23. Le coniche nel piano euclideo.

23.1 Definizione. Una matrice C ad elementi reali quadrata C si dice *ortogonale* se $C^T = C^{-1}$.

23.2 Osservazione. Una matrice C ad elementi reali quadrata C è ortogonale se e solo se $C^TC = I$.

Dimostrazione. Se C è ortogonale allora $C^TC = C^{-1}C = I$. Viceversa, se $C^TC = I$ allora $\det C \neq 0$ e, quindi, C è invertibile. Si ha che $C^T = C^TI = C^T(CC^{-1}) = (C^TC)C^{-1} = IC^{-1} = C^{-1}$. ■

23.3 Osservazione. Se a e b sono due numeri reali tali che $a^2 + b^2 = 1$, allora

$$\exists!\alpha \in (-\pi, \pi] : a = \cos\alpha\ ,\ b = \sin\alpha$$

23.4 Teorema. Una matrice C ad elementi reali quadrata di **ordine 2** è ortogonale se e solo se

$$\exists!\theta \in (-\pi, \pi] : \ C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \ \text{aut} \ C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Si osservi che nel primo caso è $\det C = 1$ mentre nel secondo caso è $\det C = -1$.

Si osservi, inoltre, che cambiando il segno della seconda colonna di una matrice del primo tipo si ottiene una matrice del secondo tipo e viceversa.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Si verifica subito che se C è una matrice del tipo

$$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \ \text{aut} \ C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

allora in entrambe i casi si ha $C^T = C^{-1}$. Quindi, C è ortogonale.

($\Rightarrow$) Sia, ora, $C := \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ una generica matrice ad elementi reali quadrata di ordine 2 ortogonale.

Da $C^TC = C^{-1}C = I$ si ha che $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ovvero il sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + w^2 = 1 \\ zx + wy = 0 \end{cases}$

Dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$ si ha che $\exists!\theta \in (-\pi, \pi] : x = \cos\theta\ ,\ y = \sin\theta$.
Dall'equazione $z^2 + w^2 = 1$ si ha che $\exists!\omega \in (-\pi, \pi] : z = \cos\omega\ ,\ w = \sin\omega$.
Dall'ultima equazione $zx + wy = 0$ si ha che $\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta = 0$, da cui $\cos(\omega - \theta) = 0$.
Per cui, $\omega - \theta = \pm\pi/2$ ovvero $\omega = \theta \pm \pi/2$.

Se $\omega = \theta + \pi/2$ allora $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Se $\omega = \theta - \pi/2$ allora $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$. ■

23.5 Definizione. Una matrice A ad elementi reali quadrata si dice *simmetrica* se $A^T = A$.

23.6 Teorema. Se $A \neq aI_2$ e una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, allora:

1) la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e distinti e, quindi, A è diagonalizzabile;

2) se $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_1, allora un vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \neq \mathbf{0}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_2 se e solo se $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y = 0$;

3) esiste una matrice ortogonale C tale che $\det C = 1$ e $A = C\Lambda C^T$.

Dimostrazione. Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Siccome $A \neq aI_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ allora $b \neq 0$ oppure $a \neq c$. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$. Siccome il suo discriminante $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$ è strettamente positivo, la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e distinti e, quindi, la matrice **A è diagonalizzabile**.
Tenendo conto che $(\lambda_1 + \lambda_2) = (a + c)$ e $\lambda_1\lambda_2 = (ac - b^2)$ si dimostra subito che:
(♣) le soluzioni dell'equazione $bx + (\lambda_1 - a)y = 0$ sono tutte e sole le coppie $t(b, \lambda_2 - a)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
Sia ora $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ un autovettore relativo a λ_1. Quindi, (u_x, u_y) è un'autosoluzione del sistema omogeneo $\begin{bmatrix} (a - \lambda_1) & b \\ b & (c - \lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Per cui esiste $m \neq 0$ tale che $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = m(b, \lambda_1 - a)$.
Un vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \neq \mathbf{0}$ è un autovettore relativo a λ_2 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ è un'autosoluzione del sistema omogeneo $\begin{bmatrix} (a - \lambda_2) & b \\ b & (c - \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ è un'autosoluzione dell'equazione $(a - \lambda_2)x + by = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esiste $n \neq 0$ tale che $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = n(b, \lambda_2 - a)$ $\Leftrightarrow$ tenendo conto di (♣) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (v_x, v_y) è un'autosoluzione dell'equazione $bx + (\lambda_1 - a)y = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $bv_x + (\lambda_1 - a)v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $mbv_x + m(\lambda_1 - a)v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $u_x v_x + u_y v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

Si ha che $\|\mathbf{u}\|^2 = u_x^{\ 2} + u_y^{\ 2} = m^2[b^2 + (\lambda_1 - a)^2]$ e $\|\mathbf{v}\|^2 = v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} = n^2[b^2 + (\lambda_2 - a)^2]$. Scegliendo $m = [b^2 + (\lambda_1 - a)^2]^{1/2}$ e $n = [b^2 + (\lambda_2 - a)^2]^{1/2}$ si ha $\|\mathbf{u}\|^2 = u_x^{\ 2} + u_y^{\ 2} = 1$ e $\|\mathbf{v}\|^2 = v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} = 1$.
ORA, quindi, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ sono due auto**versori** relativi a λ_1 e λ_2 rispettivamente.

Sia $D = \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]$ la matrice che ha come colonne gli auto**versori** $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Tenendo conto che $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 1$ si ha che $D^T D = I$. Se $\det D = 1$ allora sia $C := \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]$. Se, invece, $\det D = -1$ sia $C := \left[\begin{array}{c|c} u_x & -v_x \\ u_y & -v_y \end{array}\right]$. In ogni caso, **C è ortogonale con $\det C = 1$** e la seconda colonna di C $(-\mathbf{v}) = (-v_x, -v_y)$ è ancora un auto**versore** relativo a λ_2.

Posto $\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ si ha, poiché A è diagonalizzabile, che $A = C\Lambda C^{-1} = C\Lambda C^T$. ■

Se A è una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, il Teorema 23.6 ci fornisce un **metodo pratico e veloce** per diagonalizzare A tramite una matrice ortogonale C con detC = 1.

Passo 1) **Si trovano** i due autovalori distinti λ_1 e λ_2 di A.

Passo 2) **Si sceglie**, a piacere, uno dei due autovalori di A, ad esempio λ_1.

Passo 3) **Si trova** un autovettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$ relativo a λ_1.

Passo 4) **Si calcola** la lunghezza $h = [w_x{}^2 + w_y{}^2]^{1/2}$ dell'autovettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$.

Passo 5) **Si considera** il versore $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = h^{-1}(w_x, w_y)$.

Per il Teorema 23.6 si ha che i due autoversori relativi a λ_2 sono $(v_x, v_y) = \pm(u_y, -u_x)$.

