perpendicolare alla retta t. Siano $r = \pi \cap \pi_1$ e $s = \pi \cap \pi_2$ e si consideri l'angolo (r, s) tra le rette r e s sul piano π (secondo la definizione 21.32). Sia ora π' un altro **qualsiasi** piano perpendicolare alla retta t. Siano $r' = \pi' \cap \pi_1$ e $s' = \pi' \cap \pi_2$ e si consideri l'angolo (r', s') tra le rette r' e s' sul piano π'. Si può dimostrare che (r, s) = (r', s') ovvero che tale angolo non dipende dalla scelta del piano perpendicolare alla rette t. Per tale motivo si definisce angolo fra i due piani π_1 e π_2 l'angolo (r, s) tra le due rette r e s sul piano π. Se indichiamo con (π_1, π_2) l'angolo tra i due piani si avrà quindi che $(\pi_1, \pi_2) = (r, s)$.



Se π_1 e π_2 sono due piani paralleli tra loro, allora si pone (π_1, π_2) = {angolo nullo, angolo piatto}.

22.43. Teorema. (*calcolo del coseno dell'angolo fra due piani*)

Se $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, allora

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \pm \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$ sono due vettori perpendicolari ai due piani π_1 e π_2 rispettivamente, allora si vede subito che l'angolo tra i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ è uguale ad uno degli angoli formati da π_1 e π_2. Quindi, il coseno dell'angolo tra i due vettori è uguale al coseno di uno dei due angoli formati da π_1 e π_2. Siccome l'altro angolo formato da π_1 e π_2 è il supplementare del precedente il suo coseno differisce dal coseno di quello precedente solo per il segno. Quindi, $\cos(\pi_1, \pi_2) = \pm \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. ■

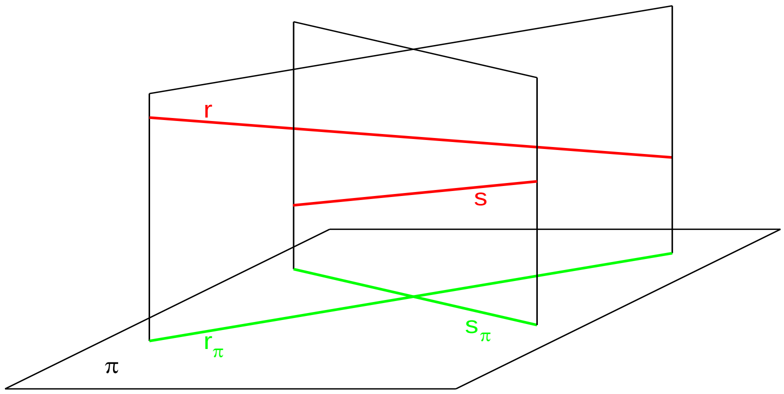
22.44. Corollario (*perpendicolarità fra due piani*). Due piani $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sono perpendicolari fra loro se e solo se $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Dimostrazione. $\pi_1 \perp \pi_2 \iff \cos(\pi_1, \pi_2) = 0 \iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. ■

ANGOLO FRA DUE RETTE NELLO SPAZIO

22.45. Definizione. (*angolo tra due rette nello spazio*)

Siano r e s due rette dello spazio. Se esiste un piano π che le contiene, allora l'angolo tra le due rette r e s è proprio l'angolo (r, s) nel piano π (secondo la Definizione 21.32). Se invece le due rette sono sghembe, allora consideriamo un piano π parallelo ad entrambe. Poi siano r_π e s_π le proiezioni ortogonali rispettivamente di r e s su π. Diremo *angolo fra le due rette r e s sghembe* l'angolo fra le due rette r_π e s_π nel piano π (secondo la Definizione 21.32).



22.46. Teorema. (*calcolo del coseno dell'angolo fra due rette nello spazio*)

Se r e s sono due rette di parametri direttori (l_1, m_1, n_1) e (l_2, m_2, n_2) si ha che

$$\cos(r, s) = \pm \cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{v}_r = l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_s = l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + n_2\mathbf{k}$ sono due vettori paralleli a due rette r e s, allora si vede subito che l'angolo tra i vettori $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ è uguale ad uno dei due angoli formati da r e s. Quindi, il coseno dell'angolo tra i due vettori è uguale al coseno di uno dei due angoli formati da r e s. Siccome l'altro angolo formato da r e s è il supplementare del precedente il suo coseno differisce dal coseno di quello precedente solo per il segno. Quindi, $\cos(r, s) = \pm \cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. ■

