11. Rango di una matrice.

Consideriamo una matrice di tipo m×n ad elementi reali rappresentata nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & a_{(m-1)3} & a_{(m-1)4} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{(m-1),(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Per ogni i = 1, 2, 3, …, (m-1), m, col simbolo A_i indicheremo la i-esima riga della matrice A.

Per ogni j = 1, 2, 3, …, (n-1), n, col simbolo A^j indicheremo la j-esima colonna della matrice A.

Osservando che ogni riga di A è una n-upla ordinata di numeri reali possiamo scrivere

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{m-1}, A_m \in R^n$$

e parleremo di *vettore riga*.

Osservando che ogni colonna di A è una m-upla ordinata di numeri reali possiamo scrivere

$$A^1, A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}, A^n \in R^m.$$

e parleremo di *vettore colonna*.

11.1. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

Le due **righe** di A sono le **terne** ordinate $A_1 = (2, 3, 0)$ e $A_1 = (1, -7, 4)$.

Le tre **colonne** di A sono le **coppie** ordinate $A^1 = (2, 1)$, $A^2 = (3, -7)$ e $A^3 = (0, 4)$.

Le righe di A sono vettori dello spazio R^3 delle terne ordinate di numeri reali.

Le colonne di A sono vettori dello spazio R^2 delle coppie ordinate di numeri reali.

11.2. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 23 & 4 \end{bmatrix}$.

Le tre **righe** di A sono le **terne** ordinate $A_1 = (1, 1, 0)$, $A_2 = (0, 5, 1)$ e $A_3 = (3, 23, 4)$.

Le tre **colonne** di A sono le **terne** ordinate $A^1 = (1, 0, 3)$, $A^2 = (1, 5, 23)$ e $A^3 = (0, 1, 4)$.

Sia le righe che le colonne di A sono vettori dello spazio R^3 delle terne ordinate di numeri reali.

Ricordiamo che col simbolo M(m, n, R) indichiamo l'insieme (spazio vettoriale) contenente tutte e sole le matrici di tipo $m\times n$ ad elementi reali.

11.3. Definizione. Sia $A\in M(m, n, R)$. Siccome le righe di A sono vettori dello spazio R^n possiamo considerare il sottospazio $<A_1, A_2, A_3,\ldots, A_{m-1}, A_m>$ da essi generato. Tale sottospazio viene detto *spazio delle righe* della matrice A e indicato col simbolo $\mathcal{R}_A$. Quindi,

$$\mathcal{R}_A = <A_1, A_2, A_3,\ldots, A_{m-1}, A_m>$$

11.4. Definizione. Sia $A\in M(m, n, R)$. Siccome le colonne di A sono vettori dello spazio R^m possiamo considerare il sottospazio $<A^1, A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}, A^n>$ da essi generato. Tale sottospazio viene detto *spazio delle colonne* della matrice A e indicato col simbolo $\mathcal{C}_A$. Quindi,

$$\mathcal{C}_A = <A^1, A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}, A^n>$$

11.5. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 17 \end{bmatrix}$.

• Lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A è il sottospazio di R^3 generato dalle terne $A_1 = (2, 3, 0)$ e $A_2 = (1, -7, 17)$. Cioè, $\mathcal{R}_A = <(2, 3, 0), (1, -7, 17)>$.

• Lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle righe di A è il sottospazio di R^2 generato dalle coppie $A^1 = (2, 1)$, $A^2 = (3, -7)$ e $A^3 = (0, 17)$. Cioè, $\mathcal{C}_A = <(2, 1), (3, -7), (0, 17)>$.

• Si noti che gli spazi $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ sono sottospazi di spazi diversi.
Quindi, **non ha senso** chiedersi se essi siano uguali.

• Osservando che nessuna delle due terne (2, 3, 0) e (1, -7, 17) è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che esse sono linearmente indipendenti. Poiché sono anche generatori di $\mathcal{R}_A$ abbiamo provato che B = ((2, 3, 0), (1, -7, 17)) è una base dello spazio $\mathcal{R}_A$ .Quindi, $\dim\mathcal{R}_A = 2$.

• Si noti che la coppia $A^3 = (0, 17)$ si può scrivere come combinazione lineare delle altre due $A^1 = (2, 1)$, $A^2 = (3, -7)$. Infatti, $3(2, 1) + (-2)(3, -7) = (0, 17)$. Quindi, $(0, 17)\in<(2, 1), (3, -7)>$ e

$$<(2, 1), (3, -7)> = <(2, 1), (3, -7), (0, 17)> = \mathcal{C}_A$$

Per cui le due coppie (2, 1) e (3, -7) sono sufficienti per generare lo spazio delle colonne. Osservando che nessuna delle due coppie (2, 1) e (3, -7) è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che quelle due coppie sono anche linearmente indipendenti. Abbiamo provato che B' = ((2, 1), (3, -7)) è una base dello spazio $\mathcal{C}_A$. Quindi, $\dim\mathcal{C}_A = 2$.

11.6. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 23 & 4 \end{bmatrix}$.

• Lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A è il sottospazio di R^3 generato dalle terne

$A_1 = (1, 1, 0)$, $A_2 = (0, 5, 1)$ e $A_3 = (3, 23, 4)$. Cioè, $\mathcal{R}_A = <(1, 1, 0), (0, 5, 1), (3, 23, 4)>$.

• Lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle righe di A è il sottospazio di R^3 generato dalle terne

$A^1 = (1, 0, 3)$, $A^2 = (1, 5, 23)$ e $A^3 = (0, 1, 4)$. Cioè, $\mathcal{C}_A = <(1, 0, 3), (1, 5, 23), (0, 1, 4)>$.

• In questo caso lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe e lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A sono sottospazi dello <u>stesso spazio</u> R^3. Quindi, <u>**ha senso**</u> chiedersi se essi siano uguali.

• Si noti che la terna $A_3 = (3, 23, 4)$ si può scrivere come combinazione lineare delle altre due

$A_1 = (1, 1, 0)$ e $A_2 = (0, 5, 1)$. Infatti, $3(1, 1, 0) + 4(0, 5, 1) = (3, 23, 4)$.

Quindi, $(3, 23, 4) \in <(1, 1, 0), (0, 5, 1)>$ e

$$<(1, 1, 0), (0, 5, 1)> = <(1, 1, 0), (0, 5, 1), (3, 23, 4)> = \mathcal{R}_A$$

Per cui le due terne (1, 1, 0), (0, 5, 1) sono sufficienti per generare lo spazio delle righe.

Inoltre, osservando che nessuna delle due terne è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che quelle due terne sono anche linearmente indipendenti. Abbiamo provato che $B = ((1, 1, 0), (0, 5, 1))$ è una base dello spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A. Quindi, $\dim\mathcal{R}_A = 2$.

• Si noti che la terna $A^2 = (1, 5, 23)$ si può scrivere come combinazione lineare delle altre due

$A^1 = (1, 0, 3)$ e $A^3 = (0, 1, 4)$. Infatti, $1(1, 0, 3) + 5(0, 1, 4) = (1, 5, 23)$.

Quindi, $(1, 5, 23) \in <(1, 0, 3), (0, 1, 4)>$ e

$$<(1, 0, 3), (0, 1, 4)> = <(1, 0, 3), (1, 5, 23), (0, 1, 4)> = \mathcal{C}_A$$

Per cui le due terne (1, 0, 3), (0, 1, 4) sono sufficienti per generare lo spazio delle colonne.

Inoltre, osservando che nessuna delle due terne è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che quelle due terne sono anche linearmente indipendenti. Abbiamo provato che $B' = ((1, 0, 3), (0, 1, 4))$ è una base dello spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A. Quindi, $\dim\mathcal{C}_A = 2$.

• La terna (3, 23, 4), che ovviamente appartiene allo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A (è la terza riga di A) <u>**non**</u> appartiene allo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A. Infatti, non è possibile ottenere la terna

(3, 23, 4) come combinazione lineare degli elementi della base B' dello spazio $\mathcal{C}_A$.

$(3, 23, 4) \in \mathcal{C}_A \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 4) = (3, 23, 4) \iff$

$\iff \exists \alpha,\beta \in R : (\alpha, \beta, 3\alpha+4\beta) = (3, 23, 4) \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha = 3$ et $\beta = 23$ et $3\alpha+4\beta = 4 \iff$

$\iff 9 + 92 = 4 \iff 101 = 4$ (**assurdo)**

• La terna (1, 5, 23), che ovviamente appartiene allo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A (è la seconda riga di A) **<u>non</u>** appartiene allo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A. Infatti, non è possibile ottenere la terna (1, 5, 23) come combinazione lineare degli elementi della base B dello spazio $\mathcal{R}_A$.

$(1, 5, 23) \in \mathcal{R}_A \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 5, 1) = (1, 5, 23) \iff$

$\iff \exists \alpha,\beta \in R : (\alpha, \alpha+5\beta, \beta) = (1, 5, 23) \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha = 1 \text{ et } \beta = 23 \text{ et } \alpha+5\beta = 5 \iff$

$\iff 1 + 105 = 5 \iff 106 = 5$ **(assurdo)**

• La terna (19, –16, –7) appartiene sia allo spazio $\mathcal{R}_A$ che allo spazio $\mathcal{C}_A$ infatti

$(19, -16, -7) = 19(1, 1, 0) + (-7)(0, 5, 1)$ et $(19, -16, -7) = 19(1, 0, 3) + (-16)(0, 1, 4)$

• Ne concludiamo che i sottospazi $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ hanno intersezione non vuota ma nessuno dei due è sottospazio dell'altro. In particolare, si ha che i sottospazi $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ sono diversi.

11.7. Osservazione. Nei due precedenti esempi abbiamo visto che:

11.7.1. $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ **non sono**, in generale, sottospazi dello **stesso** spazio;

11.7.1. anche quando $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ sono sottospazi dello stesso spazio, in generale, si ha $\mathcal{R}_A \neq \mathcal{C}_A$.

11.8. Osservazione. In ognuno dei due precedenti esempi abbiamo visto che $\dim\mathcal{R}_A = \dim\mathcal{C}_A$.

Quanto osservato in 11.8 è vero in generale, cioè si può provare il seguente:

11.9. Teorema. Lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe e lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di una matrice A hanno la **<u>stessa</u>** dimensione.

Tenendo conto del Teorema 11.9 è ben posta la seguente

11.10. Definizione. Diremo *rango di una matrice* A, e lo indicheremo col simbolo rg(A), la <u>dimensione</u> del suo spazio delle righe oppure la dimensione del suo spazio delle colonne.

11.11. Osservazione. Se $A \in M(m, n, R)$ allora $0 \le rg(A) \le \min\{m, n\}$. Inoltre, rg(A) = 0 se e solo se A è la matrice nulla (tutti i suoi elementi sono uguali a zero). Infatti,

$rg(A) = 0 \iff \dim\mathcal{R}_A = 0 \iff \mathcal{R}_A = \{\mathbf{0}\}$ (spazio nullo) $\iff$ tutti i generatori $\mathcal{R}_A$ sono uguali al vettore nullo $\iff$ tutte le righe di A sono nulle $\iff$ A è la matrice nulla

11.12. Definizione. Diremo che $A \in M(m, n, R)$ è una *matrice a scalini* se verifica le proprietà:

(SCAL1) Se una riga di A è la riga **nulla** (cioè i suoi elementi sono tutti zeri) allora sotto di essa ci possono essere solo righe nulle.

(SCAL2) Se $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, \ldots, a_{i(n-2)}, a_{i(n-1)}, a_{in},)$ è una riga **non nulla** e j è il minimo indice di colonna per cui è $a_{ij} \neq 0$ (cioè $h < j \Rightarrow a_{ij} = 0$) allora $a_{(i+1),k} = 0$ per ogni $k \leq j$.

11.13. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ **non** è a scalini. Infatti, poiché la prima riga non è nulla e $a_{11} = 2 \neq 0$ si ha che $j = 1$ è il minimo indice di colonna per cui $a_{1j} \neq 0$. Per soddisfare la proprietà (SCAL2) dovrebbe essere $a_{2,k} = 0$ per ogni $k \leq j = 1$ cioè $a_{21} = 0$. Ma $a_{21} = -1 \neq 0$.

11.14. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.15. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **non** è a scalini. Perché?

11.16. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.17. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.18. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.19. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **non** è a scalini. Perché?

11.20. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.21. Osservazione. Sia A una matrice **a scalino**.

Se A_x è una riga non nulla di A, allora con il simbolo j_x indicheremo l'indice di colonna del primo elemento non nullo di tale riga, cioè si ha che $a_{xj_x} \neq 0$ e per ogni $j \leq j_x$ che $a_{xj} = 0$.

Valgono le seguenti proprietà:

11.21.1. Se la i-esima riga A_i con $i \geq 2$ è non nulla, allora sono non nulle anche tutte le (i–1) righe al di sopra di essa, cioè $A_h = 0$ se $1 \leq h \leq (i-1)$.

11.21.2. Se A_i e A_{i+1} sono due righe non nulle di A, allora si ha che $j_{(i+1)} \geq j_i + 1$.

11.21.3. Se A_i e A_{i+s} sono due righe non nulle di A, allora si ha che $j_{(i+s)} \geq j_i + s$.

11.21.4. Se A_h è una riga non nulla di A, allora si ha che $j_h \geq h$.

11.21.5. Se A_k è una riga non nulla di A allora per ogni $h \geq (k+1)$ e per ogni $j \leq j_k$ si ha che $a_{hj}= 0$.

11.21.6. Se A_k è una riga non nulla di A allora per ogni $h \geq (k+1)$ si ha che $a_{hj_k}= 0$.

Dimostrazione.