Inoltre, la matrice $\left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale e, quindi, $\det\left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right] = \pm 1$.

Passo 6) **Si sceglie** l'autoversore (v_x, v_y) relativo a λ_2 tale che $\det\left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right] = 1$.

Passo 7) Si ha che $A = \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc} u_x & u_y \\ \hline v_x & v_y \end{array}\right]$.

23.7 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 8$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 3$ sono $\mathbf{w} = \alpha(1, 2)$ $\forall\alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 5\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 3$. Per cui $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = 8$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$, allora per la matrice ortogonale

$C = \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$ è detC = 1. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ si ha $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 \end{array}\right]\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

23.8 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica A = $\begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -7$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 5$ sono $\mathbf{w} = \alpha(\sqrt{3}, 1)$ $\forall\alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 4\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 5$. Per cui $\pm\frac{1}{2}(1, -\sqrt{3})$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = -7$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$, allora la matrice ortogonale

$C = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right]$ ha detC = 1. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} \sqrt{3} & 1 \\ \hline -1 & \sqrt{3} \end{array}\right]\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

23.9 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica A = $\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -25$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 0$ sono $\mathbf{w} = \alpha(4, 3)$ $\forall\alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 25\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(4, 3)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 0$. Per cui $\pm\frac{1}{5}(3, -4)$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = -25$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(-3, 4)$, allora la matrice ortogonale

$C = \frac{1}{5}\left[\begin{array}{c|c} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]$ ha detC = 1. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{5}\left[\begin{array}{c|c} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{5}\left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \hline -3 & 4 \end{array}\right]\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

23.10. Lemma. Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento **cartesiano ortonormale** del piano.

Sia (**u**, **v**) un'altra base dello spazio <**i**, **j** > e sia C la matrice del cambiamento di base dalla base (**u**, **v**) alla base (**i**, **j**). La base (**u**, **v**) è ortonormale se e solo se C è una matrice ortogonale.

Dimostrazione. Se $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{i} + \delta\mathbf{j}$ allora $C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.

La base (**u**, **v**) è una base ortonormale se e solo se $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ e $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 0$, ovvero $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\gamma^2 + \delta^2 = 1$ e $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Queste ultime relazioni sono equivalenti a $C^TC = I$, cioè al fatto che C sia una matrice ortogonale. ■

23.11. Teorema. Siano RC(O, **i**, **j**) e RC(O, **i'**, **j'**) due riferimenti <u>cartesiani ortonormali</u> del piano aventi la <u>stessa origine</u> O. Sia C la matrice del cambiamento di base dalla base (**i'**, **j'**) alla base (**i**, **j**). Il RC(O, **i'**, **j'**) si può "*ottenere tramite un'opportuna* ***rotazione***" del RC(O, **i**, **j**), attorno al punto O, **SE E SOLO SE** la matrice C (ortogonale per il Lemma 23.10) ha **detC = 1**.

Dimostrazione. Se $\mathbf{i'} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ e $\mathbf{j'} = \gamma\mathbf{i} + \delta\mathbf{j}$ allora $C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ e $C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

Se poniamo $\mathbf{k} := \mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$ allora $\mathbf{i'}\wedge\mathbf{j'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix} = (\det C^T)\mathbf{k} = (\det C)\mathbf{k}$.

Il RC(O, **i'**, **j'**) si può ottenere tramite una rotazione (attorno ad O) del RC(O, **i**, **j**) se e solo se $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{i'}\wedge\mathbf{j'}$ (poiché la rotazione non cambia il verso del prodotto vettoriale), cioè se e solo se $\mathbf{k} = (\det C)\mathbf{k}$ ovvero se e solo se detC = 1. Quindi, esiste un <u>**unico**</u> $\theta\in(-\pi, \pi]$: $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

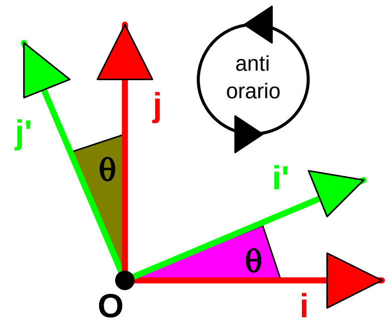
Da $\mathbf{i}\bullet\mathbf{i'} = \cos\theta = \mathbf{j}\bullet\mathbf{j'}$ si ha che $|\theta|$ è proprio l'ampiezza dell'angolo convesso compreso tra **i** e **i'** e tra **j** e **j'**. Quindi, $|\theta|$ è proprio l'ampiezza della rotazione che porta la base (**i**, **j**) sulla base (**i'**, **j'**).

Se $\sin\theta > 0$, allora $\theta\in(0, \pi]$. Quindi, il verso della rotazione è quello antiorario.

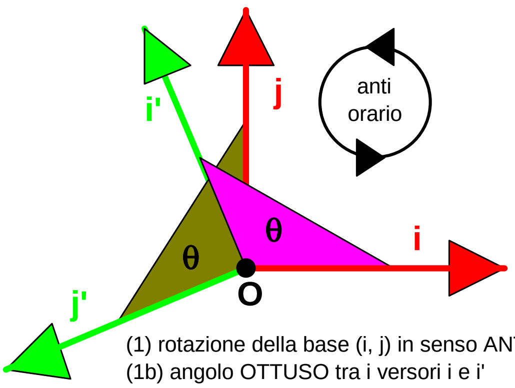
Se $\sin\theta < 0$, allora $\theta\in(-\pi, 0)$. Quindi, il verso della rotazione è quello orario. ■

Tenendo conto del Teorema 23.11 è ben posta la seguente:

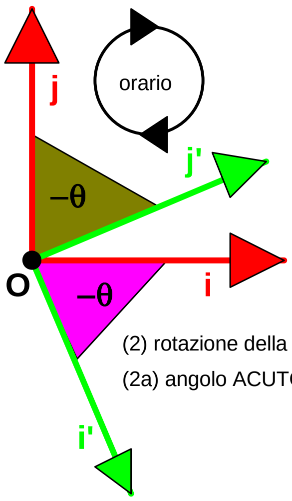
23.12. Definizione. Una matrice del tipo $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ si dice *matrice associata ad una rotazione*.