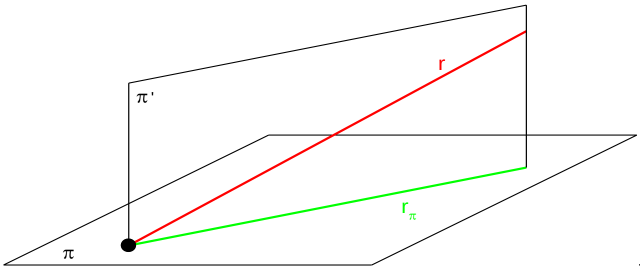
22.47. Corollario. (*perpendicolarità fra due rette nello spazio*)

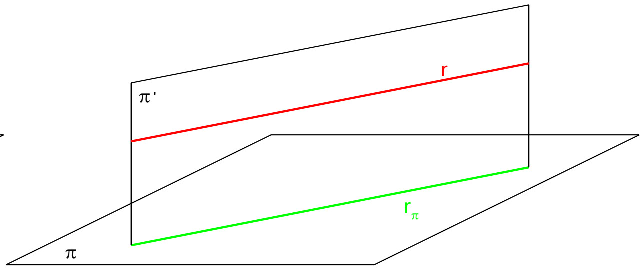
Siano r e s due rette di parametri direttori rispettivamente (l_1, m_1, n_1) e (l_2, m_2, n_2). Le due rette sono perpendicolari fra loro se e solo se $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Dimostrazione. $r \perp s \iff \cos(r, s) = 0 \iff l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$. ■

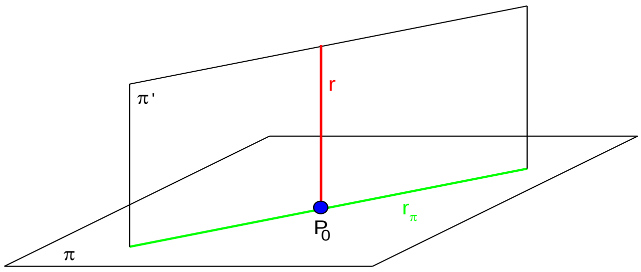
ANGOLO FRA UNA RETTA ED UN PIANO

22.48. Definizione. (*angolo fra una retta e un piano*). Data una retta r e un piano π esiste sempre almeno un piano π' contenente r e perpendicolare a π. Consideriamo ora la retta $r_\pi := \pi \cap \pi'$.
Se r non è perpendicolare a π, allora π' è unico e **la** retta r_π si dice *proiezione ortogonale* di r su π.





Se r è perpendicolare a π, allora ogni piano contenente r è perpendicolare a π e la retta r_π è **una delle** rette di π passanti per il punto P_0 d'intersezione di r con π.



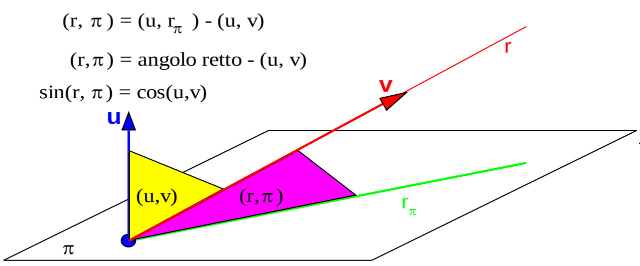
Diremo *angolo fra la retta r e il piano π*, e lo indicheremo con il simbolo (r, π), l'angolo **minore o uguale** all'angolo retto formato dalle due rette r e r_π nel piano π' (secondo la Definizione 21.32).

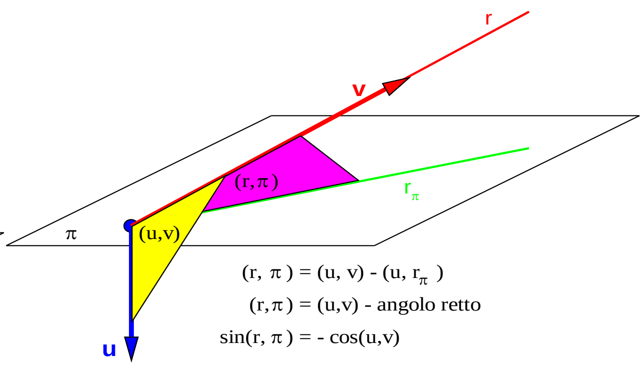
22.49. Teorema. (*calcolo del seno dell'angolo fra una retta e un piano*)

Sia π un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia r una retta di parametri direttori (l, m, n).

$$\sin(r, \pi) = |\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{v} := l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ è un vettore parallelo alla retta r e $\mathbf{u} := a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ è un vettore perpendicolare al piano π, allora si vede subito che $\sin(r, \pi) = |\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$.