11.21.1. Immediata conseguenza di (SCAL1).

11.21.2. Immediata conseguenza di (SCAL2).

11.21.3. Se s = 1 la tesi è vera per la 11.2.2. Supponiamo che la tesi sia vera per (s – 1), cioè che sia $j_{(i+s-1)} \geq j_i + (s-1)$. Proviamo la tesi per s. Applicando la 11.2.2. abbiamo che $j_{(i+s)} \geq j_{(i+s-1)} + 1$. Quindi, $j_{(i+s)} \geq j_{(i+s-1)} + 1 \geq j_i + (s-1) +1 = j_i + s$.

11.21.4. Se h = 1 allora per ogni indice j di colonna si ha che $j \geq 1$. Quindi, $j_1 \geq 1$.

Se $h \geq 2$, allora tutte le (h–1) righe al di sopra di A sono non nulle. Applicando la 11.2.3. alla prima riga A_1 e alla riga A_h abbiamo che $s = (h-1)$ e $j_h \geq j_1 + s \geq 1 + (h-1) = h$.

11.21.5. Per 11.2.3 abbiamo che $j_h \geq j_k + (h-k) \geq j_k + 1$. Quindi, è $j_h > j_k$.

Se esistessero $j \leq j_k$ e $h \geq (k+1)$ tale che $a_{hj} \neq 0$ allora il primo elemento non nullo della h-esima riga avrebbe indice di colonna $j_h \leq j$, da cui $j_h \leq j_k$. Essendo ciò assurdo, si ha la tesi.

11.21.6. Caso particolare di 11.21.5 con $j = j_k$ ■

11.22. Esempio. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 5 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$a_{12} = 2 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della prima riga, $1 < 2$.

Tutti gli elementi al di sotto di a_{12} sono nulli.

$a_{23} = -1 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della seconda riga, $2 < 3$.

Tutti gli elementi al di sotto di a_{23} sono nulli.

$a_{35} = 7 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della terza riga, $3 < 5$.

Tutti gli elementi al di sotto di a_{35} sono nulli.

$a_{48} =5 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della quarta riga, $4 < 8$.

Tutti gli elementi al di sotto di a_{48} sono nulli.

$a_{59} =11 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della quinta riga, $5 < 9$.

Tutti gli elementi al di sotto di a_{59} sono nulli.

Si osservi che, negli ultimi tre casi è $j > (i+1)$.

11.23. Teorema. Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero delle sue righe non nulle.

Dimostrazione. Se A è una matrice nulla, allora il suo rango è zero che è proprio uguale al numero delle sue righe non nulle. Ora, sia A una matrice non nulla a scalini di tipo m×n.

Sia $r \leq m$ il numero di righe non nulle di A.

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ \alpha_r \\ \\ \alpha_m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . \; . \; . & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . \; . \; . & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . \; . \; . & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \; . \; . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & a_{r4} & . \; . \; . & a_{r(n-1)} & a_{rn} \\ . & . & . & . & . \; . \; . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & . \; . \; . & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad s_{(n-1)} \quad s_n$$

Consideriamo una combinazione lineare delle r righe non nulle di A a coefficienti

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4 , \ldots , \alpha_{(r-1)} , \alpha_r$$

$\alpha_1(a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{14} , \ldots , a_{1(n-1)} , a_{1n}) + \alpha_2(a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{24} , \ldots , a_{2(n-1)} , a_{2n}) +$

$+ \alpha_3(a_{31} , a_{32} , a_{33} , a_{34} , \ldots , a_{3(n-1)} , a_{3n}) + \alpha_4(a_{41} , a_{42} , a_{43} , a_{44} , \ldots , a_{4(n-1)} , a_{4n}) +$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{(r-1)}(a_{(r-1)1} , a_{(r-1)2} , a_{(r-1)3} , a_{(r-1)4} , \ldots , a_{(r-1)(n-1)} , a_{(r-1)n}) +$

$+ \alpha_r(a_{r1} , a_{r2} , a_{r3} , a_{r4} , \ldots , a_{r(n-1)} , a_{rn})$

Ponendo

$s_1 = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31} + \alpha_4 a_{41} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)1} + \alpha_r a_{r1}$

$s_2 = \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32} + \alpha_4 a_{42} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)2} + \alpha_r a_{r2}$

$s_3 = \alpha_1 a_{13} + \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 a_{33} + \alpha_4 a_{43} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)3} + \alpha_r a_{r3}$

$s_4 = \alpha_1 a_{14} + \alpha_2 a_{24} + \alpha_3 a_{34} + \alpha_4 a_{44} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)4} + \alpha_r a_{r4}$

……………………………………………………………..

$s_{(n-1)} = \alpha_1 a_{1(n-1)} + \alpha_2 a_{2(n-1)} + \alpha_3 a_{3(n-1)} + \alpha_4 a_{4(n-1)} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)(n-1)} + \alpha_r a_{r(n-1)}$

$s_n = \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \alpha_3 a_{3n} + \alpha_4 a_{4n} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)n} + \alpha_r a_{rn}$

si ha che il risultato della combinazione lineare delle r righe non nulle di A è la n-upla

$$(s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_{(n-1)}, s_n)$$

Ora, proviamo che le r righe non nulle sono linearmente indipendenti. Cioè, proviamo che

$$(s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_{(n-1)}, s_n) = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_{(r-1)} = \alpha_r = 0.$$

Sia $a_{1j_1} \neq 0$ il primo elemento non nullo della prima riga; quindi $a_{hj_1} = 0$ per ogni $h \geq 2$.

Sia $a_{2j_2} \neq 0$ il primo elemento non nullo della seconda riga; quindi $j_2 > j_1$ e $a_{hj_2} = 0$ per ogni $h \geq 3$.

Sia $a_{3j_3} \neq 0$ il primo elemento non nullo della terza riga; quindi $j_3 > j_2$ e $a_{hj_3} = 0$ per ogni $h \geq 4$.

Sia $a_{4j_4} \neq 0$ il primo elemento non nullo della quarta riga; quindi $j_4 > j_3$ e $a_{hj_4} = 0$ per ogni $h \geq 5$.

……………………………………………………

Sia $a_{(r-1)j_{(r-1)}} \neq 0$ il primo elemento non nullo della (r–1)-esima riga; quindi $a_{hj_{(r-1)}} = 0$ per ogni $h \geq r$.

Sia $a_{rj_r} \neq 0$ il primo elemento non nullo della r-esima riga; quindi $j_r > j_{(r-1)}$ e $a_{hj_r} = 0$ per ogni $h > r$.

Poiché $a_{hj_1} = 0$ per ogni $h \geq 2$ si ha $s_{j_1} = \alpha_1 a_{1j_1}$

Poiché $a_{hj_2} = 0$ per ogni $h \geq 3$ si ha $s_{j_2} = \alpha_1 a_{1j_2} + \alpha_2 a_{2j_2}$

Poiché $a_{hj_3} = 0$ per ogni $h \geq 4$ si ha $s_{j_3} = \alpha_1 a_{1j_3} + \alpha_2 a_{2j_3} + \alpha_3 a_{3j_3}$

Poiché $a_{hj_4} = 0$ per ogni $h \geq 5$ si ha $s_{j_4} = \alpha_1 a_{1j_4} + \alpha_2 a_{2j_4} + \alpha_3 a_{3j_4} + \alpha_4 a_{4j_4}$

……………………………………………………

Poiché $a_{hj_{(r-1)}} = 0$ per ogni $h \geq r$ si ha

$$s_{j_{(r-1)}} = \alpha_1 a_{1j_{(r-1)}} + \alpha_2 a_{2j_{(r-1)}} + \alpha_3 a_{3j_{(r-1)}} + \alpha_4 a_{4j_{(r-1)}} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)j_{(r-1)}}$$

Poiché $a_{hj_r} = 0$ per ogni $h > r$ si ha

$$s_{j_r} = \alpha_1 a_{1j_r} + \alpha_2 a_{2j_r} + \alpha_3 a_{3j_r} + \alpha_4 a_{4j_r} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)j_r} + \alpha_r a_{rj_r}$$

$0 = s_{j_1} = \alpha_1 a_{1j_1} \Rightarrow \alpha_1 = 0$ (poichè $a_{1j_1} \neq 0$)

$0 = s_{j_2} = \alpha_1 a_{1j_2} + \alpha_2 a_{2j_2} \Rightarrow \alpha_2 a_{2j_2} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$ (poichè $a_{2j_2} \neq 0$)

$0 = s_{j_3} = \alpha_1 a_{1j_3} + \alpha_2 a_{2j_3} + \alpha_3 a_{3j_3} \Rightarrow \alpha_3 a_{3j_3} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$ (poichè $a_{3j_3} \neq 0$)

$0 = s_{j_4} = \alpha_1 a_{1j_4} + \alpha_2 a_{2j_4} + \alpha_3 a_{3j_4} + \alpha_4 a_{4j_4} \Rightarrow \alpha_4 a_{4j_4} = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0$ (poichè $a_{4j_4} \neq 0$)

……………………………………………………

$$0 = s_{j_{(r-1)}} = \alpha_1 a_{1j_{(r-1)}} + \alpha_2 a_{2j_{(r-1)}} + \alpha_3 a_{3j_{(r-1)}} + \alpha_4 a_{4j_{(r-1)}} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)j_{(r-1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)j_{(r-1)}} = 0 \Rightarrow \alpha_{(r-1)} = 0 \quad (\text{poichè } a_{(r-1)j_{(r-1)}} \neq 0)$$

$$0 = s_{j_r} = \alpha_1 a_{1j_r} + \alpha_2 a_{2j_r} + \alpha_3 a_{3j_r} + \alpha_4 a_{4j_r} + \ldots + \alpha_{(r-1)} a_{(r-1)j_r} + \alpha_r a_{rj_r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_r a_{rj_r} = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0 \quad (\text{poichè } a_{rj_r} \neq 0)$$

Quindi, le r righe non nulle di A sono linearmente indipendenti. Ovviamente, tali r righe sono anche generatori dello spazio delle righe. Per cui esse sono una base per lo spazio delle righe che ha, quindi, dimensione r. Per cui il rango di A è uguale al numero r delle sue righe non nulle. ■

11.24. Esempio. Si consideri la seguente matrice di tipo 7×9 a scalini avente le ultime due righe nulle. Proviamo che il suo rango è uguale al numero delle sue righe non nulle, cioè (7–2) = 5. Per far ciò, consideriamo una combinazione lineare delle sue righe con coefficienti α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 5 & 5 & 5 & 7\\
0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccccccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9
\end{array}
\end{array}$$

Poiché $a_{12} = 2 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della prima riga, si ha che $j_1 = 2$.

Poiché $a_{23} = -1 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della seconda riga, si ha che $j_2 = 3$.

Poiché $a_{35} = 7 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della terza riga, si ha che $j_3 = 5$.

Poiché $a_{48} = 5 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della quarta riga, si ha che $j_4 = 8$.

Poiché $a_{59} = 11 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della quinta riga, si ha che $j_5 = 9$.

$s_2 = 2\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0$

$s_3 = 3\alpha_1 + (-1)\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1)\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0$

$s_5 = (-1)\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7\alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 0$

$s_8 = 5\alpha_1 + (-2)\alpha_2 + 4\alpha_3 + 8\alpha_4 = 0 \Rightarrow \quad 8\alpha_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = 0$

$s_9 = 7\alpha_1 + 1\alpha_2 + 6\alpha_3 + 0\alpha_4 + 11\alpha_5 = 0 \Rightarrow \quad 11\alpha_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_5 = 0$

Poichè le prime 5 righe sono linearmente indipendenti, il rango di A è proprio uguale a 5.

11.25. Teorema. Sia A una matrice non nulla di tipo m×n.

Le righe A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , …, $A_{(m-1)}$ e A_m , sono un insieme di generatori dello spazio $\mathcal{R}_A$.

Tramite un numero **finito** di **opportune** operazioni elementari applicate alle righe di A è **sempre** possibile trovare m nuovi generatori B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , …, $B_{(m-1)}$ e B_m di $\mathcal{R}_A$ tali che la matrice B avente proprio tali generatori come righe è una matrice di tipo m×n **a scalino**.

Ovviamente, $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$ e, quindi, rg(A) = rg(B) = numero di righe non nulle di B.

Dimostrazione. Si segua il seguente algoritmo

(1) $j := 0$ et $k := 0$ et $I := \{1, 2, 3, 4, \dots, (m-1), m\}$ (parametri iniziali)

(2) incrementa di 1 il parametro j; quindi, $j := j + 1$

(3) se $j = (n + 1)$ allora **STOP**

(4) Se per ogni $i \in I$ è $a_{ij} = 0$ allora torna al punto (2).

(5) A questo punto esiste almeno un $i \in I$ tale che $a_{ij} \neq 0$ (la matrice A è non nulla).

(6) incrementa di 1 il parametro k; quindi, $k := k + 1$

(7) se $k = m$ allora **STOP**

(8) scambia la i-esima riga con la k-esima riga; dopo questo scambio si ha che $a_{kj} \neq 0$

Si noti che a_{kj} è il primo elemento non nullo della k-esima riga.