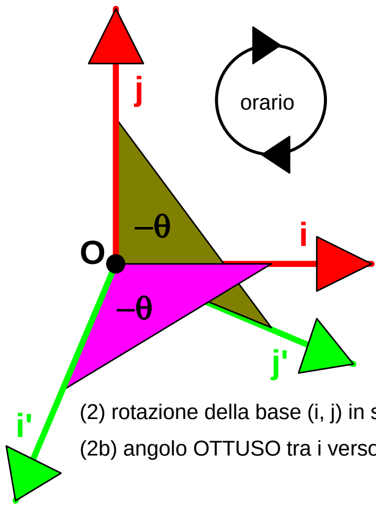
(1) rotazione della base (i, j) in senso ANTIORARIO
(1a) angolo ACUTO tra i versori i e i'



(1) rotazione della base (i, j) in senso ANTIORARIO
(1b) angolo OTTUSO tra i versori i e i'



(2) rotazione della base (i, j) in senso ORARIO
(2a) angolo ACUTO tra i versori i e i'



(2) rotazione della base (i, j) in senso ORARIO
(2b) angolo OTTUSO tra i versori i e i'

23.13. Corollario. Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano. Se $C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale con detC = 1, allora ponendo **i'** := α**i** + β**j** e **j'** := γ**i** + δ**j** si ha che:

- la terna (O, **i'**, **j'**) è un riferimento cartesiano ortonormale del piano;
- il riferimento RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene "*ruotando attorno al punto O*" il riferimento RC(O, **i**, **j**);
- l'*ampiezza* della rotazione è data da |θ| dove θ∈ (–π, π] è l'angolo tale che cosθ = α e sinθ = β;
- il *verso* della rotazione è antiorario/orario a seconda che β = sinθ sia positivo/negativo;
- C è proprio la matrice del cambiamento di base dalla base B' = (**i'**, **j'**) alla base B = (**i**, **j**).

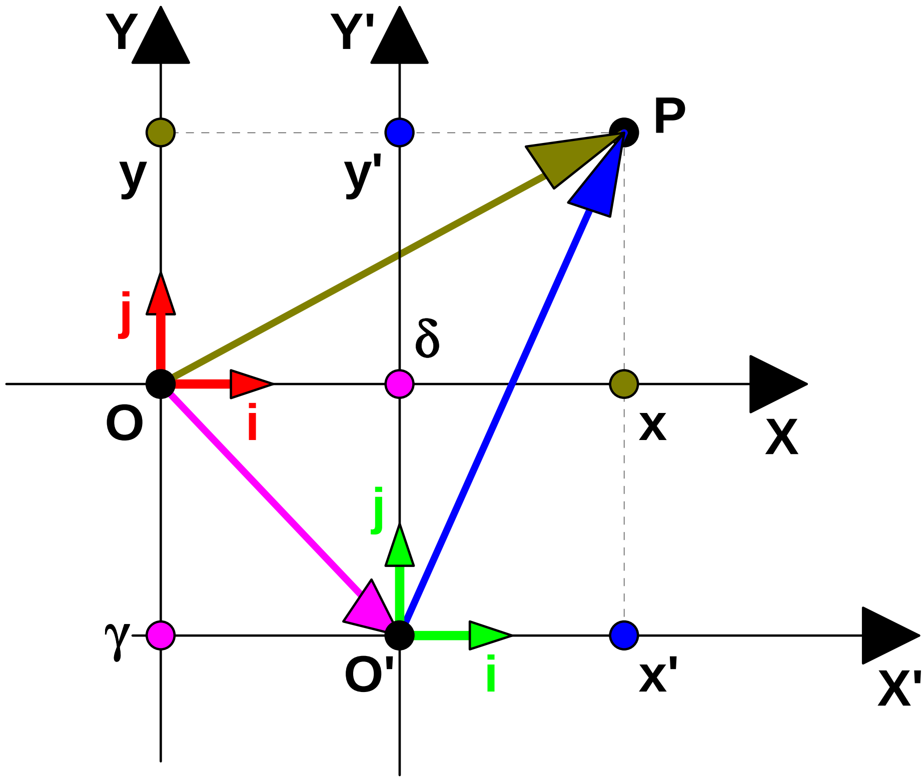
23.14. Osservazione. Sia P un punto generico del piano.

Se (x, y) sono le coordinate di P rispetto a RC(O, **i**, **j**), allora $[OP]_B$ = x**i** + y**j**.

Se (x', y') sono le coordinate di P rispetto a RC(O, **i'**, **j'**), allora $[OP]_{B'}$ = x'**i'** + y'**j'**.

Ponendo $X = [x \quad y]^T$ e $Y = [x' \quad y']^T$ le equazioni del cambiamento di base sono X = CY, ovvero

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \quad \text{(equazioni della rotazione)}$$



23.15. Osservazione. Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano.

Sia O' un punto del piano avente coordinate (δ, γ) rispetto al riferimento RC(O, **i**, **j**), cioè

$$[OO'] = \delta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j}$$

Ovviamente, anche la terna (O', **i**, **j**) è un riferimento cartesiano ortonormale del piano.

Il riferimento RC(O', **i**, **j**) si ottiene dal riferimento RC(O, **i**, **j**) tramite la “traslazione” che porta il punto O sul punto O'. Sia ora P un (generico) punto del piano.

Se il punto P ha coordinate (x, y) rispetto al RC(O, **i**, **j**), allora [OP] = x**i** + y**j**.

Se il punto P ha coordinate (x', y') rispetto al RC(O', **i**, **j**), allora [O'P] = x'**i** + y'**j**.

Per cui l'identità vettoriale $\quad [OP] = [OO'] + [O'P]$

è equivalente all'identità vettoriale $\quad x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (\delta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j}) + (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})$

che è equivalente all'identità vettoriale $\quad x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (\delta + x')\mathbf{i} + (\gamma + y')\mathbf{j}$

Quest'ultima identità vettoriale, per l'unicità della scrittura di un vettore rispetto alla base (**i**, **j**), è equivalente alle due identità seguenti

$$\begin{cases} x = \delta + x' \\ y = \gamma + y' \end{cases}$$

che vengono dette, per la genericità del punto P, *equazioni della traslazione*.

23.16. Definizione. Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano. Diremo *curva* l'insieme $\mathcal{F}$ di tutti e soli i punti del piano (ovvero il **luogo** dei punti del piano) le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo F(x, y) = 0. Diremo anche che F(x, y) = 0 è l'equazione cartesiana della curva $\mathcal{F}$ e scriveremo, brevemente, $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0.

23.17. Definizione. Se F(x, y) è un polinomio in x e y (a coefficienti costanti) di grado n, allora si dice che la curva $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0 è una *curva algebrica di ordine n*.

23.18. Esempi. La curva $\mathcal{F}$: $2x - 3y - 9 = 0$ è una retta;

la curva $\mathcal{F}$: $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$ è un'ellisse;

la curva $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ è una circonferenza di centro l'origine e raggio 2;

la curva $\mathcal{F}$: $x^2 + y + 3 = 0$ è una parabola;

la curva $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 + 5 = 0$ non ha punti reali;

la curva $\mathcal{F}$: $3(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$ ha il punto (1, –2) come suo unico punto reale;

la curva $\mathcal{F}$: $[(x-1)(x+1)]^2 + (y-3)^2 = 0$ ha i punti (1, 3) e (–1, 3)) come suoi unici punti reali.