DISTANZE

22.50. Teorema. (*distanza fra due punti*)

Se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sono due punti dello spazio, allora la loro distanza è data

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

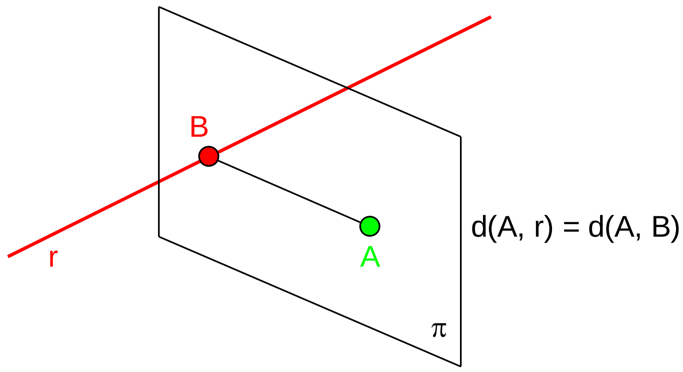
Dimostrazione. Si ha che la distanza tra P_1 e P_2 è uguale alla lunghezza del vettore libero $[P_1P_2]$.

Da $[P_1P_2] = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ e $[P_1P_2]\bullet[P_1P_2] = \|[P_1P_2]\|^2$ si ha che

$$d(P_1, P_2) = \|[P_1P_2]\| = \sqrt{[P_1P_2]\bullet[P_1P_2]} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \blacksquare$$

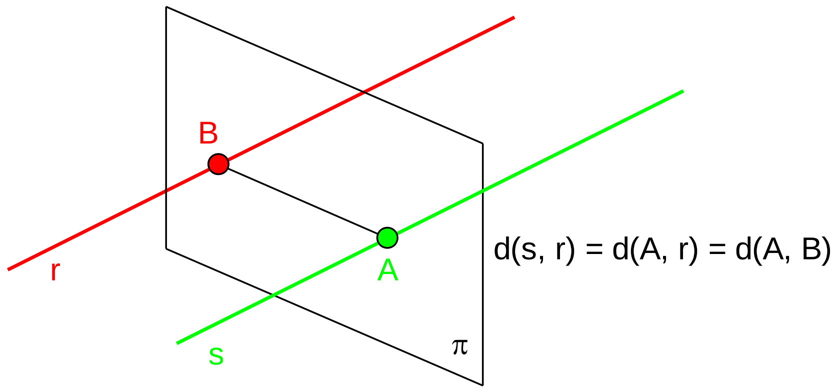
22.51. Osservazione. (*distanza fra una retta e un punto*)

Dati un punto A e una retta r, siano π il piano passante per A e perpendicolare a r e B il punto d'intersezione tra la retta r e il piano π. La distanza tra A e r è uguale alla distanza fra i punti A e B.



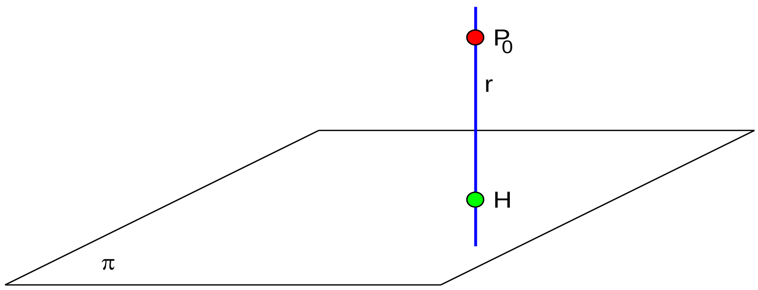
22.52. Osservazione. (*distanza fra due rette parallele*)

La distanza fra due rette parallele è uguale alla distanza di un punto di una delle due dall'altra.