(9) "togli" k dall'insieme I; quindi, $I := \{h \in N \mid (k+1) \leq h \leq m\}$

(10) Per ogni $h \in I$ (cioè $h > k$), se $a_{hj} \neq 0$ sostituisci la riga A_h con la riga $[A_h + (-a_{hj}/a_{kj})A_k]$.

Dopo questa sostituzione si ha che per ogni $h \in I$ (cioè $h > k$) si ha che $a_{hj} = 0$,

cioè sono nulli tutti gli elementi al di sotto del primo elemento non nullo della k-esima riga.

(11) torna al punto (2)

E' evidente che l'algoritmo termina dopo un numero finito di passi.

Per il punto (8), le eventuali righe nulle si trovano dopo le righe non nulle. Quindi, la matrice soddisfa la proprietà (SCAL1).

Inoltre, se $a_{kj} \neq 0$ è il primo elemento non nullo della k-esima riga, allora si ha che:

- per ogni $s \leq (j - 1)$ e per ogni $h \geq k$ è $a_{hs} = 0$, per il punto (4);

- per ogni $h > k$ è $a_{hj} = 0$, per il punto (10).

Quindi, per ogni $s \leq j$ è $a_{(k+1)s} = 0$ e la matrice soddisfa anche la proprietà (SCAL2). ■

11.26. Esempio. Calcolare il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -1 & 0 & -3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

Siccome le prime 2 colonne sono nulle il punto (4) ci rimanda al punto (2) fino a che $j = 3 \leq 9 = n$.

Al punto (5) abbiamo che esistono due elementi $a_{23} = -1$ e $a_{33} = 2$ non nulli.

<u>Scegliamo</u> a_{23} e, quindi, è $i = 2$.

Al punto (6) abbiamo che $k = 1 < 7 = m$

Al punto (8) scambiamo la seconda (i-esima) riga con la prima (k-esima) riga e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -1 & 0 & -3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

Al punto (9) ora è $I = \{2,3,4,5,6,7\}$.

Al punto (10), poiché $a_{33} = 2 \neq 0$ sostituiamo la terza riga con $A_3 + 2A_1$ e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 4 \leq 9 = n$.

Il punto (4) ci rimanda al punto (2) poiché per ogni $i \in I = \{2,3,4,5,6,7\}$ è $a_{i4} = 0$.

Quindi, ora è $j = 5 \leq 9 = n$.

Al punto (5) abbiamo solo l'elemento $a_{35} = 7 \neq 0$. Quindi, i = 3.

Al punto (6) abbiamo che k = 2 < 7 = m

Al punto (8) scambiamo la terza (i-esima) riga con la seconda (k-esima) riga e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

Al punto (9) ora è I = {3,4,5,6,7}.

Al punto (10) non accade nulla poiché tutti gli elementi sotto $a_{25} = 7$ sono già nulli.

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 6 \leq 9 = n$.

Al punto (5) abbiamo tre elementi $a_{56} = 3$, $a_{66} = 3$ e $a_{76} = -6$ non nulli.

<u>Scegliamo</u> a_{66} e, quindi, i = 6.

Al punto (6) abbiamo che k = 3 < 7 = m

Al punto (8) scambiamo la sesta (i-esima) riga con la terza (k-esima) riga e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

Al punto (9) ora è I = {4,5,6,7}.

Al punto (10), poiché

- $a_{56} = 3 \neq 0$ sostituisco la quinta riga con $A_5 + (-1)A_3$
- $a_{76} = -6 \neq 0$ sostituisco la settima riga con $A_7 + 2A_3$

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 7 \leq 9 = n$.

Al punto (5) abbiamo due elementi $a_{57} = 1 \neq 0$ e $a_{77} = -1$ non nulli. <u>Scegliamo</u> a_{57} e, quindi, $i = 5$.

Al punto (6) abbiamo che $k = 4 < 7 = m$

Al punto (8) scambiamo la quinta (i-esima) riga con la quarta (k-esima) riga e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

Al punto (9) ora è $I = \{5,6,7\}$.

Al punto (10), poiché $a_{77} = -1 \neq 0$ sostituisco la settima riga con $A_7 + (-1)A_4$ e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 8 \leq 9 = n$.

Il punto (4) ci rimanda al punto (2) poiché per ogni $i \in I = \{5,6,7\}$ è $a_{i8} = 0$.

Quindi, ora è $j = 9 \leq 9 = n$. Il punto (4) ci rimanda al punto (2) poiché per ogni $i \in I$ è $a_{i9} = 0$.

Quindi, ora è $j = 10 = (n + 1)$. Per il punto (3) l'algoritmo si ferma.

La matrice ottenuta è a scalini e il suo rango è 4. Quindi, anche la matrice iniziale ha rango 4.

11.27. Esempio. Calcolare il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Al punto (4) è $j = 1 \leq 3 = n$, poiché la prima colonna ha almeno un elemento non nullo.

Al punto (5) <u>scegliamo</u> l'elemento non nullo $a_{31} = 1$ della prima colonna, quindi $i = 3$.

Al punto (6) abbiamo $k = 1 < 4 = m$

Al punto (8) scambiamo la terza (i-esima) riga con la prima (k-esima) riga e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Al punto (9) ora è $I = \{2,3,4\}$.

Al punto (10), poiché:

- $a_{21} = 3 \neq 0$ sostituisco la seconda riga con $A_2 + (-3)A_1 = (0, -3, -2)$
- $a_{31} = 2 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $A_3 + (-2)A_1 = (0, -3, -2)$
- $a_{41} = -2 \neq 0$ sostituisco la quarta riga con $A_4 + 2A_1 = (0, 3, 2)$

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 2 \leq 3 = n$.

Al punto (5) <u>scegliamo</u> l'elemento non nullo $a_{22} = -3$ della seconda colonna, quindi $i = 2$.

Al punto (6) abbiamo $k = 2 < 4 = m$

Al punto (8) non effettuiamo alcun scambio poiché $i = 2 = k$.

Al punto (9) ora è $I = \{3,4\}$.

Al punto (10), poiché:

- $a_{32} = -3 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $A_3 + (-1)A_2 = (0, 0)$
- $a_{42} = 3 \neq 0$ sostituisco la quarta riga con $A_4 + A_2 = (0, 0)$

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 3 \leq 3 = n$.

Il punto (4) ci rimanda al punto (2) poiché per ogni $i \in I = \{3,4\}$ è $a_{i3} = 0$.

Quindi, ora è $j = 4 = (n + 1)$. Per il punto (3) l'algoritmo si ferma.

La matrice ottenuta è a scalini e il suo rango è 2. Quindi, anche la matrice iniziale ha rango 2.

11.28. Esempio. Calcolare il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Al punto (4) è $j = 1 \leq 4 = n$, poiché la prima colonna ha almeno un elemento non nullo.

Al punto (5) <u>scegliamo</u> l'elemento non nullo $a_{21} = 1$ della prima colonna, quindi $i = 2$.

Al punto (6) abbiamo $k = 1 < 3 = m$

Al punto (8) scambiamo la seconda (i-esima) riga con la prima (k-esima) riga e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Al punto (9) ora è $I = \{2,3\}$.

Al punto (10), poiché:

- $a_{21} = 2 \neq 0$ sostituisco la seconda riga con $A_2 + (-2)A_1 = (0, -1, 2, 1)$
- $a_{31} = -2 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $A_3 + 2A_1 = (0, 4, -2, -1)$

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 2 \leq 4 = n$.

Al punto (5) <u>scegliamo</u> l'elemento non nullo $a_{22} = -1$ della seconda colonna, quindi $i = 2$.

Al punto (6) abbiamo $k = 2 < 3 = m$

Al punto (8) non effettuiamo alcun scambio poiché $i = 2 = k$.

Al punto (9) ora è I = {3}.

Al punto (10), poiché $a_{32} = 4 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $A_3 + 4A_2 = (0, 0, 6, 3)$

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Tornati al punto (2) abbiamo $j = 3 \leq 4 = n$.

Al punto (5) abbiamo <u>solo</u> $3 \in I = \{3\}$ tale che $a_{3j} = a_{33} = 6 \neq 0$. Quindi, è $i = 3$.

Al punto (6) abbiamo $k = 3 = m$. Per il punto (3) l'algoritmo si ferma.

La matrice ottenuta è a scalini e il suo rango è 3. Quindi, anche la matrice iniziale ha rango 3.

12. Rango di una matrice: il caso delle matrici quadrate

Nel seguito A sarà una matrice ad elementi reali di tipo n×n rappresentata nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{(n-1),(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

12.1. Definizione. Diremo che A è una *matrice (quadrata) di ordine n*.

12.2. Definizione. Diremo *diagonale principale* di A, la n-upla ordinata

$$(a_{11}\,,\, a_{22}\,,\, a_{33}\,,\, a_{44}\,,\, a_{55}\,,\, \ldots..\,,\, a_{(n-2),(n-2)}\,,\, a_{(n-1),(n-1)1}\,,\, a_{nn}\,)$$

12.3. Osservazione. Per ogni indice i di riga e ogni indice j di colonna si ha che:

• se i = j allora l'elemento a_{ij} di A si trova "*sulla*" diagonale principale;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & a_{44} & \\ & & & & a_{55} \end{bmatrix}$$

• se i > j allora l'elemento a_{ij} di A si trova "*al di sotto*" della diagonale principale;

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ a_{21} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \end{bmatrix}$$

• se i < j allora l'elemento a_{ij} di A si trova "*al di sopra*" della diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & a_{34} & a_{35} \\ & & & & a_{45} \\ & & & & \end{bmatrix}$$

12.4. Definizione. Diremo che una matrice quadrata A è:

• *triangolare superiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale, cioè

$$i > j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0; \qquad \begin{bmatrix} & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

• *triangolare inferiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale, cioè

$$i < j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0; \qquad \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

• *diagonale* se sono nulli tutti gli elementi che **non** si trovano sulla diagonale principale, cioè

$$i \neq j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0; \qquad \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

12.5. Osservazione. Una matrice quadrata A è diagonale se e solo se è sia triangolare superiore che triangolare inferiore.

Tenendo conto di (SCAL1) e dell'osservazione 11.21.4 si ha subito la seguente

12.6. Osservazione. Tutte le matrici quadrate a scalino sono matrici triangolari superiori.

12.7. Esempio. Si vede che le seguenti quattro matrici a scalino

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono anche matrici triangolari superiori.

12.8. Osservazione. **<u>NON</u>** tutte le matrici triangolari superiori sono matrici a scalino.

12.9. Esempio. Si vede che delle seguenti quattro matrici triangolari superiori

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>nessuna</u> è una matrice a scalino.

Ricordiamo che nell'Osservazione 11.21 abbiamo stabilito di indicare col simbolo j_x l'indice di colonna del primo elemento non nullo della x-esima riga di una matrice a scalino A non nulla.

12.10. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n a scalino. Stabiliamo che:

- $S_n := \{s \in \mathbb{N} \mid 1 \leq s \leq n\}$
- $J_A := \{j_x \in S_n \mid x$ è l'indice di colonna del primo elemento non nullo della x-esima riga di A$\}$

Ovviamente, $\emptyset \subseteq J_A \subseteq S_n$ essendo $J_A = \emptyset$ se e solo se A è la matrice nulla.

12.11. Esempio. Consideriamo le seguenti matrici a scalino

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che $J_A = \emptyset$, $J_B = \{1,2,3\}$, $J_C = \{1,3,4\}$ e $J_D = \{2,4,5\}$.

Tenendo conto delle Osservazioni 11.21.3 e 11.21.4 si ha subito la seguente:

12.12. Osservazione. Se A è una matrice quadrata di ordine n a scalino, allora si ha che

12.12.1. $|J_A| :=$ numero di elementi di J_A = numero di righe non nulle di A

12.12.2. le righe di A sono tutte non nulle se e solo se $|J_A| = n$, ovvero se e solo se $J_A = S_n$.

12.12.3. Le righe di A sono tutte non nulle se e solo se per ogni $s \in S_n$ si ha che $j_s = s$.

12.13. Esempio. Consideriamo le seguenti matrici a scalino

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che la matrice A di ordine 2 ha $|J_A| = 0$ righe non nulle.

Si ha che la matrice B di ordine 3 ha $|J_B| = 3$ righe non nulle.

Si ha che la matrice C di ordine 4 ha $|J_C| = 3$ righe non nulle.

Si ha che la matrice D di ordine 5 ha $|J_D| = 3$ righe non nulle.

Inoltre, si noti che le righe di B sono tutte non nulle e $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ e $j_3 = 3$.

Tenendo conto dell'Osservazione 11.11 è ben posta la seguente:

12.14. Definizione. Diremo che A è una *matrice quadrata di rango massimo* se A è una matrice quadrata avente rango uguale al suo ordine.

Conseguenza immediata del Teorema 11.23 e dell'Osservazione 12.12.3 è la seguente

12.15. Osservazione. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se tutte le sue righe sono non nulle, ovvero se e solo se per ogni $s \in S_n$ si ha che $j_s = s$.

12.16. Teorema. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se tutti gli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale sono non nulli.

Dimostrazione. Se A è una matrice quadrata a scalino di rango massimo, allora (per l'Osservazione 12.15) per ogni $s \in S_n$ si ha che $j_s = s$, ovvero per ogni $s \in S_n$ si ha che l'elemento $a_{ss} = a_{sj_s} \neq 0$ (essendo il primo elemento non nullo della s-esima riga di A). Viceversa, sia A una matrice a scalino avente tutti gli elementi della diagonale principale non nulli. Per l'Osservazione 12.6 la matrice A è triangolare superiore. Quindi, per ogni $s \in S_n$ l'elemento a_{ss} è il primo elemento non nullo della s-esima riga, cioè per ogni $s \in S_n$ si ha che $j_s = s$. Per cui A ha rango massimo. ■

12.17. Corollario. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se è non nullo il prodotto di tutti gli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.