23.19. Osservazione. Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano.

Una curva $\mathcal{F}$ di equazione F(x, y) = 0 è

23.19. 1. simmetrica rispetto all'asse X se per ogni $(x, y) \in R^2$ si ha che: $F(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, -y) = 0$;

23.19.2. simmetrica rispetto all'asse Y se per ogni $(x, y) \in R^2$ si ha che: $F(x, y) = 0 \Rightarrow F(-x, y) = 0$;

23.19.3. simmetrica rispetto ad O se se per ogni $(x, y) \in R^2$ si ha che: $F(x, y) = 0 \Rightarrow F(-x, -y) = 0$.

23.20. Definizione. Date due curve $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0 e $\mathcal{G}$: G(x, y) = 0 del piano, diremo

23.20.1. *curva intersezione di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$*,e la indicheremo col simbolo $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, l'insieme di tutti e soli i punti del piano che appartengono ad <u>entrambe</u> le curve;

23.20.2. *curva unione di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$*, e la indicheremo col simbolo $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, l'insieme di tutti e soli i punti del piano che appartengono ad <u>almeno una</u> delle due curve.

23.21. Osservazione. Date due curve $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0 e $\mathcal{G}$: G(x, y) = 0 del piano, si ha che

23.21.1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} : \begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$

23.21.2. $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$: F(x, y)G(x, y) = 0

23.22. Esempio. Date le curve (rette) F(x, y) = 2x – 3y – 9 = 0 e G(x, y) = 2x + y – 5 = 0 si ha che

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{(3, -1)\}$ $\quad$ $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} : (2x - 3y - 9)(2x + y - 5) = 4x^2 - 4xy - 3y^2 - 28x + 6y + 45 = 0$

23.23. Definizione. Diremo *conica* **ogni** curva algebrica di ordine 2.

Quindi, una conica è il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

23.24. Lemma. Se rispetto ad un riferimento RC(O, **i**, **j**) del piano $\mathcal{C}$ è una conica di equazione

$$(\heartsuit)\ \ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

allora esiste un riferimento RC(O, **i'**, **j'**) tale che rispetto ad esso la la conica $\mathcal{C}$ ha equazione

$$(\clubsuit)\ \ \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + gx' + hy' + f = 0 \qquad \text{con } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$$

Inoltre, il riferimento RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene tramite una rotazione del riferimento RC(O, **i**, **j**).

Dimostrazione. Ponendo

$$A := \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \neq 0 \quad , \quad X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G := [\, d \quad e \,]$$

si verifica subito che:

(1) $X^T AX = ax^2 + bxy + cy^2$

(2) $GX = dx + ey$

per cui la ($\heartsuit$) si può riscrivere così

$$(\spadesuit)\ \ X^T AX + GX + f = 0$$

Poiché A è simmetrica, esistono una matrice diagonale $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ed una matrice ortogonale $C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ con detC = 1 tali che $A = C\Lambda C^T$. Se consideriamo i vettori **i'** := α**i** + β**j** e **j'** := γ**i** + δ**j**, allora la terna (O, **i'**, **j'**) un riferimento cartesiano ortonormale che si ottene "ruotando" RC(O, **i**, **j**).

Ponendo $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della rotazione sono $X = CY$, da cui $Y = C^{-1}X = C^TX$. Si ha che:

(I) $X^TAX = X^T(C\Lambda C^T)X = (X^TC)\Lambda(C^TX) = (C^TX)^T\Lambda(C^TX) = Y^T\Lambda Y = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$.

Inoltre, ponendo $GC = H = [\, g \quad h \,]$ si ha che

(II) $GX = G(CY) = (GC)Y = HY = gx' + hy'$.

Tenendo conto di (I) e (II) la ($\spadesuit$) diventa $Y^T\Lambda Y + HY + f = 0$ ovvero

$$(\clubsuit)\ \ \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + gx' + hy' + f = 0$$

Inoltre, essendo $A \neq 0$ si ha che anche $\Lambda \neq 0$. Quindi, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. ■

23.25. Teorema. (*classificazione delle coniche nel piano euclideo*)

Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano. Se $\mathcal{C}$ è una conica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

allora esiste un riferimento RC(O', **i'**, **j'**), ottenuto con una rototraslazione di RC(O, **i**, **j**), tale che rispetto ad esso la la conica $\mathcal{C}$ ha una delle seguenti nove equazioni:

1) $(x'')^2 + n = 0$ con $n > 0$ — *conica senza punti reali*

2) $(x'')^2 = 0$ — *due rette reali e coincidenti*

3) $(x'' - p)(x'' + p) = 0$ con $p \neq 0$ — *due rette reali distinte parallele*

4) $y'' = q(x'')^2$ — *parabola*

5) $|\lambda_1|(x'')^2 + |\lambda_2|(y'')^2 = 0$ con $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ — *conica con un solo punto reale*

6) $(\sqrt{|\lambda_1|}\,x'' + \sqrt{|\lambda_2|}\,y'')(\sqrt{|\lambda_1|}\,x'' - \sqrt{|\lambda_2|}\,y'') = 0$ con $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ — *due rette reali distinte incidenti*

7) $\dfrac{(x'')^2}{\alpha^2} + \dfrac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$ — *ellisse*

8) $\dfrac{(x'')^2}{\alpha^2} + \dfrac{(y'')^2}{\beta^2} = -1$ con $\alpha\beta \neq 0$ — *ellisse immaginaria*

9) $\dfrac{(x'')^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$ — *iperbole*

Dimostrazione. Per il Lemma 23.24 esiste un riferimento RC(O, **i'**, **j'**) tale che rispetto ad esso la conica $\mathcal{C}$ ha equazione

$$(\clubsuit) \quad \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + gx' + hy' + f = 0 \qquad \text{con } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$$

Inoltre, il riferimento RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene tramite una **rotazione** del riferimento RC(O, **i**, **j**).

• **Se uno dei due autovalori è uguale a zero**, allora sia $\lambda_2 = 0$. Ovviamente, $\lambda_1 \neq 0$. Si ha che

$$\lambda_1(x')^2 + gx' + hy' + f = 0$$

$$(x')^2 + \frac{g}{\lambda_1}x' + \frac{h}{\lambda_1}y' + \frac{f}{\lambda_1} = 0$$

$$\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \frac{h}{\lambda_1}y' + \frac{f}{\lambda_1} = 0$$

$$\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \frac{h}{\lambda_1}y' + \frac{f}{\lambda_1} - \left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 = 0$$

Ponendo $\delta := \dfrac{g}{2\lambda_1}$, $m := \dfrac{h}{\lambda_1}$ e $n := \dfrac{f}{\lambda_1} - \left(\dfrac{g}{2\lambda_1}\right)^2$ l'equazione precedente diventa

$$(\spadesuit)\quad (x' + \delta)^2 + my' + n = 0$$

Se **m = 0**, allora l'equazione ($\spadesuit$) diventa

$$(x' + \delta)^2 + n = 0$$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} x'' = x' + \delta \\ y'' = y' \end{cases}$ dal RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene un RC(O', **i'**, **j'**) tale che rispetto ad esso l'equazione della conica $\mathcal{C}$ diventa

$$(x'')^2 + n = 0.$$

1) Se $n > 0$, allora l'equazione $(x'')^2 + n = 0$ non ha soluzioni reali. Quindi, $\mathcal{C}$ non ha punti reali.