22.53. Definizione. (*distanza fra un punto e un piano*)

Siano P_0 un punto e π un piano. Sia r l'unica retta passante per P_0 e perpendicolare a π. Il punto H d'intersezione di r e π si dice *proiezione ortogonale del punto P_0 sul piano π.* **<u>Si stabilisce</u>** che la distanza di P_0 dal piano π sia uguale alla distanza del punto P_0 dal punto H, cioè $d(P_0, \pi) = d(P, H)$.



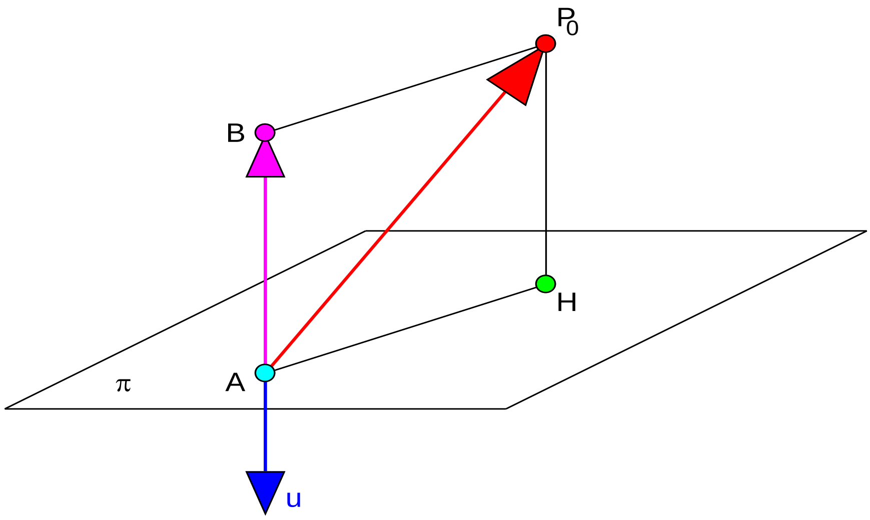
22.54. Teorema. (*calcolo della distanza fra un punto e un piano*)

La distanza tra un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e un piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è data da

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dimostrazione. Sia H la proiezione ortogonale del punto P_0 sul piano π e sia A un punto (qualsiasi) del piano π. Sia $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ un vettore perpendicolare a π. **<u>Si vede subito che</u>** la distanza tra P_0 e π è uguale alla lunghezza di AB proiezione del vettore $[AP_0]$ lungo la direzione di $\mathbf{u}$. Ovvero

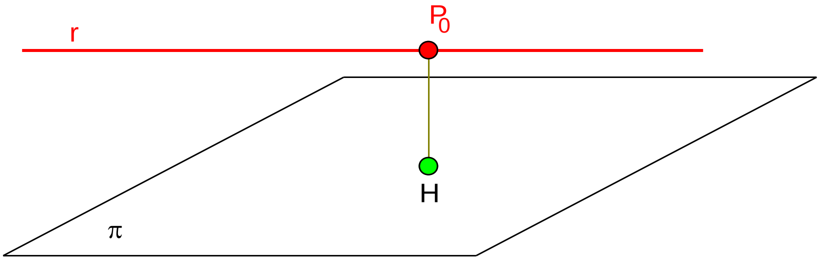
$$d(P_0, \pi) = d(P_0, H) = d(A, B) = \|[AB]\| = \|[AP_0]\|_{\mathbf{u}} = |\mathbf{u}\bullet[AP_0]|/\|\mathbf{u}\|$$



Da $A \in \pi$ si ha l'identità $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ e, quindi, l'identità $d = -ax_A - by_A - cz_A$. Inoltre, $\mathbf{u}\bullet[AP_0] = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) + c(z_0 - z_A) = ax_0 + by_0 + cz_0 + (-ax_A - by_A - z_A)$. Per cui si ha che $|\mathbf{u}\bullet[AP_0]| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$. Tenendo conto che $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ si ha subito che $d(P_0, \pi) = |\mathbf{u}\bullet[AP_0]| / \|\mathbf{u}\| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. ■