12.18. Teorema. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione n.

Sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$) una base di V_R.

Sia D = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$) una n-upla ordinata di vettori di V_R.

Per ogni $s \in S_n$ sia $\mathbf{a}_s$ la n-upla di coordinate del vettore $\mathbf{v}_s$ rispetto alla base B.

Cioè, se $\Omega_B : V_R \to R^n$ è la coordinatizzazione di V_R rispetto a B, allora per ogni $s \in S_n$ è $\mathbf{a}_s = \Omega_B(\mathbf{v}_s)$.

Sia A la matrice avente come righe le n-uple $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, …, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$.

L'insieme D è una base di V_R se e solo se la matrice A ha rango massimo.

Dimostrazione. Per il l'Osservazione 10.15.2 l'insieme D è una base di V_R se e solo se gli n vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti. Per i Teoremi 10.23 e 10.24 gli n vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti se s solo se le n n-uple $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, …, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti, ovvero se e solo se le n righe di A sono linearmente indipendenti. Quest'ultimo fatto accade se e solo se il rango di A è uguale a n, cioè è massimo. ■

Tenendo conto dei Teoremi 11.25, 12.16, 12.18 e del Corollario 12.17 si ha subito il seguente:

12.19. Corollario. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione n.

Sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$) una base di V_R.

Sia D = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$) una n-upla ordinata di vettori di V_R.

Per ogni $s \in S_n$ sia $\mathbf{a}_s$ la n-upla di coordinate del vettore $\mathbf{v}_s$ rispetto alla base B.

Sia A la matrice avente come righe le n-uple $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, …, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$.

Sia A' una matrice a scalino ottenuta da A usando solo le operazioni elementari per righe.

L'insieme D è una base di V_R se e solo se tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale principale della matrice A' sono non nulli, ovvero se e solo se è non nullo il prodotto di tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale principale della matrice A'.

12.20. Esempio. Si considerino i seguenti polinomi di $R_5[x]$:

$p_1(x) = - x^5 + x^4 + 4x^2 + x$ $\quad$ $p_2(x) = 2x^5 - 11x^2 - 2x + 4$ $\quad$ $p_3(x) = -3x^5 + 7x^4 + 5x + 12$

$p_4(x) = 4x^5 + 2x^2 - 12x - 8$ $\quad$ $p_5(x) = -5x^5 + 7x^4 + 23x^2 + 3x$

Sia U <$p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$, $p_5(x)$> lo spazio da essi generato.

- Trovare dim(U).
- Posto r := dim(U), trovare una base B = ($q_1(x)$, …, $q_r(x)$) di U.
- Trovare altri (6 – r) polinomi $q_{r+1}(x)$, …, $q_6(x)$ tali che (($q_1(x)$, …, $q_6(x)$)) sia una base di $R_5[x]$.

La coordinatizzazione di $R_5[x]$ rispetto alla base canonica C = $(x^5 , x^4 , x^3 , x^2 , x , 1)$ è la funzione

$\Omega_B : R_5[x] \to R^6$ così definita: $\Omega_B(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f) := (a, b, c, d, e, f)$

Si ha che

$\Omega_B(p_1(x)) = \Omega_B(- x^5 + x^4 + 4x^2+ x) = (- 1, 1, 0, 4, 1, 0) = \mathbf{a}_1$

$\Omega_B(p_2(x)) = \Omega_B(2x^5 - 11x^2 - 2x + 4) = (2, 0, 0, -11, -2, 4) = \mathbf{a}_2$

$\Omega_B(p_3(x)) = \Omega_B(-3x^5 + 7x^4 + 5x + 12) = (-3, 7, 0, 0, 5, 12) = \mathbf{a}_3$

$\Omega_B(p_4(x)) = \Omega_B(4x^5 + 2x^2 - 12x - 8) = (4, 0, 0, 2, -12, -8) = \mathbf{a}_4$

$\Omega_B(p_5(x)) = \Omega_B(-5x^5 + 7x^4 + 23x^2 + 3x) = (-5, 7, 0, 23, 3, 0) = \mathbf{a}_4$

Sia A la matrice avente $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ come righe, cioè $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -11 & -2 & 4 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & -12 & -8 \\ -5 & 7 & 0 & 23 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Tramite operazioni elementari si trova la matrice $A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si ha che lo spazio delle righe di A e di A’ coincidono. Quindi, dim(U) = rg(A) = rg(A’) = 3.

Le prime tre righe di A’ sono una base dello spazio delle righe di A’, quindi i polinomi

$q_1(x) = p_1(x) = - x^5 + x^4 + 4x^2+ x$, $q_2(x) = 2x^4 -3x^2 + 4$, $q_3(x) = -3x^2 + x + 2$ sono una base di U.

Tenendo conto del Corollario 12.19 possiamo prendere, a piacere, tre polinomi nel modo seguente:

$q_4(x) = a_{33}x^3 + a_{34}x^2 + a_{35}x + a_{36}$, $q_5(x) = a_{55}x + a_{56}$, $q_6(x) = a_{66}$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$$

con $a_{33} \neq 0$, $a_{55} \neq 0$ e $a_{66} \neq 0$.

Per esempio, $q_4(x) = x^3$, $q_5(x) = x$, $q_6(x) = 1$.

13. Determinante di una matrice quadrata

13.1. Definizione. Dati *n* numeri reali $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{(n-2)}, x_{(n-1)}, x_n$ col simbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ indicheremo la loro somma $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n)$. Quindi,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n$$

13.2. Esempio.

- $\sum_{i=1}^{n} \alpha y_i = \alpha y_1 + \alpha y_2 + \alpha y_3 + \alpha y_4 + \dots.. + \alpha y_{(n-2)} + \alpha y_{(n-1)} + \alpha y_n$
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \dots..+ (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n)$
- $\sum_{i=1}^{n} x_{ih} = x_{1h} + x_{2h} + x_{3h} + x_{4h} + \dots.. + x_{(n-1),h} + x_{(n-1),h} + x_{nh}$
- $\sum_{i=1}^{n} (\alpha y_i + z_{ih}) = (\alpha y_1 + z_{1h}) + (\alpha y_2 + z_{2h}) + (\alpha y_3 + z_{3h}) + \dots.. + (\alpha y_{(n-1)} + z_{(n-1),h}) + (\alpha y_n + z_{nh})$
- $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{h=1}^{m} x_{hi}) = (\sum_{h=1}^{m} x_{h1}) + (\sum_{h=1}^{m} x_{h2}) + (\sum_{h=1}^{m} x_{h3}) + \dots.. + (\sum_{h=1}^{m} x_{h,(n-1)}) + (\sum_{h=1}^{m} x_{hn})$

13.3. Lemma. Valgono le seguenti proprietà:

(0) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_{(n-2)} = x_{(n-1)} = x_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n\alpha$

(1) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (\sum_{i=1}^{n} x_i) + (\sum_{i=1}^{n} y_i)$

(2) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

(3) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i) + \beta(\sum_{i=1}^{n} y_i)$

(4) $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{h=1}^{m} x_{hi}) = \sum_{h=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} x_{hi})$

Dimostrazione.

(0) $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{(n-1)} + x_n = \alpha + \alpha + \alpha + \ldots.. + \alpha + \alpha = n\alpha$

(1) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \ldots..+ (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n) =$

[per le proprietà associativa e commutativa della somma]

$= (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots.. + x_{(n-1)} + x_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots.. + y_{(n-1)} + x_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i) + (\sum_{i=1}^{n} y_i)$

(2) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) = (\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) + \ldots.. + (\alpha x_{(n-1)}) + (\alpha x_n) =$

[per le proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma]

$= \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

(3) Sia X la matrice di tipo m×n avente come elementi proprio i numeri reali x_{hi} .

$$X = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdot\ \cdot & x_{1,(n-1)} & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdot\ \cdot & x_{2,(n-1)} & x_{2,n} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdot\ \cdot & x_{3,(n-1)} & x_{3,n} \\ . & . & . & .\ . & . & . \\ . & . & . & .\ . & . & . \\ x_{(m-1),1} & x_{(m-1),2} & x_{(m-1),3} & \cdot\ \cdot & x_{(m-1),(n-1)} & x_{(m-1),n} \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdot\ \cdot & x_{m,(n-1)} & x_{m,n} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to r_1 \\ \to r_2 \\ \to r_3 \\ . \\ . \\ \to r_{(m-1)} \\ \to r_m \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ s_1 & s_2 & s_3 & & s_{(n-1)} & s_n \end{array} & \begin{array}{l} \quad\downarrow \\ \to S \end{array} \end{array}$$

Per ogni indice di riga h∈{1, 2, 3, …, (m–1), m} indichiamo con r_h il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della h-esima riga. Quindi,

$$r_h = x_{h1} + x_{h2} + x_{h3} + x_{h4} + \ldots + x_{h,(n-2)} + x_{h,(n-1)} + x_{hn} = \sum_{i=1}^{n} x_{hi}$$

Per ogni indice di colonna i∈{1, 2, 3, …, (n–1), n} indichiamo con s_i il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della i-esima colonna. Quindi,

$$s_i = x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} + \ldots + x_{(m-2),i} + x_{(m-1),i} + x_{mi} = \sum_{h=1}^{m} x_{hi}$$

Se indichiamo con S la somma di tutti gli elementi della matrice X, è facile convincersi che

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = S = \sum_{h=1}^{m} r_h$$

Quindi, $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{h=1}^{m} x_{hi}) = \sum_{i=1}^{n} s_i = S = \sum_{h=1}^{m} r_h = \sum_{h=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} x_{hi})$. ■

13.4. Definizione. Sia A una matrice quadrata di tipo m×n ad elementi reali. Se h < m e k < n con il simbolo $A_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h\},\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}}$ indicheremo la matrice A’ di tipo (m–h)×(n–k) ottenuta “*cancellando*” da A le righe di indici $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h\}$, le colonne di indici $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}$ e “*eliminando gli spazi vuoti*”. Diremo anche che A’ è una sottomatrice di A.

Se h = k = 1 invece di $A_{\{\alpha\},\{\beta\}}$ scriveremo brevemente $A_{\alpha,\beta}$ e, talvolta, anche solamente $A_{\alpha\beta}$.

13.5. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×8 seguente:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 & 1 & -7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2^a \\ \\ \\ \leftarrow 5^a \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \\ 1^a & 2^a & & 4^a & & & 7^a & \end{array} \end{array}$$

Cancellando da A le righe di indici {2, 5} e le colonne di indici {1, 2, 4, 7} otteniamo

$$\begin{bmatrix} & & 4 & & 1 & -7 & & 0 \\ & & & & & & & \\ & & -1 & & 0 & 0 & & 2 \\ & & 5 & & 5 & -5 & & -5 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Eliminando gli spazi vuoti otteniamo la seguente matrice di tipo 3×4

$$A' = A_{\{2,5\},\{1,2,4,7\}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

13.6. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Si ha che $A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

$A_{21} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $A_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

$A_{31} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{32} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{33} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

13.7. Definizione. Sia A una matrice **quadrata** di ordine n ad elementi reali.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{(n-1),(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definiamo *determinante di A,* e lo indichiamo con detA, il **numero reale** seguente:

- se n = 1, cioe' $A = [a_{11}]$, allora $\det A := a_{11}$
- se $n \geq 2$ allora $\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$

13.8. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 2.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} =$$

$$= (-1)^2 a_{11} \det[a_{11}] + (-1)^3 a_{12} \det[a_{12}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

$$= \mathbf{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

13.9. Esempio. Utilizzando quanto visto nell'osservazione precedente abbiamo che:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 15 = -3 \qquad \det\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = (-7) - (-12) = 5 \qquad \det\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = 12 - (-12) = 0$$

13.10. Esempio. Considerando le sottomatrici di ordine 2 dell'esempio 13.6 si ha che:

$$\det A_{11} = \det\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27 \qquad \det A_{12} = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2 \qquad \det A_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5$$

$$\det A_{21} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12 \qquad \det A_{22} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21 \qquad \det A_{23} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38$$

$$\det A_{31} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8 \qquad \det A_{32} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14 \qquad \det A_{33} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35.$$

13.11. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 3.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} =$$

$$= (-1)^{2} a_{11} \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3} a_{12} \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{4} a_{13} \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} =$$

$$= \mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}}.$$

13.12. Osservazione. Lo sviluppo del determinante di ordine 3 si può ricordare utilizzando la "*regola di Sarrus*". Nella riga precedente si osserva che si hanno sei addendi ognuno prodotto di tre fattori. Costruiamo ora una matrice C aggiungendo alla matrice A le prime due colonne di A

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Si può notare che i primi tre addendi corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali discendenti verso destra mentre i secondi tre addendi (quelli preceduti dal segno negativo) corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali ascendenti verso destra.

