7. Dipendenza ed indipendenza lineare.

7.1. Osservazione. In generale, $(\alpha*\mathbf{u}) \perp \mathbf{v} \neq \alpha*(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$. Infatti

$(\alpha*\mathbf{u}) \perp \mathbf{v} = \alpha*(\mathbf{u} \perp \mathbf{v}) \Leftrightarrow (\alpha*\mathbf{u}) \perp \mathbf{v} = (\alpha*\mathbf{u}) \perp (\alpha*\mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathbf{v} = \alpha*\mathbf{v} \Leftrightarrow 1*\mathbf{v} = \alpha*\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ vel $\alpha = 1$

7.2. Esempio. Si ha che $2\otimes[(1, 0,-2, 5) \oplus (2,-1, 0, 12)] = 2\otimes(3, -1,-2, 17) = (6, -2, -4, 34)$

Mentre $[2\otimes(1, 0,-2, 5)] \oplus (2,-1, 0, 12) = (2, 0, -4, 10) \oplus (2,-1, 0, 12) = (4, -1, -4, 22)$

Tenendo conto dell'osservazione 7.1 diamo la seguente

7.3. Definizione. Stabiliamo che, in mancanza di parentesi, l'operazione * sia prioritaria rispetto all'operazione $\perp$. Ovvero, stabiliamo che $\alpha*\mathbf{u} \perp \mathbf{v} := (\alpha*\mathbf{u}) \perp \mathbf{v}$.

7.4. Definizione. Indicato brevemente con V_R uno spazio vettoriale reale $(V, \perp, *)$, chiameremo *espressione vettoriale* in V_R una qualunque scrittura, che abbia senso, nella quale possono apparire:
- elementi di V (che si dicono vettori) e numeri reali (che si dicono scalari);
- operazioni $\perp$ tra vettori;
- operazioni $*$ tra scalari e vettori;
- operazioni di somma e prodotto tra numeri reali;
- parentesi e il segno di uguaglianza.

7.5. Osservazione. Le proprietà (G1), (G2), …, (G12) e (PS1), (PS2), …, (PS12) di uno spazio vettoriale reale ci permettono di "*manipolare*" un'espressione vettoriale in modo "*analogo*" ad un'espressione coi numeri reali, tenendo però conto che rispetto all'operazione $*$ **non** abbiamo il concetto di simmetrico di un vettore.

7.6. Definizione. Da ora scriveremo:
- $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ invece di $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ e parleremo di *somma di due vettori*;
- $\mathbf{0}$ invece di $\mathbf{h}$ e diremo che $\mathbf{0}$ è il *vettore nullo*;
- $-\mathbf{v}$ invece di $\underline{\mathbf{v}}$ e diremo che $-\mathbf{v}$ è l'*opposto del vettore* $\mathbf{v}$;
- $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ invece di $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ e parleremo di *differenza di due vettori*;
- $\alpha\mathbf{u}$ invece di $\alpha*\mathbf{u}$ e parleremo di *prodotto di uno scalare per un vettore*.
- $\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v}$ invece di $\alpha*\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ ricordando che $\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v} := (\alpha\mathbf{u})+\mathbf{v}$

7.7. Osservazione. Alcune delle proprietà viste possono essere riscritte così:

- $-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$
- $(-\alpha)\mathbf{u} = -(\alpha\mathbf{u})$
- $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ vel $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (legge di annullamento del prodotto)
- $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ (cancellabilità rispetto alla somma di vettori)
- $\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ et $\alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ (cancellabilità, rispetto al prodotto, di uno scalare non nullo)
- $\alpha\mathbf{u} = \beta\mathbf{u}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$ (cancellabilità, rispetto al prodotto, di un vettore non nullo)
- $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ (spostabilità rispetto alla somma di vettori)
- $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{v}$ et $\alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \alpha^{-1}\mathbf{v}$ (spostabilità di uno scalare rispetto al prodotto)

Si noti che, rispetto all'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore, **non è possibile** spostare un vettore attraverso il segno di uguaglianza (poiché non esiste il simmetrico del vettore).

7.8. Definizione. Siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$. Diremo *combinazione lineare* (brevemente C.L.) dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ a coefficienti rispettivamente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ l'espressione vettoriale seguente

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \ldots \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{u}_i$$

Se indichiamo con **v** il vettore di V_R risultato finale (**UNICO**) di tutte le operazioni precedenti, cioè

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \ldots \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

diremo che *il vettore* **v** *è una combinazione lineare dei vettori* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$.