2) Se $n = 0$, allora l'equazione diventa $(x'')^2 = 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è l'unione di due rette reali coincidenti.

3) Se $n < 0$, allora ponendo $n := -p^2$ l'equazione diventa $(x'')^2 - p^2 = (x'' - p)(x'' + p) = 0$ con $p \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è l'unione di due rette reali distinte parallele.

4) Se **m ≠ 0**, allora l'equazione ($\spadesuit$) diventa

$$\frac{1}{m}(x' + \delta)^2 + y' + \frac{n}{m} = 0$$

$$y' + \frac{n}{m} = -\frac{1}{m}(x' + \delta)^2$$

ponendo $q := -\frac{1}{m}$ e $\gamma = \frac{n}{m}$ si ha $y' + \gamma = q(x' + \delta)^2$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} x'' = x' + \delta \\ y'' = y' + \gamma \end{cases}$ dal RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene un RC(O', **i'**, **j'**) tale che rispetto ad esso l'equazione della conica $\mathcal{C}$ diventa $y'' = q(x'')^2$. Quindi, $\mathcal{C}$ è una parabola.

● **Se nessuno dei due autovalori èuguale a zero**, allora l'equazione ($\clubsuit$) si può riscrivere così:

$$\lambda_1(x')^2 + gx' + \lambda_2(y')^2 + hy' + f = 0$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_1\left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 + f = 0$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 + f - \lambda_1\left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 = 0$$

Ponendo $\delta := \frac{g}{2\lambda_1}$, $\gamma := \frac{h}{2\lambda_2}$ e $n = f - \lambda_1\delta^2 - \lambda_2\gamma^2 = f - \lambda_1\left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{h}{2\lambda_2}\right)^2$ abbiamo

$$\lambda_1(x' + \delta)^2 + \lambda_2(y' + \gamma)^2 + n = 0$$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} x'' = x' + \delta \\ y'' = y' + \gamma \end{cases}$ dal RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene un RC(O', **i'**, **j'**) tale che rispetto ad esso l'equazione della conica $\mathcal{C}$ diventa

$$(\blacklozenge)\quad \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + n = 0$$

Se **n = 0**, allora l'equazione ($\blacklozenge$) diventa

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = 0.$$

5) Se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, allora l'equazione diventa $|\lambda_1|(x'')^2 + |\lambda_2|(y'')^2 = 0$ che ha la coppia (0, 0) come unica soluzione reale. Quindi, $\mathcal{C}$ ha un solo punto reale.

6) Se $\lambda_1\lambda_2 < 0$, allora l'equazione diventa $|\lambda_1|(x'')^2 - |\lambda_2|(y'')^2 = 0$ ovvero

$$(\sqrt{|\lambda_1|}\, x'' + \sqrt{|\lambda_2|}\, y'')(\sqrt{|\lambda_1|}\, x'' - \sqrt{|\lambda_2|}\, y'') = 0$$

Quindi, $\mathcal{C}$ è l'unione di due rette reali distinte incidenti.

Se **n ≠ 0**, allora l'equazione ($\blacklozenge$) si può riscrivere così

$$(\heartsuit)\quad \left(-\frac{\lambda_1}{n}\right)(x'')^2 + \left(-\frac{\lambda_2}{n}\right)(y'')^2 = 1$$

Se $\boldsymbol{\lambda_1\lambda_2 > 0}$, allora $\left(-\frac{\lambda_1}{n}\right)\left(-\frac{\lambda_2}{n}\right) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{n^2} > 0$. Quindi, abbiamo i seguenti due casi:

7) Se $\left(-\frac{\lambda_1}{n}\right) > 0$ e $\left(-\frac{\lambda_2}{n}\right) > 0$, allora ponendo $\alpha^2 := \left(-\frac{n}{\lambda_1}\right) > 0$ e $\beta^2 := \left(-\frac{n}{\lambda_2}\right) > 0$ l'equazione ($\heartsuit$) diventa $\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

8) Se $\left(-\frac{\lambda_1}{n}\right) < 0$ e $\left(-\frac{\lambda_2}{n}\right) < 0$, allora ponendo $\alpha^2 := \frac{n}{\lambda_1} > 0$ e $\beta^2 := \frac{n}{\lambda_2} > 0$ l'equazione ($\heartsuit$) diventa $\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} = -1$ con $\alpha\beta \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ non ha punti reali e si dice *ellisse immaginaria*.

9) Se $\boldsymbol{\lambda_1\lambda_2 < 0}$, allora $\left(-\frac{\lambda_1}{n}\right)\left(-\frac{\lambda_2}{n}\right) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{n^2} < 0$. Siccome gli autovalori sono discordi, possiamo sempre sceglierli in modo che sia $\left(-\frac{\lambda_1}{n}\right) > 0$ e $\frac{\lambda_2}{n} > 0$. Ponendo $\alpha^2 := \left(-\frac{n}{\lambda_1}\right) > 0$ e $\beta^2 := \frac{n}{\lambda_2} > 0$ l'equazione ($\heartsuit$) diventa $\frac{(x'')^2}{\alpha^2} - \frac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è un'iperbole. ■

Esercizio 1. Classificare la conica: $x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$.

$a = 1 \quad b = -10 \quad c = 1 \quad d = 10 \quad e = -2 \quad f = 1$

$A := \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda - 6)(\lambda + 4) \Rightarrow \lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 6$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 6I)X = \mathbf{0}$)

$(A - 6I) = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x + y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(1, -1) \ \forall t \in R - \{0\}$

Dato che $\|(1, -1)\| = \sqrt{2}$, prendendo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. Se scegliamo $\mathbf{i'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = -4$) è necessariamente $\mathbf{j'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

è ortogonale con detC = 1. *Si osservi anche che $\theta = -\pi/4$ radianti. Cioè, il RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene "ruotando" il RC(O, **i**, **j**) attorno ad O di 45° in senso orario.*

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della **rotazione** sono X = CY.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = x^2 - 10xy + y^2$$

nel complesso

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 6(x')^2 - 4(y')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 10x - 2y$ nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,10 \quad -2\,]\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}[\,10 \quad -2\,]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}[\,12 \quad 8\,] = [\,6\sqrt{2} \quad 4\sqrt{2}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $10x - 2y$ nel complesso $6\sqrt{2}\,x' + 4\sqrt{2}\,y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i’**, **j’**) la conica ha equazione

$$6(x')^2 - 4(y')^2 + 6\sqrt{2}\,x' + 4\sqrt{2}\,y' + 1 = 0$$

$$6(x')^2 + 6\sqrt{2}\,x' - 4(y')^2 + 4\sqrt{2}\,y' + 1 = 0$$

$$6(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 3 - 4(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2 + 1 = 0$$

$$6(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 4(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2 + 1 - 3 = 0$$

$$6(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 4(y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$$

Effettuando la **<u>traslazione</u>** $\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ otteniamo l’equazione

$$6(x'')^2 - 4(y'')^2 = 0$$

$$(\sqrt{6}\,x'')^2 - (2y'')^2 = 0$$

$$(\sqrt{6}\,x'' + 2y'')(\sqrt{6}\,x'' - 2y'') = 0$$

Quindi, la conica è **unione di due rette** **reali** **distinte** **incidenti**.