13.13. Esempio. Si calcoli il determinante delle matrici A e B quadrate di ordine 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$\det A = (-48) + (-11) + (-105) - (220) - (14) - (-18) = -380$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det B = (-30) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -30$$

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

13.14. Lemma. Scambiando due righe il determinante cambia di segno.

13.15. Teorema (O.E.1). Effettuando s scambi di righe il determinante viene moltiplicato per $(-1)^s$.

13.16. Corollario. Se una matrice quadrata ha due righe uguali, allora il suo determinante vale zero.
Dimostrazione. Sia A una matrice avente avente la i-esima riga uguale alla h-esima riga con $i \neq h$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando la i-esima riga con la h-esima riga. Per il Lemma 13.14 è $\det B = -\det A$. D'altronde, è $B = A$ per cui $\det B = \det A$. Quindi, si ha che $\det A = 0$. ■

13.17. Teorema (1° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni indice di riga $h = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ si ha che $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}$

Dimostrazione. Per $h = 1$ la tesi e' vera per definizione. Sia ora $2 \leq h \leq n$.

Siano $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} A_h \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$. Si osservi che:

- B si ottiene da A mediante $(h-1)$ scambi di righe, quindi, $\det A = (-1)^{h-1} \det B$;
- per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ è $b_{1j} = a_{hj}$
- per ogni $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ è $B_{1j} = A_{hj}$

Tenendo conto di tali osservazioni si ha:

$$\det A = (-1)^{h-1} \det B = (-1)^{h-1}\left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j}\right] = (-1)^{h-1}\left[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj}\right] =$$

$(-1)^{h-1}$ non dipende dall'indice di sommatoria, quindi per la proprietà (2) del Lemma 13.3 ↑

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h-1}(-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj} \quad ■$$

13.18. Teorema (O.E.2). Se si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per uno scalare allora il determinante risulta anch'esso moltiplicato per quello scalare.

Dimostrazione. Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando per α la sua h-esima riga, cioè

(♣) per ogni $i \neq h$ è $B_i = A_i$.

(♥) $B_h = \alpha A_h$

allora $\det B = \alpha \det A$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ (\alpha A_h) \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$ si ha che

(♣) $\Rightarrow$ $B_{hj} = A_{hj}$

(♥) $\Rightarrow$ $b_{hj} = \alpha a_{hj}$

Per il 1° teorema di Laplace si ha:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} (\alpha a_{hj}) \det A_{hj} = \alpha [\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}] = \alpha (\det A). \quad \blacksquare$$

↰ per la proprietà (2) del Lemma 13.3

13.19. Corollario. Se una matrice ha una riga nulla, allora il suo determinante vale zero.

Dimostrazione. Avere una riga nulla è come avere tutti gli elementi di quella riga moltiplicati per zero. ■

13.20. Lemma. Se A, B e C sono tre matrici quadrate di ordine n tali che:

(♣) per ogni $i \neq h$ è $A_i = B_i = C_i$ (A, B e C hanno tutte le righe, esclusa la h-esima, uguali)

(♥) $C_h = A_h + B_h$ (la h-esima riga di C è la somma delle h-esime righe di A e di B)

allora $\det C = \det A + \det B$.

Si osservi che, in generale, è la matrice C **NON** è la somma delle matrici A e B, cioè $C \neq A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ B_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ . \\ A_{h-1} \\ A_h + B_h \\ A_{h+1} \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ si ha che

(♣) $\Rightarrow$ $C_{hj} = B_{hj} = A_{hj}$

(♥) $\Rightarrow$ $c_{hj} = a_{hj} + b_{hj}$

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} c_{hj} \det C_{hj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} (a_{hj} + b_{hj}) \det C_{hj} = \sum_{j=1}^{n} [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj} + (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj}] =$$

per la proprietà (1) del Lemma 13.3 ↥

$$= [\sum_{j=1}^{n} [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj}] + [\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj}] =$$

$$= [\sum_{j=1}^{n} [(-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}] + [\sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj}] = \det B + \det C \quad \blacksquare$$

13.21. Osservazione. Precisiamo ancora una volta che il Lemma precedente **NON** afferma che il determinante di una somma di due matrici è uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

13.22. Esempio. Per le seguenti matrici A e B si ha che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Se $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, allora $(A + B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$.

Si ha che $\det(A + B) = -2 \neq -13 = -27 + 14 = \det A + \det B$.

Dal Lemma 13.20 e dal Corollario 13.16 segue subito il seguente:

13.23. Teorema (O.E.3). Se ad una riga si aggiunge un'**altra** (diversa) riga moltiplicata per uno scalare qualsiasi allora il determinante **non** cambia.

Dimostrazione. Sia B la matrice ottenuta dalla matrice A aggiungendo alla sua k-esima riga la sua h-esima riga moltiplicata per α. Cioè,

(♣) per ogni $i \neq k$ è $B_i = A_i$.

(♥) $B_k = A_k + \alpha A_h$

$$\det B = \det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_k + \alpha A_h \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_k \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ \alpha A_h \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha\det\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_h \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha 0 = \det A \quad \blacksquare$$

Dal teorema 13.23 e dal corollario 13.16 seguono subito i seguenti corollari.

13.24. Corollario. Se ad una riga aggiungiamo una combinazione lineare di altre (diverse) righe, allora il determinante non cambia.

13.25. Corollario. Se una riga è combinazione lineare di altre righe, allora il determinante è nullo.

Tenendo conto dei Teoremi 13.15, 13.18 e 13.23 si prova subito il seguente:

13.26. TEOREMA. Sia A una matrice quadrata e sia B la matrice quadrata ottenuta da A tramite un numero finito di operazioni elementari sulle righe di A. Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari **non nulli** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora

$$\det B = (-1)^s(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{(t-1)}\alpha_t)\det A$$

Si osservi che $\det B \neq 0 \iff \det A \neq 0$

13.27. Teorema. Il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.

Dimostrazione. (*per induzione*). Si verifica subito per matrici di ordine 1 e di ordine 2. Proviamo, ora, che se l'enunciato è vero per matrici di ordine (n–1), allora è vero anche per matrici di ordine n. Sia A una matrice quadrata di ordine n triangolare superiore. Per il 1° teorema di Laplace applicato alla sua (ultima) n-esima riga si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

Poiché A è triangolare superiore si ha che per ogni $j \leq (n-1)$ è $a_{nj} = 0$. Quindi,

$$\det A = (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn} = (-1)^{2n} a_{nn} \det A_{nn} = a_{nn} \det A_{nn}$$

Poiché A_{nn} è una matrice di ordine (n-1) triangolare superiore, per l'ipotesi induttiva, si ha che il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale

$$\det A_{nn} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\ldots.a_{(n-2),(n-2)}a_{(n-1),(n-1)}$$

Quindi, $\det A = a_{nn} \det A_{nn} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\ldots.a_{(n-2),(n-2)}a_{(n-1),(n-1)}a_{nn}$ ■

13.28. Osservazione. I Teoremi 13.26 e 13.27 ci forniscono un modo comodo per calcolare il determinante di una matrice di ordine "grande". Infatti, se dobbiamo calcolare il determinante di una matrice A possiamo procedere nel modo seguente:

(1) troviamo (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B a scalino; ovviamente, la matrice B è anche triangolare superiore;

(2) calcoliamo il determinante di B che è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale;

(3) Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari **non nulli** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora

$$\det A = (-1)^s(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{(t-1)}\alpha_t)^{-1}\det B$$

13.29. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 38 & -21 \end{bmatrix} \to$

$\to D = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 190 & -105 \end{bmatrix} \to E = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -181 \end{bmatrix}$

$905 = \det E = \det D = 5\det C = 5\det B = 5(-\det A) \Rightarrow \det A = -905/5 = -181.$

Dal Teorema 13.27 e dal Corollario 12.17 si ha subito il seguente:

13.30. Lemma. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

13.31. Teorema. Una matrice quadrata A ha rango massimo se e solo se $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Sia A una matrice quadrata. Per il Teorema 11.25 è possibile trovare (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B che abbia lo stesso rango di A. Quindi, il rango di A è massimo se e solo se il rango di B è massimo, ovvero (per il Lemma 13.30) se e solo se il determinante di B è diverso da zero e, quindi, (per il Teorema 13.26) se e solo se il determinante di A è diverso da zero. ■

13.32. Corollario. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione n.
Sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ una base di V_R.
Sia $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ una n-upla ordinata di vettori di V_R.
Per ogni $s \in \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ sia $\mathbf{a}_s$ la n-upla di coordinate del vettore $\mathbf{v}_s$ rispetto alla base B.
Sia A la matrice avente come righe (o come colonne) le n-uple $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n$.
L'insieme D è una base di V_R se e solo se il determinante della matrice A è diverso da zero.

13.33. Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ una sua base.
Se consideriamo i seguenti vettori $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$ allora si ha che $\mathbf{a}_0 = (5, 0, 16)$, $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, 1)$ e $\mathbf{a}_3 = (1, -4, -7)$.
Stabilire se le seguenti terne $C = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono basi di V_R.Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori di C e sia N la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori di D.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det M = 0$ la matrice M <u>non</u> ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_M = \dim\mathcal{R}_M = \mathrm{rg}M \leq 2$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente dipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti. Così la terna $C = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ **NON** è una base di V_R.

Poiché $\det N = -23 \neq 0$ la matrice N ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_N = \dim\mathcal{R}_N = \mathrm{rg}N = 3$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Così la terna $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è un'<u>altra base</u> di V_R.

13.34 Teorema (2° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni coppia di indici di riga $h,k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ con $h \neq k$ si ha che

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0.$$

Dimostrazione. Siano A e B due matrici tali che sia $B_k = A_h$ e per ogni $i \neq k$ sia $B_i = A_i$. Cioè,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ A_k \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_h = A_h \\ \cdot \\ B_k = A_h \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ si ha che:

- $b_{kj} = a_{hj}$
- $B_{kj} = A_{kj}$

Per il 1° teorema di Laplace applicato alla k-esima riga di B si ha:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj}$$

D'altronde, si ha anche che $\det B = 0$ poiché B ha due righe uguali (la h-esima e la k-esima).

Quindi, $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0$. ■

13.35. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Per ogni $i,j = 1,2,\ldots,n$ il numero reale $\mathcal{a}_{ij} := (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ si dice *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij}.

13.36. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo *matrice cofattore* della matrice A, e la indichiamo col simbolo cofA, la matrice quadrata di ordine n ad elementi reali formata dai complementi algebrici $\mathcal{a}_{ij}$ degli elementi a_{ij} di A.

13.37. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo *matrice aggiunta* di A, e la indichiamo col simbolo aggA, la trasposta della matrice cofattore di A.

13.38. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 dell'esempio 13.6:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Dall'Esempio 13.10 si ha che

$\det A_{11} = \det\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27$ $\qquad$ $\det A_{12} = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2$ $\qquad$ $\det A_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5$

$\det A_{21} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12$ $\qquad$ $\det A_{22} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21$ $\qquad$ $\det A_{23} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38$

$\det A_{31} = \det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8$ $\qquad$ $\det A_{32} = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14$ $\qquad$ $\det A_{33} = \det\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35.$

Quindi,

$\mathcal{a}_{11} = (-1)^{1+1}(-27) = -27$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$

$\mathcal{a}_{21} = (-1)^{2+1}(12) = -12$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{22} = (-1)^{2+2}(-21) = -21$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{23} = (-1)^{2+3}(38) = -38$

$\mathcal{a}_{31} = (-1)^{3+1}(-8) = -8$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{33} = (-1)^{3+3}(35) = 35$

Per cui $\text{cof}A = \begin{bmatrix} -27 & -2 & 5 \\ -12 & -21 & -38 \\ -8 & -14 & 35 \end{bmatrix}$ e $\text{agg}A = (\text{cof}A)^T = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$

13.39. Osservazione. Tenendo conto della Definizione 13.35 i due teoremi di Laplace si possono brevemente sintetizzare nel modo seguente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj}\boldsymbol{a}_{kj} = (\det A)\delta_{hk}$$

dove δ_{hk} è la *delta di Kronecker* ($\delta_{hk} = 0$ se $h \neq k$, $\delta_{hk} = 1$ se $h = k$).

13.40. Definizione. Chiameremo *matrice unità di ordine n*, e la indicheremo con il simbolo I_n, la matrice quadrata diagonale di ordine n avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1. Quindi, l'elemento che si trova sulla h-esima riga e sulla k-esima colonna di I_n è δ_{hk}.

13.41. Teorema. Per ogni matrice A quadrata di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\text{agg}A) = (\text{agg}A)A = (\det A)I_n$$

dove $(\det A)I_n$ è la matrice diagonale avente come elementi $\delta_{hk}\det A$, cioè avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a detA.

Dimostrazione. Sia $B := A(\text{agg}A)$. Proviamo che $B = I_n$.
Il generico elemento b_{hk} di B è uguale al prodotto riga per colonna della h-esima riga di A

$$(a_{h1} \quad a_{h2} \quad a_{h3} \quad a_{h4} \quad \ldots.. \quad a_{h,(n-1)} \quad a_{hn})$$

per la k-esima colonna di aggA, che è proprio la k-esima riga di cofA

$$(\boldsymbol{a}_{k1} \quad \boldsymbol{a}_{k2} \quad \boldsymbol{a}_{k3} \quad \boldsymbol{a}_{k4} \quad \ldots.. \quad \boldsymbol{a}_{k,(n-1)} \quad \boldsymbol{a}_{kn})$$

Quindi, $b_{hk} = \sum_{j=1}^{n} a_{hj}\boldsymbol{a}_{kj} = (\det A)\delta_{hk}$. Per cui $B = I_n$. Analogamente si ha che $(\text{agg}A)A = (\det A)I_n$. ■

Ricordiamo che il determinante di una somma di due matrici quadrate dello stesso ordine **NON** è, in generale, uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

Invece, vale (ne omettiamo la dimostrazione) il seguente:

13.42. Teorema (Binet). Il determinante del prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici.

14. Matrici invertibili.

14.1. Definizione. Diremo che una *matrice* A **quadrata** di ordine n ad elementi reali è *invertibile* se esiste una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Ovviamente, anche la matrice B è invertibile.