Se $n = 1$, cioè $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ diremo anche che **v** è *multiplo* di **u** o, anche, che **v** è *proporzionale* a **u**.

7.9. Esempio. L'espressione vettoriale in R^4

$$2\otimes(1, 0,-2, 5) \oplus 0\otimes(2,-1, 0, 12) \oplus (-1)\otimes(4,-3, 4, 2)$$

è una combinazione lineare delle quaterne ordinate (1, 0,-2, 5), (2,-1, 0, 12) e (4,-3, 4, 2). Poiché

$$2\otimes(1, 0,-2, 5) \oplus 0\otimes(2,-1, 0, 12) \oplus (-1)\otimes(4,-3, 4, 2) = (-2, 3, -8, 8)$$

la quaterna (-2, 3, -8, 8) è combinazione lineare delle quaterne (1, 0,-2, 5), (2,-1, 0, 12) e (4,-3, 4, 2).

7.10 Osservazione. Per la legge di annullamento del prodotto ($\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha=0$ vel $\mathbf{u}=\mathbf{0}$) si ha che:

- il vettore nullo è multiplo di qualunque altro vettore, infatti $\forall \mathbf{u} \in V_R$ si ha che $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
- l'unico multiplo del vettore nullo è il vettore nullo stesso, infatti $\forall \alpha \in R$ si ha che $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

7.11. Osservazione. Se $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4 = \ldots = \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$, cioè gli n vettori sono tutti nulli, allora **ogni** loro combinazione lineare ha come risultato **sempre** il vettore nullo.

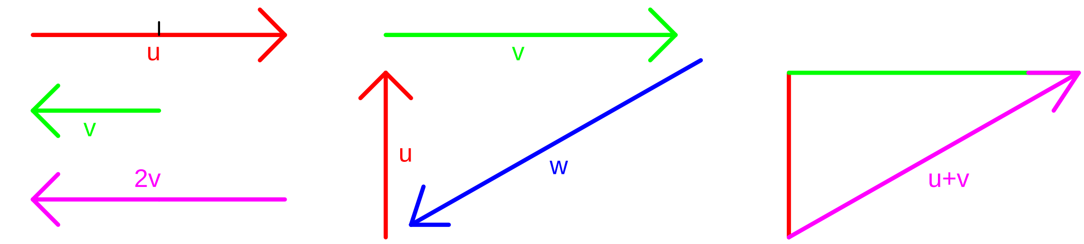
7.12. Osservazione. **Comunque** si scelgano n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$ si ha che

$$0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \ldots 0\mathbf{u}_{n-1} + 0\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Ovvero, comunque si scelgano n vettori, è sempre possibile esprimere il vettore nullo come una loro combinzione lineare in almeno un modo, infatti è sufficiente prendere i coefficienti tutti nulli.

La precedente condizione sufficiente non è, in generale, necessaria. Ovvero, esistono combinazioni lineari a coefficienti non tutti nulli che hanno come risultato il vettore nullo.

7.13. Esempio.



1u + 2v = u + 2v = u + (-u) = 0 1u + 1v + 1w = (u+v) + w = (-w) + w = 0

7.14. Esempio. Date le seguenti terne ordinate di numeri reali (1, 0,-2), (2,-1, 0) e (4,-3, 4) è facile verificare che $(-2)\otimes(1, 0,-2) \oplus 3\otimes(2,-1, 0) \oplus (-1)\otimes(4,-3, 4) = (0, 0, 0)$.

Tenendo conto dell'osservazione 7.8 possiamo dare la seguente

7.15. Definizione. Diremo che n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$ sono *linearmente dipendenti* (L. D.), se è possibile esprimere il vettore nullo **0** come una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli. Altrimenti diremo che sono *linearmente indipendenti* (L. I.).

Tenendo conto dell'Osservazione 7.12 si ha subito che

7.16. Osservazione. n vettori sono linearmente indipendenti se e **solo se** l'unico modo per esprimere il vettore nullo come loro combinazione lineare è quello a coefficienti tutti nulli.