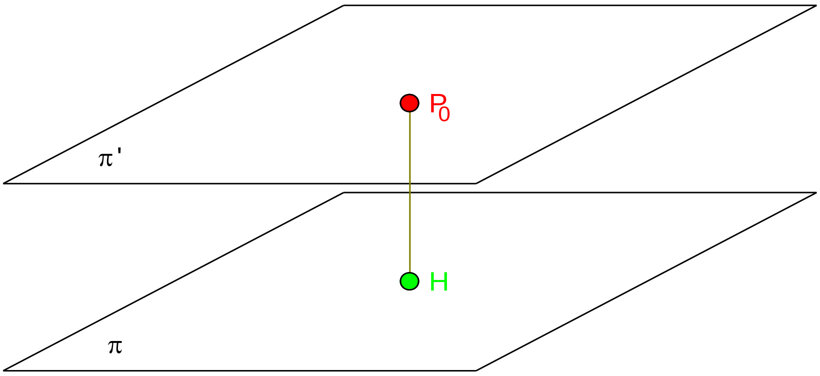
22.55. Definizione. (*distanza fra una retta e un piano paralleli*)

La distanza fra una retta e un piano paralleli è uguale alla distanza di un punto (qualsiasi) della retta dal piano. Quindi, basta prendere un punto (a piacere) della retta e calcolarne la distanza dal piano.



22.56. Definizione. (*distanza fra due piani paralleli*)

La distanza fra due piani paralleli è uguale alla distanza di un punto di uno di essi dall'altro.



22.57. Corollario. (*calcolo della distanza fra due piani paralleli*)

Se π e π' sono due piani paralleli di equazioni rispettivamente $ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha ax + \alpha by + \alpha cz + d' = 0$ (dove ovviamente $\alpha \neq 0$), allora la distanza tra π e π' è data da

$$d(\pi, \pi') = \frac{|d - (d'/\alpha)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dimostrazione. Si vede subito che la distanza tra π e π' è uguale alla distanza tra π e un (qualsiasi) punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ del piano π'. Per cui, $d(\pi, \pi') = d(P_0, \pi) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dall'identità $\alpha ax_0 + \alpha by_0 + \alpha cz_0 + d' = 0$ si ha che $(ax_0 + by_0 + cz_0) = - d'/\alpha$. ■

22.58. Corollario.

Se $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e $\pi' : ax + by + cz + d' = 0$, allora la distanza tra π e π' è data da

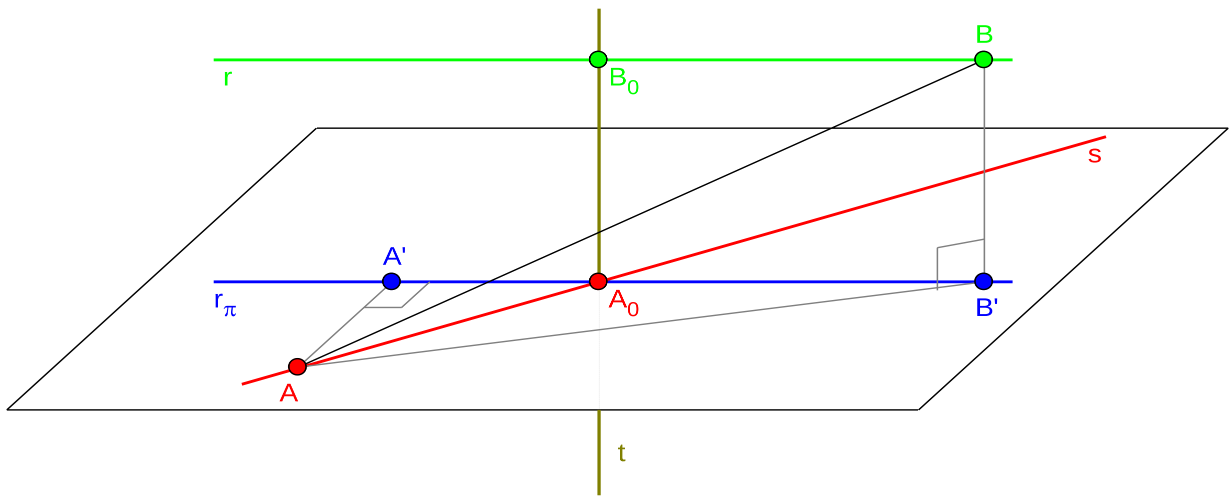
$$d(\pi, \pi') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

22.59. Osservazione. Siano r e s due rette sghembe. Si scelga (a piacere) una di esse, ad esempio s. Sia π l'unico piano contenente s e parallelo ad r. Sia π' l'unico piano contenente r e perpendicolare a π. Sia $r_\pi = \pi \cap \pi'$ la proiezione ortogonale di r sul piano π. Le rette r e r_π sono parallele in quanto r è parallela a π. Le rette complanari r_π e s non sono parallele. Infatti, se lo fossero, allora si avrebbe che anche r e s sarebbero parallele e, quindi, complanari. Per cui le rette r_π e s sono incidenti. Indichiamo con A_0 il punto d'intersezione delle rette r_π e s. Sia t la retta di π' passante per A_0 e r_π e, quindi, anche a r. Sia B_0 il punto d'intersezione tra t e r.