14.2. Osservazione. Se A è una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali invertibile allora esiste ed è unica una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Dimostrazione. Poiché A è per ipotesi invertibile, dobbiamo provare solamente che B è unica. Se esistesse un'altra matrice C quadrata di ordine n ad elementi reali tale che $AC = I_n = CA$, si avrebbe:

$AB = I_n \quad \Rightarrow \quad C(AB) = CI_n \quad \Rightarrow \quad (CA)B = C \quad \Rightarrow \quad I_nB = C \quad \Rightarrow \quad B = C.$ ■

Tenendo conto dell'Osservazione 14.2 è ben posta la seguente:

14.3. Definizione. Se A è una matrice invertibile, allora diremo *matrice inversa* della matrice A, e la indicheremo con il simbolo A^{-1}, l'unica matrice B tale che $AB = I_n = BA$. Quindi,

$$A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

14.4. Osservazione. Ovviamente, se A è invertibile, allora anche A^{-1} è invertibile. Inoltre, l'inversa di A^{-1} è A stessa, cioè $(A^{-1})^{-1} = A$.

14.5. Teorema. Se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche la matrice AB è invertibile ed è $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. Quindi, l'inversa di un prodotto di due matrici invertibili è uguale al prodotto delle inverse delle due matrici prese in ordine "inverso".

Dimostrazione. Poiché A e B sono invertibili esiste la matrice $C := B^{-1}A^{-1}$. Si ha che:

$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

Quindi, per la Definizione 14.1 AB è invertibile e la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ è, per l'Osservazione 14.2, la sua unica inversa. Per cui $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. ■

14.6. Definizione. Diremo che una *matrice quadrata* è *singolare* se il suo determinante è nullo.

Per il Teorema 13.41, per **ogni** matrice quadrata A di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\mathrm{agg}A) = (\mathrm{agg}A)A = (\det A)I_n$$

Come immediata conseguenza del Teorema 13.41 si ha il seguente:

14.7. Lemma. Per ogni matrice A quadrata di ordine n **non** singolare (cioè $\det A \neq 0$) si ha che

$$A[(\det A)^{-1}(\mathrm{agg}A)] = [(\det A)^{-1}(\mathrm{agg}A)]A = I_n$$

Tenendo conto della Definizione 14.1 e dell'Osservazione 14.2 si ha il seguente:

14.8 Teorema. Se A è una matrice quadrata **non** singolare, allora A è invertibile e la sua (unica) inversa è data dal prodotto dell'inverso del determinante di A per la matrice aggiunta di A, cioè

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(\mathrm{agg}A)$$

14.9 Esempio. Se esiste, trovare l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Nell'Esempio 13.29 abbiamo visto che $\det A = -181 \neq 0$. Quindi, la matrice A è non singolare e, per il Teorema 14.8, è invertibile. Inoltre, $A^{-1} = (\det A)^{-1}(\mathrm{agg}A)$.

Nell'Esempio 13.38 abbiamo visto che

$\mathrm{agg}A = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$. Per cui si ha che $A^{-1} = (-1/181)\begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$.

14.10 Esempio. Troviamo l'inversa di una generica matrice non singolare di ordine 2.

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ con $\det A = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$.

$\mathcal{a}_{11} = (-1)^{1+1}\det A_{11} = (-1)^2\det[a_{22}] = a_{22}$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{12} = (-1)^{1+2}\det A_{12} = (-1)^3\det[a_{21}] = -a_{21}$

$\mathcal{a}_{21} = (-1)^{2+1}\det A_{21} = (-1)^3\det[a_{12}] = -a_{12}$ $\qquad$ $\mathcal{a}_{22} = (-1)^{2+2}\det A_{22} = (-1)^4\det[a_{11}] = a_{11}$

Per cui $\operatorname{cof}A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ e $\operatorname{agg}A = (\operatorname{cof}A)^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Infine, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & -\dfrac{a_{12}}{\det A} \\ -\dfrac{a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}$.

Dal Teorema (di Binet) 13.42 abbiamo subito il seguente:

14.11 Corollario. Se A è una matrice invertibile, allora si ha che $\det A \neq 0$, cioè A è **non** singolare. Inoltre, è $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dimostrazione. Sia A una matrice invertibile e A^{-1} la sua inversa. Allora si ha

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$$

Per cui $\det A \neq 0$. Si osservi, inoltre, che è $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. ■

Conseguenza immediata del Teorema 14.8 e del Corollario 14.11 è il seguente:

14.12 Teorema. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se è non singolare.

14.13 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Ovviamente, si ha che

$$B = C \;\Rightarrow\; AB = AC$$

In generale, non vale il viceversa come possiamo vedere nel seguente

14.14 Esempio. Si considerino le seguenti tre matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \;\text{e}\; C = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con semplici calcoli si vede che $AB = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ et $AC = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Quindi, si ha che $AB = AC$ et $B \neq C$

14.15 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Si ha che

$$AB = AC \text{ et } A \text{ è invertibile} \;\Rightarrow\; B = C$$

Dimostrazione.

$AB = AC \;\Rightarrow\; A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \;\Rightarrow\; (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \;\Rightarrow\; I_nB = I_nC \;\Rightarrow\; B = C$ ■

14.16 Esercizi. Se esistono, calcolare le matrici inverse delle seguenti matrici.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -21 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Cambiamenti di base in uno spazio vettoriale.

15.1 Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$) una sua base.

Siano $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$

Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ rispetto alla base B e sia N la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ rispetto alla base B.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Poiché detM = 0 la matrice M non ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_M = \dim\mathcal{R}_M = \text{rg}M \leq 2$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente dipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti. Così l'insieme ($\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) **NON** è una base di V_R.

Poiché detN = –23 ≠ 0 la matrice N ha rango massimo. Quindi, $\dim\mathcal{C}_N = \dim\mathcal{R}_N = \text{rg}N = 3$. Per cui le sue tre colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, anche i tre vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Così l'insieme B = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$) è un'altra base di V_R.

Sia $\mathbf{w}$ il vettore di V_R avente coordinate (4, 1, –6) rispetto alla base B, cioè $\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$.

E' molto facile trovare le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B, infatti si ha che

$$\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3 = 4(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + (-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) - 6(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 + 23\mathbf{u}_2 + 63\mathbf{u}_3$$

Quindi, le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B sono (1, 23, 63).

Sia, ora, $\mathbf{t}$ il vettore di V_R avente coordinate (4, –8, –3) rispetto a B, cioè $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$.

Troviamo le coordinate (x, y, z) di $\mathbf{t}$ rispetto a B, cioè tali che $\mathbf{t} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Si ha che

$$\mathbf{t} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = x(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + y(-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + z(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3)$$

$$\mathbf{t} = (2x - y + z)\mathbf{u}_1 + (-x + 3y - 4z)\mathbf{u}_2 + (5x + y - 7z)\mathbf{u}_3$$

Poichè la scrittura di $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ rispetto alla base B è unica deve essere

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 4z = -8 \\ 5x + y - 7z = -3 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è la terna ordinata (x, y, z) = (1, –1, 1), cioè $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

15.2 Esempio. Siano V_R , $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ come nell'Esempio 15.1. Quindi,

$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$

Sia $\mathbf{w}$ un generico vettore di V_R . Siccome B e $\underline{B}$ sono due basi, si ha che esistono, e sono <u>uniche</u>, due terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tali che

(I) $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3$

(II) $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3$

Ora, vedremo di trovare il "legame" che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\underline{B}$ e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B.

Si ha che $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 = \beta_1(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3) + \beta_2(-\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + \beta_3(\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3)$

da cui (III) $\mathbf{w} = = (2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)\mathbf{u}_1 + (-\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3)\mathbf{u}_2 + (5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3)\mathbf{u}_3$

Si osservi che la (III) è una scrittura di $\mathbf{w}$ come combinazione lineare dei vettori della base B.
Per l'unicità della scrittura di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B, da (I) e (III) si ha che deve essere:

$$(\#)\ \begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1 \\ -\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 = \alpha_2 \\ 5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Queste equazioni sono il "legame" che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\underline{B}$ e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B.

- Note le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di un vettore $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\underline{B}$, con semplici calcoli si trovano le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B.

Se (come nell'Esempio 15.1) $\mathbf{w} = 4\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$ cioè $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (4, 1, -6)$, allora dal sistema (#) si ha <u>**subito**</u> che $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 23, 63)$ e, quindi, $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + 23\mathbf{u}_2 + 63\mathbf{u}_3$.

- Note le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di un vettore $\mathbf{w}$ rispetto alla base B, <u>**risolvendo**</u> un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, si trovano le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\underline{B}$.

Se (come nell'Esempio 15.1) $\mathbf{t} = 4\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ cioè $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (4, -8, -3)$, allora (#) diventa

$$\begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 4 \\ -\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 = -8 \\ 5\beta_1 + \beta_2 - 7\beta_3 = -3 \end{cases}$$

L'unica soluzione di tale sistema è la terna ordinata $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, -1, 1)$, cioè $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Nel seguito ci occuperemo di generalizzare quanto appena visto nell'Esempio 15.2.

Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, ….., $\mathbf{u}_n$) una sua base.
Se **w** è un vettore di V_R e (α_1, α_2, α_3, α_4, ….., α_n) è l'unica n-upla ordinata di numeri reali tale che

(♥) $$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \ldots.. + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

allora la matrice matrice di tipo n×1 (matrice colonna) così definita:

$$\mathbf{w}_B := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

si dice (matrice) *colonna delle coordinate di **w** rispetto alla base B*.

Sia, ora, $\underline{B}$ = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, ….., $\mathbf{v}_n$) un'altra base di V_R. Poiché $\underline{B}$ è una base di V_R esiste un'unica n-upla ordinata di numeri reali (β_1, β_2, β_3, β_4, ….., β_n) tale che:

(♣) $$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 + \beta_4\mathbf{v}_4 + \ldots.. + \beta_n\mathbf{v}_n$$

Quindi, la colonna delle coordinate di **w** rispetto alla base $\underline{B}$ è

$$\mathbf{w}_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ . \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Poiché B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, ….., $\mathbf{u}_n$) è una base di V_R e $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, ….., $\mathbf{v}_n$ sono vettori di V_R allora ognuno di essi si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B.
Poiché i coefficienti di tali combinazioni lineari dipendono sia dal vettore $\mathbf{u}_i$ della base B che dal vettore $\mathbf{v}_j$ della base $\underline{B}$, useremo un doppio indice con la convenzione che il primo sia l'indice i del vettore $\mathbf{u}_i$ di B mentre il secondo sia l'indice j del vettore $\mathbf{v}_j$ di $\underline{B}$. Quindi, scriveremo

(1) $\mathbf{v}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 + a_{41}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n1}\mathbf{u}_n$

(2) $\mathbf{v}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 + a_{42}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n2}\mathbf{u}_n$

(3) $\mathbf{v}_3 = a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3 + a_{43}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n3}\mathbf{u}_n$

(4) $\mathbf{v}_4 = a_{14}\mathbf{u}_1 + a_{24}\mathbf{u}_2 + a_{34}\mathbf{u}_3 + a_{44}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n4}\mathbf{u}_n$

……………………………………………………

(n) $\mathbf{v}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + a_{3n}\mathbf{u}_3 + a_{4n}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{nn}\mathbf{u}_n$

Da (♣), (1), (2), (3), (4), ..., (n) si ha

$\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 + \beta_4\mathbf{v}_4 + \ldots.. + \beta_n\mathbf{v}_n =$

$= \beta_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 + a_{41}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n1}\mathbf{u}_n) +$

$+ \beta_2(a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 + a_{42}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n2}\mathbf{u}_n) +$

$+ \beta_3(a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3 + a_{43}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n3}\mathbf{u}_n) +$

$+ \beta_4(a_{14}\mathbf{u}_1 + a_{24}\mathbf{u}_2 + a_{34}\mathbf{u}_3 + a_{44}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{n4}\mathbf{u}_n) +$

………………………………………………

$+ \beta_n(a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + a_{3n}\mathbf{u}_3 + a_{4n}\mathbf{u}_4 + \ldots.. + a_{nn}\mathbf{u}_n)$

Utilizzando le proprietà PS1, PS2 e PS3 si ottiene

(♦) $\mathbf{w} = (\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \beta_3 a_{13} + \beta_4 a_{14} + \ldots.. + \beta_n a_{1n})\mathbf{u}_1 +$

$+ (\beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{23} + \beta_4 a_{24} + \ldots.. + \beta_n a_{2n})\mathbf{u}_2 +$

$+ (\beta_1 a_{31} + \beta_2 a_{32} + \beta_3 a_{33} + \beta_4 a_{34} + \ldots.. + \beta_n a_{3n})\mathbf{u}_3 +$

$+ (\beta_1 a_{41} + \beta_2 a_{42} + \beta_3 a_{43} + \beta_4 a_{44} + \ldots.. + \beta_n a_{4n})\mathbf{u}_4 +$

………………………………………………

$+ (\beta_1 a_{n1} + \beta_2 a_{n2} + \beta_3 a_{n3} + \beta_4 a_{n4} + \ldots.. + \beta_n a_{nn})\mathbf{u}_n$

Si osservi che la (♦) è una scrittura di **w** come combinazione lineare dei vettori della base B.