7.17. Osservazione. Per la legge di annullamento del prodotto ($\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha=0$ vel $\mathbf{u}=\mathbf{0}$) si ha che

- il vettore nullo è linearmente dipendente, infatti $\forall\alpha\in R$ si ha che $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- ogni vettore non nullo è linearmente indipendente, infatti $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ et $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ se solo se $\alpha = 0$.

7.18. Teorema. Se i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ di V_R sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano altri p vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$ di V_R si ha che gli (n + p) vettori sono ancora linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Per ipotesi esistono n scalari α_j non tutti nulli tali che

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \ldots \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

La combinazione lineare seguente:

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \ldots \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n + 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \ldots 0\mathbf{v}_{p-1} + 0\mathbf{v}_p$$

è una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli (almeno uno degli α_j è non nullo) il cui risultato è **sicuramente** il vettore nullo **0**. Quindi, gli (n + p) vettori sono linearmente dipendenti. ■

7.19. Corollario. Se A è un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme B di A è a sua volta un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione (per assurdo). Se B fosse un insieme di vettori dipendenti, allora (per il Teorema 7.18) anche A sarebbe un insieme di vettori dipendenti, contro l'ipotesi. ■

7.20. TEOREMA (*caratterizzazione della lineare dipendenza*). I vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se (almeno) uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$) Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L. Dip., allora esiste una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli che è uguale al vettore nullo, cioè $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \ldots \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che sia $\alpha_1 \neq 0$. Si ha $\mathbf{u}_1 = \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 + \ldots \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \beta_n\mathbf{u}_n$ con $\beta_i = (-\alpha_i / \alpha_1)\ \forall i \in [2, n]$. Quindi, $\mathbf{u}_1$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$.

$\Leftarrow$) Se uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti allora supponiamo che questo sia $\mathbf{u}_1$.

Da $\mathbf{u}_1 = \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 + \ldots \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \beta_n\mathbf{u}_n$ si ha che $(-1)\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 + \ldots \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \beta_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

Poichè, esiste una C.L. a coefficienti non tutti nulli ($-1 \neq 0$) degli n vettori che ha come risultato il vettore nullo si ha che essi sono L. Dip. ■

7.21. Corollario. Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno dei due si può scrivere come multiplo dell'altro (ovvero almeno uno dei due è proporzionale all'altro).

8. Dipendenza ed indipendenza lineare: il caso dei vettori liberi.

Dall'osservazione 7.17 si ha che:

- il vettore <u>libero</u> nullo è linearmente dipendente;
- ogni vettore <u>libero</u> diverso dal vettore <u>libero</u> nullo è linearmente indipendente.

8.1. Definizione. Diremo che due *vettori liberi* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono *paralleli*, e scriveremo $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, se sono paralleli tra loro un rappresentante di $\vec{u}$ e un rappresentante di $\vec{v}$.

8.2. Lemma. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono due vettori liberi non nulli e paralleli tra loro, allora <u>**ognuno**</u> dei due si può scrivere come multiplo dell'altro.

Dimostrazione. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$. Sia $\alpha := \|\vec{u}\|/\|\vec{v}\| \neq 0$. Tenendo conto di come è stata definita l'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore libero si ha che:

$\vec{u} = \alpha * \vec{v}$ et $\vec{v} = (\alpha^{-1}) * \vec{u}$ se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno lo stesso verso;

$\vec{u} = (-\alpha) * \vec{v}$ et $\vec{v} = (-\alpha^{-1}) * \vec{u}$ se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno verso opposto. ■

8.3. Lemma. Due vettori liberi sono paralleli se e solo se <u>almeno</u> uno dei due si può scrivere come multiplo dell'altro.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Ovvia, tenendo conto di come è stata definita l'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore libero.