Esercizio 2. Classificare la conica: $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 60x - 70y + 105 = 0$.

$a = 8 \quad b = -12 \quad c = 17 \quad d = 60 \quad e = -70 \quad f = 105$

$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = (\lambda - 5)(\lambda - 20) \Rightarrow \lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = 20$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 5$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 5I)X = \mathbf{0}$)

$(A - 5I) = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -6x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - 2y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(2, 1) \ \ \forall t \in R - \{0\}$

Dato che $\|(2, 1)\| = \sqrt{5}$, prendendo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. <u>Se scegliamo</u> $\mathbf{i'} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = 20$) è <u>necessariamente</u> $\mathbf{j'} = \frac{\sqrt{5}}{5}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$$

è ortogonale con detC = 1.

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della <u>**rotazione**</u> sono X = CY.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 8x^2 - 12xy + 17y^2$$

nel complesso

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 5(x')^2 + 20(y')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 60x - 70y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,60 \quad -70\,]\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{5}}{5}[\,60 \quad -70\,]\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{5}}{5}[50 \quad -200\,] = [\,10\sqrt{5} \quad -40\sqrt{5}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $60x - 70y$

nel complesso $10\sqrt{5}\,x' - 40\sqrt{5}\,y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i'**, **j'**) la conica ha equazione

$$5(x')^2 + 20(y')^2 + 10\sqrt{5}\,x' - 40\sqrt{5}\,y' + 105 = 0$$

$$5(x')^2 + 10\sqrt{5}\,x' + 20(y')^2 - 40\sqrt{5}\,y' + 105 = 0$$

$$5(x' + \sqrt{5})^2 - 25 + 20(y' - \sqrt{5})^2 - 100 + 105 = 0$$

$$5(x' + \sqrt{5})^2 + 20(y' - \sqrt{5})^2 + 105 - 25 - 100 = 0$$

$$5(x' + \sqrt{5})^2 + 20(y' - \sqrt{5})^2 - 20 = 0$$

Effettuando la **<u>traslazione</u>** $\begin{cases} x'' = x' + \sqrt{5} \\ y'' = y' - \sqrt{5} \end{cases}$ otteniamo l'equazione

$$5(x'')^2 + 20(y'')^2 = 20$$

$$\frac{1}{4}(x'')^2 + (y'')^2 = 1$$

Quindi, la conica è un'**ellisse**.

Esercizio 3. Classificare la conica: $3x^2 + 10\sqrt{3}\,xy - 7y^2 + 4\sqrt{3}\,x - 44y - 52 = 0$.

$a = 3 \quad b = 10\sqrt{3} \quad c = -7 \quad d = 4\sqrt{3} \quad e = -44 \quad f = -52$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 96 = (\lambda - 8)(\lambda + 12) \Rightarrow \lambda_1 = 8\ ,\ \lambda_2 = -12$$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 8$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 8I)X = \mathbf{0}$)

$$(A - 8I) = \begin{bmatrix} -5 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 5\sqrt{3}y = 0 \\ 5\sqrt{3}x - 15y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - \sqrt{3}\,y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(\sqrt{3}, 1)\ \ \forall t \in R-\{0\}$$

Dato che $\|(\sqrt{3}, 1)\| = 2$, prendendo $t = \pm\frac{1}{2}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. <u>Se scegliamo</u> $\mathbf{i'} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = -12$) è <u>necessariamente</u> $\mathbf{j'} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

è ortogonale con detC = 1. *Si osservi anche che $\theta = \pi/6$ radianti. Cioè, il RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene "ruotando" il RC(O, **i**, **j**) attorno ad O di 30° in senso antiorario.*

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della **<u>rotazione</u>** sono X = CY.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 3x^2 + 10\sqrt{3}\,xy - 7y^2$$

nel complesso

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 8(x')^2 - 12(y')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 4\sqrt{3}\,x - 44y$

nel complesso gx'+ hy' dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,4\sqrt{3} \quad -44]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[\,4\sqrt{3} \quad -44]\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[\,-32 \quad -48\sqrt{3}\,] = [\,-16 \quad -24\sqrt{3}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $4\sqrt{3}\,x - 44y$

nel complesso $-16x' - 24\sqrt{3}\,y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i'**, **j'**) la conica ha equazione

$$8(x')^2 - 12(y')^2 - 16x' - 24\sqrt{3}\,y' - 52 = 0$$

$$8(x')^2 - 16x' - 12(y')^2 - 24\sqrt{3}\,y' - 52 = 0$$

$$8(x' - 1)^2 - 8 - 12(y' + \sqrt{3})^2 + 36 - 52 = 0$$

$$8(x' - 1)^2 - 12(y' + \sqrt{3})^2 + 36 - 52 - 8 = 0$$

$$8(x' - 1)^2 - 12(y' + \sqrt{3})^2 - 24 = 0$$

Effettuando la **<u>traslazione</u>** $\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' + \sqrt{3} \end{cases}$ otteniamo l'equazione

$$8(x'')^2 - 12(y'')^2 = 24$$

$$\frac{1}{3}(x'')^2 - \frac{1}{2}(y'')^2 = 1$$

Quindi, la conica è un'**iperbole**.

Esercizio 4. Classificare la conica: $3x^2 - 4\sqrt{3}\,xy + 4y^2 + 2\sqrt{3}\,x - 4y + 1 = 0.$

$a = 3 \quad b = -4\sqrt{3} \quad c = 4 \quad d = 2\sqrt{3} \quad e = -4 \quad f = 1$

$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 7) \Rightarrow \lambda_1 = 7\ ,\ \lambda_2 = 0$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 7$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 7I)X = \mathbf{0}$)

$(A - 7I) = \begin{bmatrix} -4 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2\sqrt{3}y = 0 \\ -2\sqrt{3}x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{2x + \sqrt{3}\,y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(\sqrt{3}, -2)\ \forall t\neq 0$

Dato che $\|(\sqrt{3}, -2)\| = \sqrt{7}$, prendendo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{7}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. Se scegliamo $\mathbf{i'} = \frac{\sqrt{7}}{7}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = 0$) è necessariamente $\mathbf{j'} = \frac{\sqrt{7}}{7}(2\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{\sqrt{7}}{7}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & 2 \\ -2 & \sqrt{3} \end{array}\right]$$

è ortogonale con detC = 1.