Ricordiamo che

(♥) $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \ldots.. + \alpha_n\mathbf{u}_n$

Per l'unicità della scrittura di **w** rispetto alla base B, dalle (♥) e (♦) si ha che deve essere:

(E_1) $\alpha_1 = \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{12} + \beta_3 a_{13} + \beta_4 a_{14} + \ldots.. + \beta_n a_{1n}$

(E_2) $\alpha_2 = \beta_1 a_{21} + \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{23} + \beta_4 a_{24} + \ldots.. + \beta_n a_{2n}$

(E_3) $\alpha_3 = \beta_1 a_{31} + \beta_2 a_{32} + \beta_3 a_{33} + \beta_4 a_{34} + \ldots.. + \beta_n a_{3n}$

(E_4) $\alpha_4 = \beta_1 a_{41} + \beta_2 a_{42} + \beta_3 a_{43} + \beta_4 a_{44} + \ldots.. + \beta_n a_{4n}$

……………………………………………

(E_n) $\alpha_n = \beta_1 a_{n1} + \beta_2 a_{n2} + \beta_3 a_{n3} + \beta_4 a_{n4} + \ldots.. + \beta_n a_{nn}$

Il sistema di equazioni (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), …., (E_n) è il "legame" che c'è tra le coordinate $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots.., \beta_n)$ di **w** rispetto a $\underline{B}$ e le coordinate $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ di **w** rispetto a B.

<u>Ora troviamo un modo comodo di rappresentare questo sistema</u>.

Da (1), (2), (3), (4), ..., (n) si che le colonne delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots.., \mathbf{v}_n$ rispetto alla base B = $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots.., \mathbf{u}_n)$ sono

$$(\mathbf{v}_1)_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ (\mathbf{v}_2)_B = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ (\mathbf{v}_3)_B = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ . \\ . \\ a_{n3} \end{bmatrix}, \ (\mathbf{v}_4)_B = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ . \\ . \\ a_{n4} \end{bmatrix}, \ldots.., \ (\mathbf{v}_n)_B = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>**Stabiliamo**</u> che $A_{(\underline{B}\to B)}$ sia la matrice quadrata di ordine n avente come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate (rispetto alla base B) dei vettori della base $\underline{B}$, cioè:

$$A_{(\underline{B}\to B)} = [\ (\mathbf{v}_1)_B \ | \ (\mathbf{v}_2)_B \ | \ (\mathbf{v}_3)_B \ | \ (\mathbf{v}_4)_B \ | \ldots... | \ (\mathbf{v}_n)_B \ ]$$

$$A_{(\underline{B}\to B)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & a_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & . & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Osservando (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), ….., (E_n) e tenendo conto di come è definito il prodotto riga per colonna tra due matrici moltiplicabili e si ha che:

• l'elemento α_1 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della prima riga di $A_{(\underline{B}\to B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

• l'elemento α_2 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della seconda riga di $A_{(\underline{B}\to B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

• l'elemento α_3 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della terza riga di $A_{(\underline{B}\to B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

• l'elemento α_4 di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della quarta riga di $A_{(\underline{B}\to B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

………………………………………

• l'elemento α_n di $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della n-esima riga di $A_{(\underline{B}\to B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$;

Quindi, la colonna $\mathbf{w}_B$ è uguale al prodotto della matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ per la colonna $\mathbf{w}_{\underline{B}}$ ovvero

$$\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B}\to B)}\mathbf{w}_{\underline{B}}$$

Per cui, il sistema di equazioni (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), …., (E_n) si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ .\\ .\\ \alpha_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & a_{3n}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & a_{4n}\\ . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & . & . & . & . & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\\ .\\ .\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

Tenendo conto che ognuna delle n colonne delle coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B è univocamente determinata, si ha subito la seguente:

15.3 Osservazione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Ogni volta che si **<u>fissano</u>** due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, ….., \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, ….., \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ quadrata di ordine n avente come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B è univocamente determinata.

15.4 Lemma. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n.

Siano B = $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots.., \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots.., \mathbf{v}_n)$ due sue basi.

Sia **w** un generico vettore di V_R. Se H è una matrice tale che $\mathbf{w}_B = H\mathbf{w}_{\underline{B}}$ allora $H = A_{(\underline{B}\to B)}$.

Dimostrazione. Per i vettori della base $\underline{B}$ si ha che

$\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots.. + 0\mathbf{v}_n$
$\mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots.. + 0\mathbf{v}_n$
$\mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots.. + 0\mathbf{v}_n$
$\mathbf{v}_4 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 1\mathbf{v}_4 + \ldots.. + 0\mathbf{v}_n$
…………………………………………………
$\mathbf{v}_n = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \ldots.. + 1\mathbf{v}_n$

Quindi, le colonne delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots.., \mathbf{v}_n$ rispetto alla base $\underline{B}$ sono:

$$(\mathbf{v}_1)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_2)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_3)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ (\mathbf{v}_1)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\.\\.\\0\end{bmatrix},\ \ldots\ldots,\ (\mathbf{v}_1)_{\underline{B}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\.\\.\\1\end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che per ogni vettore $\mathbf{v}_i$ è $H(\mathbf{v}_i)_{\underline{B}}$ = i-esima colonna di H. Quindi, si ha che

- prima colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_1)_B = H(\mathbf{v}_1)_{\underline{B}}$ = prima colonna di H;
- seconda colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_2)_B = H(\mathbf{v}_2)_{\underline{B}}$ = seconda colonna di H;
- terza colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_3)_B = H(\mathbf{v}_3)_{\underline{B}}$ = terza colonna di H;
- quarta colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_4)_B = H(\mathbf{v}_4)_{\underline{B}}$ = quarta colonna di H;

………………………………………………..

- n-esima colonna di $A_{(\underline{B}\to B)} = (\mathbf{v}_n)_B = H(\mathbf{v}_n)_{\underline{B}}$ = n-esima colonna di H.

Essendo le colonne di H ordinatamente uguali alle colonne di $A_{(\underline{B}\to B)}$ si ha che $H = A_{(\underline{B}\to B)}$. ■

Tenendo conto del Lemma 15.4 è ben posta la seguente:

15.5 DEFINIZIONE. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n.

Siano B = $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots.., \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots.., \mathbf{v}_n)$ due sue basi.

La matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ che ha come colonne ordinatamente le colonne delle coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B viene detta *matrice del cambiamento di base da* $\underline{B}$ *a B.*

Le n equazioni rappresentate con l'equazione matriciale $\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B}\to B)}\mathbf{w}_{\underline{B}}$ si dicono *equazioni del cambiamento di base.*

Tenendo conto che, per costruzione, le colonne di $A_{(\underline{B}\to B)}$ sono le n-uple delle coordinate di n vettori linearmente indipendenti (gli elementi della base $\underline{B}$) si ha che tali colonne sono linearmente indipendenti e, quindi, la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ ha rango massimo. Per il Teorema 13.31 il determinante della matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è diverso da zero, cioè la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è non singolare. Tenendo conto del Teorema 14.12 abbiamo subito la seguente:

15.6 Osservazione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Fissate due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è invertibile.

15.7 TEOREMA. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Fissate due sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ si ha che la matrice del cambiamento di base da da B a $\underline{B}$ è uguale all'inversa della matrice del cambiamento di base da $\underline{B}$ a B. Cioè

$$A_{(B\to\underline{B})} = [A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{w}$ è un generico vettore di V_R si ha che $\mathbf{w}_B = A_{(\underline{B}\to B)}\mathbf{w}_{\underline{B}}$. Tenendo conto che per l'Osservazione 15.6 la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ è invertibile, si ha che $[A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1}\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_{\underline{B}}$.

Per il Lemma 15.4 è $[A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1} = A_{(B\to\underline{B})}$. ■

15.8 TEOREMA. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Fissate tre sue basi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $C = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \ldots, \mathbf{e}_n)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \ldots, \mathbf{v}_n)$ si ha che:

$$A_{(\underline{B}\to B)} = A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{w}$ è un generico vettore di V_R si ha che

$$[A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}]\mathbf{w}_{\underline{B}} = A_{(C\to B)}[A_{(\underline{B}\to C)}\mathbf{w}_{\underline{B}}] = A_{(C\to B)}\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_B$$

Per cui, la matrice $A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}$ esprime il cambiamento di coordinate dalla base $\underline{B}$ alla base B. Quindi, per il Lemma 15.4 si ha che $A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)} = A_{(\underline{B}\to B)}$. ■

15.9 Osservazione. Il Teorema 15.7 ci permette di trovare la matrice del cambiamento di base dalla base $\underline{B}$ alla base B "*transitando*" per la base C. Inoltre, **si noti** l'ordine delle matrici nel prodotto

$$A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)}$$

La matrice che fa passare da $\underline{B}$ a C è il fattore a destra mentre la matrice che poi fa passare da C a B è il fattore a sinistra. Questo è dovuto (come si vede nella dimostrazione del Teorema 15.7) al fatto che prima la matrice $A_{(\underline{B}\to C)}$ "*agisce*" su $\mathbf{w}_{\underline{B}}$ e, poi, la matrice $A_{(C\to B)}$ "*agisce*" su $\mathbf{w}_C$.

15.10 Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 2 e sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$) una sua base. Consideriamo i seguenti vettori $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$ di V_R.

Sia M = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ la matrice avente come colonne ordinatamente $(\mathbf{v}_1)_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $(\mathbf{v}_2)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det M = -1 \neq 0$ le due colonne di M sono linearmente indipendenti. Quindi, anche i due vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Così l'insieme $\underline{B}$ = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) è un'<u>altra base</u> di V_R.

Inoltre, M è proprio la matrice $A_{(\underline{B}\to B)}$ del cambiamento di base da $\underline{B}$ a B, cioè

$$A_{(\underline{B}\to B)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Per il Teorema 15.7 la matrice $A_{(B\to\underline{B})}$ del cambiamento di base da B a $\underline{B}$ è $[A_{(\underline{B}\to B)}]^{-1}$. Quindi,

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Poiché $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = (1/-1)(\mathrm{agg}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}) = -\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ si ha che

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Sia $\mathbf{w}$ un generico vettore dello spazio V_R. Se indichiamo con:

- (β_1, β_2) le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\underline{B}$
- (α_1, α_2) le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base B

allora le equazioni del cambiamento di base da $\underline{B}$ a B sono $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

mentre le equazioni del cambiamento di base da B a $\underline{B}$ sono $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$

Con tali equazioni è molto veloce trovare come cambiano le coordinate di un vettore.

Se $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ cioè $(\beta_1, \beta_2) = (1, 2)$ si ha **<u>subito</u>** che $(\alpha_1, \alpha_2) = (4, -11)$ cioè $\mathbf{w} = 4\mathbf{u}_1 - 11\mathbf{u}_2$.

Se $\mathbf{t} = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$ cioè $(\alpha_1, \alpha_2) = (3, -2)$ si ha **<u>subito</u>** che $(\beta_1, \beta_2) = (7, -11)$, cioè $\mathbf{t} = 7\mathbf{v}_1 - 11\mathbf{v}_2$.

15.11 Esempio. Sia $V_R = R^3$ lo spazio vettoriale reale delle terne ordinate di numeri reali.
Siano $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 5, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$.

Dopo aver verificato che $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono due basi di R^3 trovare la matrice del cambiamento di base dalla base $\underline{B}$ alla base B.

(1) Sia M la matrice avente come colonne proprio le terne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e sia N la matrice avente come colonne proprio le terne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, cioè $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Poiché $\det M = -1 \neq 0$ e $\det N = -1 \neq 0$ sia le tre terne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ che le tre terne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Quindi, $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono due basi di R^3.

(2) Ricordiamo che se $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ allora $C = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base (canonica) di R^3. Si noti che:

$\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1) = 2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

$\mathbf{u}_2 = (0, 5, 1) = 0\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

$\mathbf{u}_3 = (-1, 3, 0) = (-1)\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0) = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1) = 1\mathbf{e}_1 + (-1)\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1) = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$

Quindi, si ha che $M = A_{(B\to C)}$ e $N = A_{(\underline{B}\to C)}$

Per i Teoremi 15.8 e 15.7 si ha che $A_{(\underline{B}\to B)} = A_{(C\to B)}A_{(\underline{B}\to C)} = [A_{(B\to C)}]^{-1}A_{(\underline{B}\to C)} = M^{-1}N$.

Da $\operatorname{cof}M = \operatorname{cof}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -6 & 10 \end{bmatrix}$ si ha subito che $M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

Si ha che $A_{(\underline{B}\to B)} = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \\ 7 & -7 & -5 \end{bmatrix}$.