($\Rightarrow$) Se almeno uno dei due vettori è il vettore nullo allora la tesi è vera per l'osservazione 7.10. Se i due vettori sono non nulli la tesi è conseguenza del lemma 8.2. ■

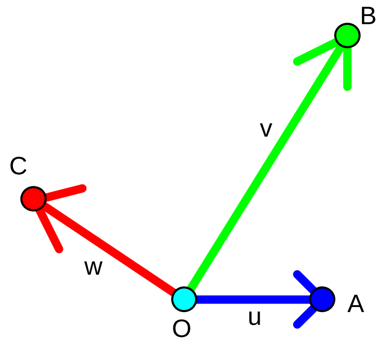
Dal Lemma 8.3 e dal Corollario 7.21 segue subito il seguente:

8.4. Teorema. **Due** vettori <u>**liberi**</u> sono linearmente **dipendenti** se e solo se sono **paralleli**.

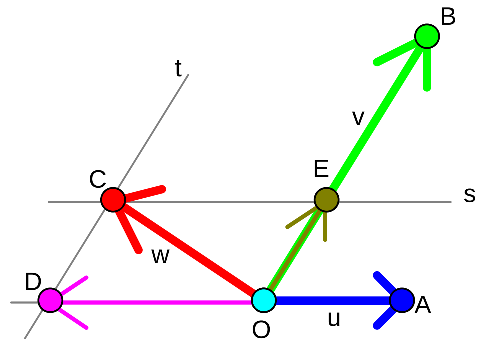
8.5. Definizione. Diremo che tre *vettori liberi* sono *complanari* se sono complanari tre loro rappresentanti applicati in uno stesso punto.

8.6. Lemma. Comunque scelti tre vettori liberi complanari a due a due non paralleli, ognuno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti (e quindi i tre vettori sono L.Dip.).

Dimostrazione. (Indichiamo con r_{AB} la retta passante per due punti distinti A e B). Si scelga, a piacere, un punto O dello spazio. Siano (OA), (OB) e (OC) gli unici rappresentanti applicati in O dei vettori liberi di $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rispettivamente. Poichè, per ipotesi, i tre vettori liberi sono complanari esiste un unico piano π contenente i quattro punti O, A, B e C. Inoltre, siccome i tre vettori sono a due a due non paralleli, si ha che mai sono allineati tre dei quattro punti O, A, B e C.



Sia t la retta di π per C parallela a (OB) e sia $D = t \cap r_{OA}$. Ovviamente, $D \neq O$ (se fosse $D = O$ si avrebbe $t = r_{OB}$ e, quindi, $C \in r_{OB}$ contro l'ipotesi "mai tre allineati). $D \in r_{OA}$ implica (OD)//(OA) e, quindi, $[(OD)]_{\approx}//[(OA)]_{\approx}$. Essendo entrambi non nulli esiste $\alpha \neq 0$ tale che $[(OD)]_{\approx} = \alpha*[(OA)]_{\approx}$.
Sia s la retta di π per C parallela a r_{OA} e sia $E = s \cap r_{OB}$. Ovviamente, $E \neq O$ (se fosse $E = O$ si avrebbe $s = r_{OA}$ e, quindi, $C \in r_{OA}$ contro l'ipotesi "mai tre allineati). $E \in r_{OB}$ implica (OE)//(OB) e, quindi, $[(OE)]_{\approx}//[(OB)]_{\approx}$. Essendo entrambi non nulli esiste $\beta \neq 0$ tale che $[(OE)]_{\approx} = \beta*[(OB)]_{\approx}$.



La figura ODCE è un parallelogrammo. Quindi, (OE)≈(DC) da cui $[(OE)]_{\approx}$.= $[(DC)]_{\approx}$. Si ha

$(\alpha*\vec{u})[+](\beta*\vec{v}) = (\alpha*[(OA)]_{\approx})[+](\beta*[(OB)]_{\approx}) = [(OD)]_{\approx}[+][(OE)]_{\approx} = [(OD)]_{\approx}[+][(DC)]_{\approx} = [(OC)]_{\approx} = \vec{w}$

Poiché $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ è anche $\vec{u} = ((\alpha^{-1})*\vec{w})[+]((-\beta\alpha^{-1})*\vec{v})$ et $\vec{v} = ((\beta^{-1})*\vec{w})[+]((-\alpha\beta^{-1})*\vec{u})$. ■

8.7. Teorema. **Tre** vettori **liberi** sono linearmente **dipendenti** se e solo se sono **complanari**.

Dimostrazione. (Indichiamo con r_{AB} la retta passante per due punti distinti A e B).

Se due dei tre vettori sono L.D., allora quei due vettori sono paralleli e, quindi, i tre vettori sono complanari. Viceversa, se due dei tre vettori sono paralleli, allora quei due vettori sono L.D. e, quindi, i tre vettori sono L.D..