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della **rotazione** sono $X = CY$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 3x^2 - 4\sqrt{3}\,xy + 4y^2$$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$)

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 7(x')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 2\sqrt{3}\,x - 4y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,2\sqrt{3} \quad -4\,]\frac{\sqrt{7}}{7}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 2\\ -2 & \sqrt{3}\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{7}}{7}[\,2\sqrt{3} \quad -4\,]\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 2\\ -2 & \sqrt{3}\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{7}}{7}[\,14 \quad 0\,] = [\,2\sqrt{7} \quad 0\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $2\sqrt{3}\,x - 4y$

nel complesso $2\sqrt{7}\,x'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i'**, **j'**) la conica ha equazione

$$7(x')^2 + 2\sqrt{7}\,x' + 1 = 0$$

$$7\left(x' + \frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2 = 0$$

$$\left(x' + \frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2 = 0$$

Effettuando la **<u>traslazione</u>** $\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{7}}{7} \\ y'' = y' \end{cases}$ otteniamo l'equazione

$$(x'')^2 = 0$$

Quindi, la conica è **unione di due rette reali coincidenti**.

Esercizio 5. Classificare la conica: $4x^2 + 4xy + y^2 + 2\sqrt{5}\,x + 6\sqrt{5}\,y + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

a = 4 b = 4 c = 1 d = $2\sqrt{5}$ e = $6\sqrt{5}$ f = $5 + 2\sqrt{3}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) \Rightarrow \lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = 0$$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 5$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 5I)X = \mathbf{0}$)

$$(A - 5I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - 2y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(2, 1)\ \forall t \neq 0$$

Dato che $\|(2, 1)\| = \sqrt{5}$, prendendo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. <u>Se scegliamo</u> $\mathbf{i}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = 0$) è <u>necessariamente</u> $\mathbf{j}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$$

è ortogonale con detC = 1.

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della <u>**rotazione**</u> sono X = CY.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$)

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 5(x')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 2\sqrt{5}\,x + 6\sqrt{5}\,y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,2\sqrt{5} \quad 6\sqrt{5}\,]\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{5}}{5}[\,2\sqrt{5} \quad 6\sqrt{5}\,]\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] = [\,2 \quad 6\,]\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] = [\,10 \quad 10\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso $2\sqrt{5}\,x + 6\sqrt{5}\,y$

nel complesso $10x' + 10y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i'**, **j'**) la conica ha equazione

$$5(x')^2 + 10x' + 10y' + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$5(x' + 1)^2 - 5 + 10y' + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$5(x' + 1)^2 + 10y' + 2\sqrt{3} = 0$$

$$10y' + 2\sqrt{3} = -5(x' + 1)^2$$

$$y' + \frac{\sqrt{3}}{5} = -\frac{1}{2}(x' + 1)^2$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + \dfrac{\sqrt{3}}{5} \end{cases}$ otteniamo l'equazione

$$y'' = -\frac{1}{2}(x'')^2$$

Quindi, la conica è una **parabola**.

Esercizio 6. Classificare la conica: $5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 - 12\sqrt{3}\,x + 20y + 36 = 0.$

$a = 5 \quad b = -2\sqrt{3} \quad c = 7 \quad d = 12\sqrt{3} \quad e = 20 \quad f = 36$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 32 = (\lambda-4)(\lambda-8) \Rightarrow \lambda_1 = 4 \ , \ \lambda_2 = 8$$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 5$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 4I)X = \mathbf{0}$)

$$(A-4I) = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - \sqrt{3}\,y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(\sqrt{3}, 1) \ \ \forall t \in R - \{0\}$$

Dato che $\|(\sqrt{3}, 1)\| = 2$, prendendo $t = \pm\frac{1}{2}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. Se scegliamo $\mathbf{i'} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = 8$) è necessariamente $\mathbf{j'} = \frac{1}{2}(-\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right]$$

è ortogonale con detC = 1.

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della **rotazione** sono X = CY.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2$$

nel complesso

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 4(x')^2 + 8(y')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -\,12\sqrt{3}\,x + 20y$ nel complesso $gx' + hy'$ dove dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,-12\sqrt{3} \quad 20\,]\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right] = \frac{1}{2}[\,-12\sqrt{3} \quad 20\,]\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right] = \frac{1}{2}[\,-16 \quad 32\sqrt{3}\,] = [\,-8 \quad 16\sqrt{3}\,]$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $-\,12\sqrt{3}\,x + 20y$ nel complesso $-\,8x' + 16\sqrt{3}\,y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i’**, **j’**) la conica ha equazione

$$4(x')^2 + 8(y')^2 - 8x' + 16\sqrt{3}\,y' + 36 = 0$$

$$4(x')^2 - 8x' + 8(y')^2 + 16\sqrt{3}\,y' + 36 = 0$$

$$4(x' - 1)^2 - 4 + 8(y' + \sqrt{3})^2 - 24 + 36 = 0$$

$$4(x' - 1)^2 + 8(y' + \sqrt{3})^2 + 36 - 4 - 24 = 0$$

$$4(x' - 1)^2 + 8(y' + \sqrt{3})^2 + 8 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' + \sqrt{3} \end{cases}$ otteniamo l’equazione

$$4(x'')^2 + 8(y'')^2 = -8$$

$$\frac{1}{2}(x'')^2 + (y'')^2 = -1$$

Quindi, la conica è un’**ellisse immaginaria**.

Esercizio 7. Classificare la conica: $9x^2 + 6xy + y^2 - 6x - 2y - 39 = 0$.

$a = 9 \quad b = 6 \quad c = 1 \quad d = -6 \quad e = -2 \quad f = -39$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10) \Rightarrow \lambda_1 = 10 \;,\; \lambda_2 = 0$$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 10$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 10I)X = \mathbf{0}$)

$$(A - 10I) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 3x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - 3y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(3, 1) \;\; \forall t \in R - \{0\}$$

Dato che $\|(3, 1)\| = \sqrt{10}$, prendendo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. <u>Se scegliamo</u> $\mathbf{i'} = \frac{\sqrt{10}}{10}(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = 0$) è <u>necessariamente</u> $\mathbf{j'} = \frac{\sqrt{10}}{10}(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{\sqrt{10}}{10}\left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{array}\right]$$

è ortogonale con detC = 1.