Tenendo conto che le colonne di $A_{(\underline{B}\to B)}$ sono le coordinate dei vettori della base $\underline{B}$ rispetto alla base B, possiamo verificare la correttezza del risultato nel modo seguente:

$\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + 7\mathbf{u}_3 = 4(2, 0, 1) - 4(0, 5, 1) + 7(-1, 3, 0) = (1, 1, 0)$ ☺

$\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3 = -3(2, 0, 1) + 4(0, 5, 1) - 7(-1, 3, 0) = (1, -1, 1)$ ☺

$\mathbf{v}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3 = -2(2, 0, 1) + 3(0, 5, 1) - 5(-1, 3, 0) = (1, 0, 1)$ ☺

Tenendo conto che per ogni numero reale ω si ha che $(\cos^2\omega + \sin^2\omega) = 1$, **ogni** matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

è non singolare e, quindi, è invertibile. Inoltre, è facile verificare che

$$\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

15.12 Osservazione. Sia $V_R = R^2$ lo spazio vettoriale reale delle coppie ordinate di numeri reali. Per ogni numero reale ω, le due coppie $\mathbf{w}_1 = (\cos\omega, \sin\omega)$ e $\mathbf{w}_2 = (-\sin\omega, \cos\omega)$ sono linearmente indipendenti e, quindi, l'insieme $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ è una base di R^2.

15.13 Esempio. Sia $V_R = R^2$ lo spazio vettoriale reale delle coppie ordinate di numeri reali. Siano $\mathbf{u}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathbf{u}_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, $\mathbf{v}_1 = (\cos\beta, \sin\beta)$ e $\mathbf{v}_2 = (-\sin\beta, \cos\beta)$.

Per l'Osservazione 15.12 gli insiemi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e $\underline{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ sono due basi di R^2.

Trovare la matrice $A_{(B\to\underline{B})}$ del cambiamento di base dalla base B alla base $\underline{B}$.

Se indichiamo con $C = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonica di R^2 si ha che

$$A_{(B\to C)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{(\underline{B}\to C)} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Per i Teoremi 15.8 e 15.7 si ha che $A_{(B\to\underline{B})} = A_{(C\to\underline{B})}A_{(B\to C)} = [A_{(\underline{B}\to C)}]^{-1}A_{(B\to C)}$. Per cui

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) & -(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) \\ (\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) & (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) \end{bmatrix}$$

$$A_{(B\to\underline{B})} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

16. Teorema degli orlati e sue applicazioni.

Ricordiamo che se $p \in \mathbb{N}$ allora col simbolo I_p indichiamo l'insieme $\{1, 2, 3, 4, \ldots, p\}$.

Sia A una matrice ad elementi reali di tipo $m\times n$ e sia s un intero tale che $0 \le s \le \min\{m, n\}$.

Si scelgano s righe di A e s colonne di A.

Siano $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < \ldots < i_s$ gli indici delle righe scelte.

Siano $j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < \ldots < j_s$ gli indici delle colonne scelte.

Sia B la *sottomatrice* di A che si ottiene "cancellando" da A

- le (m–s) righe aventi indice nell'insieme $I_m - \{i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_s\}$;
- le (n–s) colonne aventi indice nell'insieme $I_n - \{j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots, j_s\}$.

Se poniamo $R_B := \{i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_s\} \subseteq I_m$ e $C_B := \{j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots, j_s\} \subseteq I_n$ allora

$$B = A_{(I_m - R_B),(I_n - R_C)}$$

Ovviamente, B è una matrice **quadrata** di ordine s.

16.1. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sia s = 3 e scegliamo la 2ª, 3ª e 5ª riga di A e la 3ª, 4ª e 6ª colonna di A.

Quindi, si ha che $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 5$, $j_1 = 3$, $j_2 = 4$ e $j_3 = 6$. Cioè, $R_B = \{2, 3, 5\}$ e $C_B = \{3, 4, 6\}$.

B è la sottomatrice di A ottenuta "cancellando" da A la 1ª e 4ª riga e la 1ª, 2ª, 5ª e 7ª colonna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & 1 & 0 & \# & -2 & \# \\ \# & \# & 0 & 0 & \# & 4 & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -7 & 7 & \# & 0 & \# \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = A_{\{1,4\},\{1,2,5,7\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

B è una matrice quadrata di ordine 3.

Per costruzione, l'elemento che si trova sulla h-esima riga e k-esima colonna di B è l'elemento che si trova sulla i_h-esima riga e sulla j_k -esima colonna di A, cioè

$$b_{hk} = a_{i_h j_k}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & . & . & . & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & . & . & . & b_{2s} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & . & . & . & b_{3s} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & . & . & . & b_{4s} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & b_{s4} & . & . & . & b_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & a_{i_1 j_4} & . & . & . & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & a_{i_2 j_4} & . & . & . & a_{i_2 j_s} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} & a_{i_3 j_4} & . & . & . & a_{i_3 j_s} \\ a_{i_4 j_1} & a_{i_4 j_2} & a_{i_4 j_3} & a_{i_4 j_4} & . & . & . & a_{i_4 j_s} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & a_{i_s j_3} & a_{i_s j_4} & . & . & . & a_{i_s j_s} \end{bmatrix}$$

16.2. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo scelto $i_1 = 2$, $i_2 = 3$, $i_3 = 5$, $j_1 = 3$, $j_2 = 4$ e $j_3 = 6$

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & a_{23} & a_{24} & \# & a_{26} & \# \\ \# & \# & a_{33} & a_{34} & \# & a_{36} & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & a_{53} & a_{54} & \# & a_{56} & \# \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{26} \\ a_{33} & a_{34} & a_{36} \\ a_{53} & a_{54} & a_{56} \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Quindi,

$b_{11} = a_{23} = a_{i_1 j_1}$ $\quad b_{12} = a_{24} = a_{i_1 j_2}$ $\quad b_{13} = a_{26} = a_{i_1 j_3}$

$b_{21} = a_{33} = a_{i_2 j_1}$ $\quad b_{22} = a_{34} = a_{i_2 j_2}$ $\quad b_{23} = a_{36} = a_{i_2 j_3}$

$b_{31} = a_{53} = a_{i_3 j_1}$ $\quad b_{32} = a_{54} = a_{i_3 j_2}$ $\quad b_{33} = a_{56} = a_{i_3 j_3}$

cioè

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{bmatrix}$$

Siano, ora, $x\in(I_m - R_B)$ l'indice di una riga di A che <u>non</u> è stata scelta per costruire B e $y\in(I_n - C_B)$ l'indice di una colonna di A che <u>non</u> è stata scelta per costruire B.

16.3. Definizione. Sia La sottomatrice C **<u>quadrata</u>** di ordine (s+1) così ottenuta

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & . & . & b_{1s} & a_{i_1y} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & . & . & b_{2s} & a_{i_1y} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & . & . & b_{3s} & a_{i_1y} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & . & . & b_{4s} & a_{i_1y} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & b_{s4} & . & . & b_{ss} & a_{i_sy} \\ a_{xj_1} & a_{xj_2} & a_{xj_3} & a_{xj_4} & . & . & a_{xj_s} & a_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & a_{i_1j_3} & a_{i_1j_4} & . & . & a_{i_1j_s} & a_{i_1y} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & a_{i_2j_3} & a_{i_2j_4} & . & . & a_{i_2j_s} & a_{i_2y} \\ a_{i_3j_1} & a_{i_3j_2} & a_{i_3j_3} & a_{i_3j_4} & . & . & a_{i_3j_s} & a_{i_3y} \\ a_{i_4j_1} & a_{i_4j_2} & a_{i_4j_3} & a_{i_4j_4} & . & . & a_{i_4j_s} & a_{i_4y} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i_sj_1} & a_{i_sj_2} & a_{i_sj_3} & a_{i_sj_4} & . & . & a_{i_sj_s} & a_{i_sy} \\ a_{xj_1} & a_{xj_2} & a_{xj_3} & a_{xj_4} & . & . & a_{xj_s} & a_{xy} \end{bmatrix}$$

viene detta *sottomatrice orlata di B*.

16.4. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×7 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & 7 & -7 & 7 & -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & 1 & 0 & \# & -2 & \# \\ \# & \# & 0 & 0 & \# & 4 & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -7 & 7 & \# & 0 & \# \end{bmatrix}$$

e sia B la sua seguente sottomatrice quadrata di ordine 3

$$B = A_{\{1,4\},\{1,2,5,7\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Siano x = 4 e y = 1 rispettivamente l'indice di una riga e l'indice di una colonna di A che non sono state usate per costruire B.

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & & b_{11} & b_{12} & & b_{13} & \\ 0 & & b_{21} & b_{22} & & b_{23} & \\ 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ -7 & & b_{31} & b_{32} & & b_{33} & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \# & & & & & & \\ 1 & & b_{11} & b_{12} & & b_{13} & \\ 0 & & b_{21} & b_{22} & & b_{23} & \\ 9 & \# & -1 & 1 & \# & 8 & 1 \\ -7 & & b_{31} & b_{32} & & b_{33} & \end{bmatrix}$$

Quindi, $C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & -7 \\ -1 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -7 & 7 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice orlata di B.

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

16.5. Teorema (degli orlati). Sia A una matrice non nulla ad elementi reali di tipo m×n e sia B una sua sottomatrice quadrata di ordine **s** non singolare. Il rango della matrice A è uguale a **s** se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

16.6. Esempio. Al variare del parametro reale t, trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ -1 & 2 & t \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \# \\ -1 & 2 & \# \\ \# & \# & \# \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = 2 \neq 0$).

Quindi, $2 \leq rg(A) \leq 3$. Inoltre, rg(A) = 2 se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Ma l'unica sottomatrice orlata di B è la matrice A stessa. Quindi, rg(A) = 2 se solo se detA = 0.

Siccome detA = 6 – 2t, si ha che rg(A) = 2 solo per t = 3 e rg(A) = 3 per ogni altro valore di t.

16.7. Esempio. Al variare del parametro reale t, trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $\begin{bmatrix} \# & 0 & 1 & \# \\ \# & 1 & 0 & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = -1 \neq 0$).

Quindi, $2 \leq rg(A) \leq 3$. Inoltre, rg(A) = 2 se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Esistono due sottomatrici orlate di B

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per cui, rg(A) = 2 se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$, ovvero se e solo se $t^2 -1\ 0$ et $t + 1 = 0$.

Quindi, rg(A) = 2 solo per t = –1 e rg(A) = 3 per ogni altro valore di t.

16.8. Esempio. Al variare del parametro reale t, trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} t & t^2 & 0 & 64 & -8 \\ 1 & 8 & 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Si vede che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & 8 & 0 & \# & \# \\ \# & 0 & 6 & \# & \# \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare (detB = 48 ≠ 0).

Quindi, 2 ≤ rg(A) ≤ 3. Inoltre, rg(A) = 2 se e solo se ogni sottomatrice orlata di B è singolare.

Esistono tre sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} t & t^2 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} t^2 & 0 & 64 \\ 8 & 0 & t \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ $C_3 = \begin{bmatrix} t^2 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Per cui, rg(A) = 2 se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$ et $\det C_3 = 0$, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} 6t(8-t) = 0 \\ 6(8-t)(t^2+8t+64) = 0 \\ 6(t-8)(t+8) = 0 \end{cases}$$

Quindi, rg(A) = 2 solo per t = 8 e rg(A) = 3 per ogni altro valore di t.

16.9. Esempio. Sia $V_R = R^4$. Sia $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$.

Trovare le *equazioni cartesiane del sottospazio* U = <$\mathbf{u}_1$>.

Sia **v** = (w, x, y, z) un generico vettore di R^4. Il vettore **v** appartiene al sottospazio U se e solo se **v** è multiplo del vettore $\mathbf{u}_1$ ovvero **v** e $\mathbf{u}_1$ sono linearmente dipendenti.

Sia $A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ la matrice avente come righe le quaterne **v** e $\mathbf{u}_1$.

I vettori **v** e $\mathbf{u}_1$ sono linearmente dipendenti se e solo se rg(A) = 1.

Si vede subito che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 1 & \# & \# & \# \end{bmatrix} \to B = [1]$ è una sottomatrice non singolare (detB = 1 ≠ 0).

Esistono tre sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} w & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} w & y \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $C_3 = \begin{bmatrix} w & z \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Per cui, rg(A) = 1 se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$ et $\det C_3 = 0$, ovvero se e solo se

$\begin{cases} x = 0 \\ 2w + y = 0 \\ 3w - z = 0 \end{cases}$. Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid x = 2w + y = 3w - z = 0\}$.

16.10. Esempio. Sia $V_R = R^4$. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$ e $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 1)$.

Trovare le equazioni del sottospazio $U = <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2>$.

Sia $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ un generico vettore di R^4. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al sottospazio U se e solo se $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ ovvero $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente dipendenti. Sia A la matrice avente le quaterne $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ come righe

$$A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se rg(A) = 2.

Si vede che $\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & -2 & 3 \\ \# & \# & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una sottomatrice non singolare ($\det B = -2 \neq 0$).

Esistono due sottomatrici orlate di B $C_1 = \begin{bmatrix} w & y & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Per cui, rg(A) = 2 se e solo se $\det C_1 = 0$ et $\det C_2 = 0$, ovvero se e solo se $\begin{cases} x = 0 \\ 2w - 5y - 4z = 0 \end{cases}$.

Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid x = 2w - 5y - 4z = 0\}$.

16.11. Esempio. Sia $V_R = R^4$. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 7, -4)$.

Trovare le equazioni del sottospazio $U = <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3>$.

Sia $\mathbf{v} = (w, x, y, z)$ un generico vettore di R^4. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al sottospazio U se e solo se $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ ovvero $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti. Sia A la matrice avente le quaterne $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ come righe

$$A = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

I vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti se e solo se rg(A) = 3, cioè A non ha rango massimo, ovvero se e solo se $\det A = 0$ e, quindi, se e solo se $(-2w - 19x + 5y + 4z) = 0$.

Quindi, $U = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid 2w + 19x - 5y - 4z = 0\}$.