Supponiamo, ora, che mai due di essi siano L.D., ovvero che mai due di essi siano paralleli.

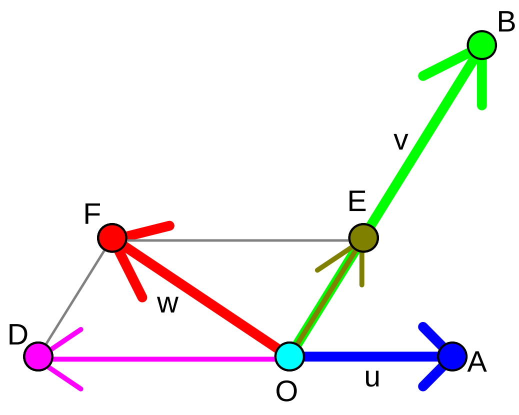
$\Leftarrow$) è la dimostrazione del Lemma 8.6.

$\Rightarrow$) Si scelga, a piacere, un punto O dello spazio. Siano (OA), (OB) e (OC) gli unici rappresentanti applicati in O dei vettori liberi di $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rispettivamente. Poiché, per ipotesi, i tre vettori sono L.D., almeno uno di essi si può scrivere come C.L. degli altri due. Se supponiamo che sia $\vec{w} = (\alpha * \vec{u})[+](\beta * \vec{v})$ allora chiamiamo π il piano individuato dai tre punti non allineati O, A e B.

Per avere la tesi dobbiamo provare che $C \in \pi$.

Nello spazio esiste ed è unico un punto D tale che il segmento (OD) sia il rappresentante di $\alpha * \vec{u}$ applicato in O. Quindi, $\alpha * \vec{u} = [(OD)]_{\approx}$. Poiché $(\alpha * \vec{u}) // \vec{u}$ si ha che $D \in r_{OA}$ e, quindi, $D \in \pi$.

Nello spazio esiste ed è unico un punto E tale che il segmento (OE) sia il rappresentante di $\beta * \vec{v}$ applicato in O. Quindi, $\beta * \vec{v} = [(OE)]_{\approx}$. Poiché $(\beta * \vec{v}) // \vec{v}$ si ha che $E \in r_{OB}$ e, quindi, $E \in \pi$.