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della <u>**rotazione**</u> sono X = CY.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$)

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 10(x')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -6x - 2y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove dove (**ricordiamo**) è $[\,d \;\; e\,]C = [\,g \;\; h\,]$. Quindi,

$$[\,-6 \;\; -2\,]\frac{\sqrt{10}}{10}\left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{10}}{10}[\,-6 \;\; -2\,]\left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{10}}{10}[\,-20 \;\; 0\,] = [\,-2\sqrt{10} \;\; 0\,]$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $-6x - 2y$

nel complesso $-2\sqrt{10}\,x'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i’**, **j’**) la conica ha equazione

$$10(x')^2 - 2\sqrt{10}\,x' - 39 = 0$$

$$10\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 - 1 - 39 = 0$$

$$10\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 - 40 = 0$$

$$\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 - 4 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{\sqrt{10}}{10} \\ y'' = y' \end{cases}$ otteniamo l’equazione

$$(x'')^2 - 4 = 0$$

$$(x'' - 2)(x'' + 2) = 0$$

Quindi, la conica è **unione di due rette** **reali** **distinte** **parallele**.

Esercizio 8. Classificare la conica: $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 12y + 12 = 0$.

$a = 3 \quad b = 2 \quad c = 3 \quad d = -4 \quad e = -12 \quad f = 12$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_1 = 4 \ , \ \lambda_2 = 2$$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 4$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 4I)X = \mathbf{0}$)

$$(A - 4I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(1, 1) \ \ \forall t \in R-\{0\}$$

Dato che $\|(1, 1)\| = \sqrt{2}$, prendendo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. Se scegliamo $\mathbf{i'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = 2$) è necessariamente $\mathbf{j'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

è ortogonale con detC = 1. *Si osservi anche che $\theta = \pi/4$ radianti. Cioè, il RC(O, **i'**, **j'**) si ottiene "ruotando" il RC(O, **i**, **j**) attorno ad O di 45° in senso antiorario.*

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della **rotazione** sono X = CY.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 3x^2 + 2xy + 3y^2$$

nel complesso

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 4(x')^2 + 2(y')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -4x - 12y$

nel complesso gx'+ hy' dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,-4 \quad -12\,]\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}[\,-4 \quad -12]\left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}[\,-16 \quad -8\,] = [\,-8\sqrt{2} \quad -4\sqrt{2}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $-4x - 12y$

nel complesso $-8\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{2}\,y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i'**, **j'**) la conica ha equazione

$$4(x')^2 + 2(y')^2 - 8\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{2}\,y' + 12 = 0$$

$$4(x')^2 - 8\sqrt{2}\,x' + 2(y')^2 - 4\sqrt{2}\,y' + 12 = 0$$

$$4(x' - \sqrt{2}\,)^2 - 8 + 2(y' - \sqrt{2}\,)^2 - 4 + 12 = 0$$

$$4(x' - \sqrt{2}\,)^2 + 2(y' - \sqrt{2}\,)^2 - 4 + 12 - 8 = 0$$

$$4(x' - \sqrt{2}\,)^2 + 2(y' - \sqrt{2}\,)^2 = 0$$

$$2(x' - \sqrt{2}\,)^2 + (y' - \sqrt{2}\,)^2 = 0$$

Effettuando la **<u>traslazione</u>** $\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{2} \\ y'' = y' - \sqrt{2} \end{cases}$ otteniamo l'equazione

$$2(x'')^2 + (y'')^2 = 0$$

Quindi, la conica **ha un solo punto reale**.

Utilizzando i numeri complessi, indicata con i l'unità immaginaria (tale che $i^2 = -1$, ovvero $-i^2 = 1$) possiamo scrivere l'equazione $2(x'')^2 + (y'')^2 = 0$ come segue

$$2(x'')^2 - i^2(y')^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}\,x'')^2 - (iy')^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}\,x'' - iy')(\sqrt{2}\,x'' + iy') = 0$$

Quindi, la conica è unione di due rette immaginarie coniugate incidenti in un punto reale.

Esercizio 9. Classificare la conica: $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y + 53 = 0$.

$a = 4 \quad b = -12 \quad c = 9 \quad d = -4 \quad e = 6 \quad f = 53$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda = \lambda(\lambda - 13) \Rightarrow \lambda_1 = 13 \ , \ \lambda_2 = 0$$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 13$ (cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 13I)X = \mathbf{0}$)

$$(A - 13I) = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 6y = 0 \\ -6x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\mathbf{x} + \mathbf{2y} = \mathbf{0} \Rightarrow (x, y) = t(2, -3) \ \ \forall t \in R - \{0\}$$

Dato che $\|(2, -3)\| = \sqrt{13}$, prendendo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{13}} = \pm\frac{\sqrt{13}}{13}$ otteniamo un auto**VERSORE**.

Per il Teorema 20.20, esiste una matrice ortogonale C con $\det C = 1$ che diagonalizza A. Le colonne di C sono autoversori di A. <u>Se scegliamo</u> $\mathbf{i'} = \frac{\sqrt{13}}{13}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ come primo autoversore (cioè scegliamo le sue componenti come prima colonna di C) è semplice vedere che il secondo autoversore (cioè quello relativo a $\lambda_2 = 0$) è <u>necessariamente</u> $\mathbf{j'} = \frac{\sqrt{13}}{13}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$.

Infatti, si vede subito che la matrice C che ha le loro componenti come colonne

$$C = \frac{\sqrt{13}}{13}\left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

è ortogonale con $\det C = 1$.

Posto $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della <u>**rotazione**</u> sono $X = CY$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$)

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 13(x')^2$$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -4x + 6y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,-4 \quad 6\,]\frac{\sqrt{13}}{13}\left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{13}}{13}[\,-4 \quad 6\,]\left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{array}\right] = \frac{\sqrt{13}}{13}[\,-26 \quad 0\,] = [\,-2\sqrt{13} \quad 0\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $-4x + 6y$

nel complesso $-2\sqrt{13}\,x'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **i’**, **j’**) la conica ha equazione

$$13(x')^2 - 2\sqrt{13}\,x' + 53 = 0$$

$$13\left(x' - \frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2 - 1 + 53 = 0$$

$$13\left(x' - \frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2 + 52 = 0$$

$$\left(x' - \frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2 + 4 = 0$$

Effettuando la <u>**traslazione**</u> $\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{\sqrt{13}}{13} \\ y'' = y' \end{cases}$ otteniamo l’equazione

$$(x'')^2 + 4 = 0$$

Poiché questa equazione non ha soluzioni reali, la conica **non ha alcun punto reale**.

Utilizzando i numeri complessi, indicata con i l’unità immaginaria (tale che $i^2 = -1$, ovvero $-i^2 = 1$) possiamo scrivere l’equazione $(x'')^2 + 4 = 0$ come segue

$$(x'')^2 - 4i^2 = 0$$

$$(x'')^2 - (2i)^2 = 0$$

$$(x'' - 2i)(x'' + 2i) = 0$$

Quindi, la conica è unione di due rette immaginarie coniugate non aventi punti (propri) in comune.

Per cui le possiamo pensare come ”parallele”.