Ora, comunque si scelgano un punto A di s e un punto B di r si ha che $d(A, B) \geq d(A_0, B_0)$. Infatti,

$$d(A, B) = \sqrt{d(A,B')^2 + d(B,B')^2} = \sqrt{[d(A,A')^2 + d(A',B)^2] + d(B,B')^2} =$$

$$= \sqrt{[d(A,A')^2 + d(A',B)^2] + d(A_0,B_0)^2} \geq \sqrt{d(A_0,B_0)^2} = d(A_0, B_0)$$



Tenendo conto dell'osservazione precedente diamo la seguente:

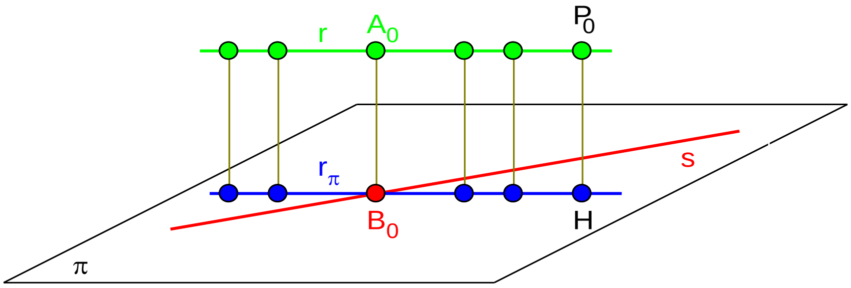
22.60. Definizione. (*distanza fra due rette sghembe*)

Siano r e s due rette sghembe. Sia π il piano che contiene s ed è parallelo ad r. Sia r_π la proiezione ortogonale di r sul piano π e sia A_0 il punto d'intersezione di r_π e s. Sia t la retta perpendicolare a π e passante per A_0 e sia B_0 il punto d'intersezione tra t e r. Diremo distanza tra le due rette sghembe r e s la distanza tra i punti A_0 B_0. Ovvero, $d(r, s) := d(A_0, B_0)$.

Diremo anche che la retta t è la *retta di minima distanza* tra le rette r e s.

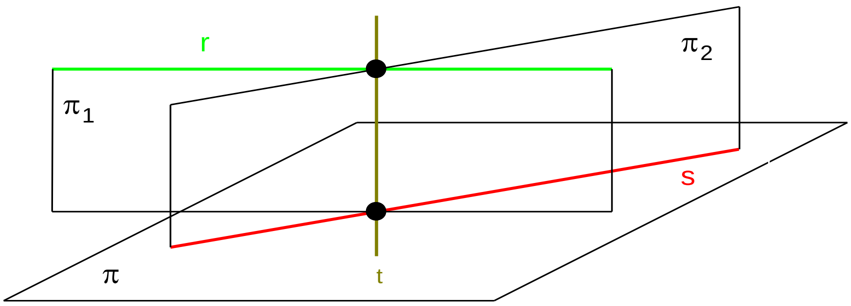
22.61. Osservazione. (*calcolo della distanza fra due rette shgembe*)

<u>Si vede subito che</u> la distanza fra le due rette sghembe r e s è uguale alla distanza tra la retta r e il piano π, cioè alla distanza di un (qualsiasi) punto P_0 di r da π.



22.62. Definizione. (*equazioni della retta di minima distanza fra due rette sghembe*)

Siano r e s due rette sghembe. Sia π un (qualsiasi) piano parallelo a r e s (in pratica, come π si sceglie il piano contenente una di esse, ad esempio s, e parallelo all'altra, nel nostro caso r). Sia π_1 il piano contenente la retta r e perpendicolare a π. Sia π_2 il piano contenente la retta s e perpendicolare a π. Sia t la retta che si ottiene come intersezione dei due piani π_1 e π_2.



<u>Si vede subito che</u> la retta t è proprio la retta di minima distanza tra r e s.

Quindi, le equazioni dei piani π_1 e π_2 sono una coppia di equazioni della retta t di minima distanza.