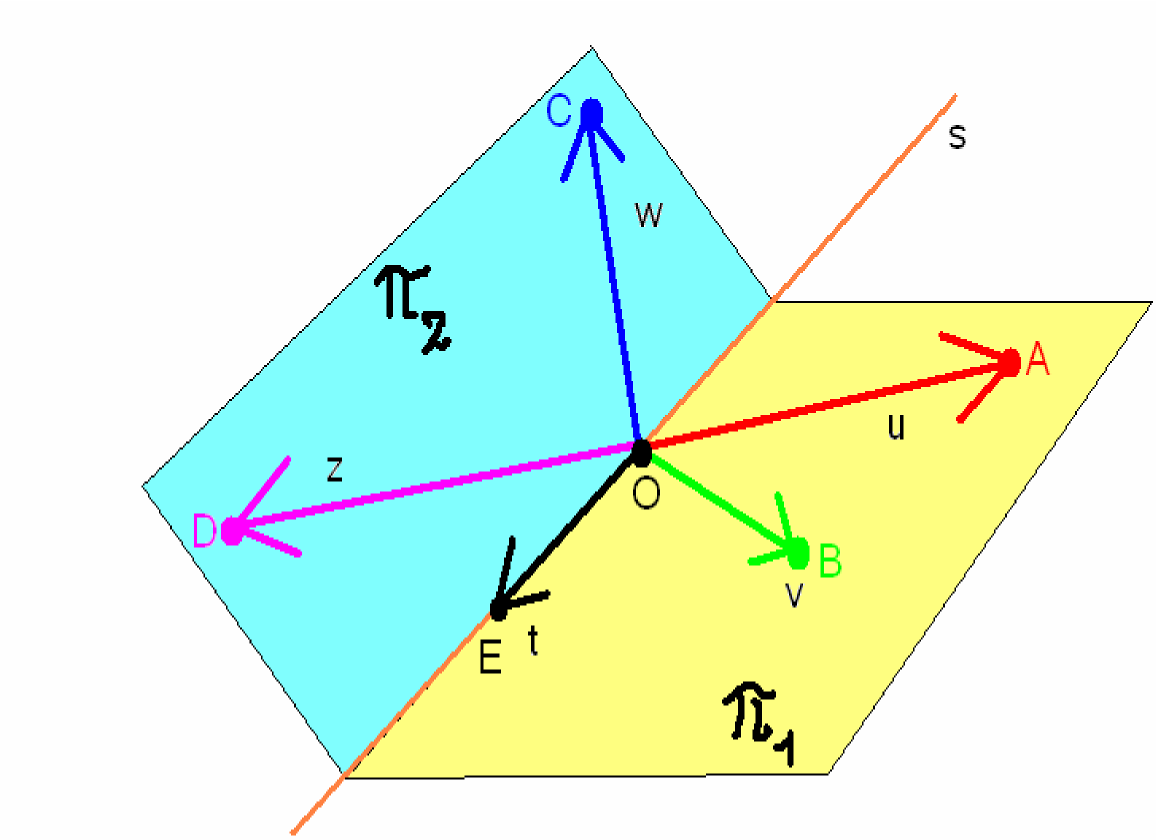


Sia $F \in \pi$ tale che ODFE è un parallelogrammo. Ovviamente, $(OE) \approx (DF)$ per cui $[(OE)]_{\approx} = [(DF)]_{\approx}$.

Da $[(OC)]_{\approx} = \vec{w} = (\alpha * \vec{u})[+](\beta * \vec{v}) = [(OD)]_{\approx}[+][(OE)]_{\approx} = [(OD)]_{\approx}[+][(DF)]_{\approx} = [(OF)]_{\approx}$ si ha che $[(OC)]_{\approx} = [(OF)]_{\approx}$ da cui C = F. Quindi, $C \in \pi$. ■

8.8. Lemma. Comunque scelti quattro vettori liberi a tre a tre non complanari, ognuno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione. Si scelga, a piacere, un punto O dello spazio. Siano (OA), (OB), (OC) e (OD) gli unici rappresentanti applicati in O dei vettori liberi di $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ rispettivamente. Sia π_1 il piano individuato dai tre punti non allineati O, A e B. Sia π_2 il piano individuato dai tre punti non allineati O, C e D. I piani π_1 e π_2 hanno in comune il punto O ma sono distinti (se fossero lo stesso piano si avrebbe che i cinque punti O, A, B, C e D sarebbero complanari e, quindi, anche i quattro vettori liberi sarebbero complanari). Sia s la retta per O tale che $s = \pi_1 \cap \pi_2$. Sulla retta s si scelga, a piacere, un punto E diverso da O. Sia $\vec{t}$ il vettore libero individuato da (OE), cioè $\vec{t} = [(OE)]_{\approx}$.



I tre vettori $\vec{w}$, $\vec{z}$ e $\vec{t}$ sono complanari e a due a due non paralleli. Quindi, (per il Lemma 8.6) esistono due scalari α e β non nulli tali che $\vec{z} = (\alpha * \vec{t})[+](\beta * \vec{w})$. I tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t}$ sono complanari e a due a due non paralleli. Quindi, (per il Lemma 8.6) esistono due scalari γ e δ non nulli tali che $\vec{t} = (\gamma * \vec{u})[+](\delta * \vec{v})$. Si ha

$$\vec{z} = (\alpha * \vec{t})[+](\beta * \vec{w}) = \alpha * ((\gamma * \vec{u})[+](\delta * \vec{v}))[+](\beta * \vec{w}) = ((\alpha\gamma) * \vec{u})[+]((\alpha\delta) * \vec{v})[+](\beta * \vec{w}).$$

Posto $\varepsilon := \alpha\gamma \neq 0$, $\omega := \alpha\delta \neq 0$ si ha che $\vec{z} = (\varepsilon * \vec{u})[+](\omega * \vec{v})[+](\beta * \vec{w})$ o, più brevemente che

$$\vec{z} = \varepsilon\,\vec{u} + \omega\,\vec{v} + \beta\,\vec{w}$$

cioè che $\vec{z}$ è combinazione lineare di $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Poiché nell'ultima espressione i coefficienti sono tutti non nulli si può esprimere ognuno dei quattro vettori come combinazione lineare dei rimanenti. ■

8.9. Teorema. **Quattro, o più**, vettori **liberi** sono **sempre** linearmente **dipendenti**.

Dimostrazione. Se tre dei quattro vettori sono L.D., allora i quattro vettori sono L.D.. Se i quattro vettori sono a tre a tre linearmente indipendenti, allora i quattro vettori sono a tre a tre non complanari. Per il lemma precedente ognuno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti. Quindi, i quattro vettori sono linearmente dipendenti. Dati $n \geq 5$ vettori liberi, allora comunque se ne prendano quattro essi sono L.D.. Quindi, anche gli n vettori sono L.D.. ■

8.10. Osservazione. Il teorema precedente è conseguenza, oltre che del fatto che (V, [+], *) è uno spazio vettoriale reale, anche delle "peculiarità" geometriche dei vettori liberi. Per cui una proprietà analoga non vale per ogni spazio vettoriale reale.

8.11. Esempio. Le quaterne (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) e (0,0,0,1) sono linearmente indipendenti. Infatti, si ha che $\alpha*(1,0,0,0)[+]\beta*(0,1,0,0)[+]\gamma*(0,0,1,0)[+]\delta*(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$ se e solo se $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (0,0,0,0)$ ovvero se e solo se $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

9. Sottospazi.

9.1. Definizione. Sia $f : X \to Y$ una funzione dall'insieme X all'insieme Y. Per ogni sottoinsieme S di X la nuova funzione $f_S : S \to Y$ dall'insieme S all'insieme Y definita nel modo seguente:

$$\forall x \in S \quad f_S(x) := f(x) \in Y.$$

viene detta *restrizione di f a S*.

9.2. Osservazione. Sia $\perp$ un'operazione binaria ovunque definita ed interna ad un insieme A, cioè una funzione $\perp : A\times A \to A$. Sia $I \subseteq A$. Quindi, $I\times I \subseteq A\times A$. La restrizione di $\perp$ a $I\times I$

$$\perp_{I\times I} : I\times I \to A$$

è un'operazione ovunque definita in I a valori in A, cioè $\perp_{I\times I}(I\times I) \subseteq A$.

Tenendo conto dell'osservazione precedente diamo la seguente:

9.3. Definizione. Sia $\perp$ un'operazione binaria ovunque definita ed interna ad un insieme A. Sia $I \subseteq A$. Se la restrizione di $\perp$ a $I\times I$ è a valori in I, cioè $\perp_{I\times I}(I\times I) \subseteq I$ allora diremo che il sottoinsieme I è *chiuso rispetto all'operazione* $\perp$.

In altre parole, I è chiuso rispetto all'operazione $\perp$ se e solo se comunque presi due elementi x e y in I si ha che il risultato dell'operazione $x\perp y$ è ancora un elemento di I.

9.4. Esempio. Sia N l'insieme dei numeri naturali e sia + l'operazione di somma di due numeri naturali. Siano P e D rispettivamente il sottoinsieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari. Si ha che P è chiuso rispetto a + mentre D non lo è. Infatti, la somma di due numeri pari è ancora un numero pari, mentre la somma di due numeri dispari non è un numero dispari. Invece, sia P che D sono chiusi rispetto all'operazione di prodotto di due numeri naturali.

9.5. Esempio. Sia $I = [0, 1] = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Comunque presi x_1 e x_2 in I si ha che $0 \leq x_1 x_2 \leq 1$ e, quindi, l'insieme I è chiuso rispetto al prodotto di due numeri reali. Invece, l'insieme I non è chiuso rispetto alla somma di due numeri reali. Infatti, se $x_1 = 0{,}6$ e $x_2 = 0{,}7$ allora $x_1 + x_2 = 1{,}3 \notin I$.

9.6. Osservazione. Sia * un'operazione ovunque definita nell'insieme $B\times A$ a valori in A, cioè una funzione $* : B\times A \to A$. Sia $I \subseteq A$. Quindi, $B\times I \subseteq B\times A$. La restrizione dell'operazione * a $B\times I$ cioè

$$\perp_{B\times I} : B\times I \to A$$

è un'operazione ovunque definita in $B\times I$ a valori in A, cioè $\perp_{B\times I}(B\times I) \subseteq A$.

Tenendo conto dell'osservazione precedente diamo la seguente:

9.7. Definizione. Sia * un'operazione ovunque definita nell'insieme $B\times A$ a valori in A. Sia $I \subseteq A$. Se la restrizione di * a $B\times I$ è a valori in I, cioè $\perp_{B\times I}(B\times I) \subseteq I$ allora diremo che il sottoinsieme I è *chiuso rispetto all'operazione **.

In altre parole, I è chiuso rispetto all'operazione * se e solo se comunque presi un numero reale α e un elemento x di I si ha che il risultato dell'operazione $\alpha * x$ è ancora un elemento di I.

9.8. Definizione. Sia $(V, +, *)$ uno spazio vettoriale e $U \subseteq V$. Diremo che U è *sottospazio* di V, e scriveremo $U \leq V$, se la terna $(U, +_{U\times U}, *_{R\times U})$ è uno spazio vettoriale reale.

9.9. Teorema. (*caratterizzazione di un sottospazio*). Sia U un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale V_R . U è un sottospazio di V se e solo se valgono le tre condizioni:

(1) U è non vuoto;

(2) U è chiuso rispetto alla somma + tra due vettori (cioè $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in U \quad \mathbf{u}+\mathbf{v}\in U$);

(3) U è chiuso rispetto al prodotto * di uno scalare per un vettore (cioè $\forall \alpha\in R , \forall \mathbf{u}\in U \quad \alpha\mathbf{u}\in U$).

Dimostrazione. E' ovvio che le tre condizioni siano necessarie. Proviamo che sono sufficienti. Supponiamo, quindi, che U sia un sottoinsieme di V per il quale valgano le proprietà (1), (2) e (3). Se indichiamo brevemente con $+_U$ la restrizione a U dell'operazione della somma di due vettori in V, allora per $+_U$ valgono ovviamente le proprietà associativa (G1) e commutativa (G4). Per la (1) esiste almeno un vettore $\mathbf{u}\in U$. Se prendiamo il numero reale zero, per la (3), abbiamo che $0\mathbf{u}\in U$. Ma $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Quindi, $\mathbf{0}\in U$. Per cui vale la proprietà dell'esistenza dell'elemento neutro (G2). Inoltre, per ogni $\mathbf{u}\in U$ preso il numero reale (-1), per la (3), abbiamo che $(-1)\mathbf{u}\in U$. Ma $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Quindi, $-\mathbf{u}\in U$. Per cui vale anche la (G3). Quindi, la coppia $(U, +_U)$ è un gruppo abeliano.

Se indichiamo brevemente con $*_U$ la restrizione a U dell'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore di V, allora per $*_U$ valgono ovviamente le proprietà (PS1), (PS2), (PS3) e (PS4).

Abbiamo così che $(U, +_U , *_U)$ è uno spazio vettoriale reale. ■

9.10. Esempio. Consideriamo lo spazio vettoriale ($\Im_R(R)$, ✚, ✖) delle funzioni reali di variabile reale definite in tutto R. Se con R[x] indichiamo l'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali, allora è $\emptyset \neq R[x] \subseteq \Im_R(R)$. Poiché la somma ✚ di due polinomi è ancora un polinomio e il prodotto ✖ di un numero reale per un polinomio è ancora un polinomio, si ha che R[x] è chiuso rispetto alla somma ✚ e rispetto al prodotto ✖. Quindi, $R[x] \leq \Im_R(R)$.

9.11. Esempio. Sia A l'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado <u>esattamente uguale a</u> $n \geq 1$. Si vede subito che A <u>non</u> è chiuso rispetto all'operazione di somma di due polinomi. Infatti, presi i polinomi $p(x) = (2x^n + 1) \in A$ e $q(x) = (-2x^n + 2) \in A$ si ha che $p(x)+q(x) = 3 \notin A$.

9.12. Esempio. Con $R_n[x]$ indichiamo l'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali di grado $\leq n$. Si ha che $\emptyset \neq R_n[x] \subseteq R[x]$. Poiché sia la somma di due polinomi di grado $\leq n$ che il prodotto di uno scalare per un polinomio di grado $\leq n$ sono ancora polinomi di grado $\leq n$ si ha che $R_n[x] \leq R[x]$.

9.13. Esempio. Consideriamo lo spazio vettoriale (R^3, $\oplus$, $\otimes$) delle terne ordinate di numeri reali. L'insieme non vuoto $B = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = 0\} = \{(x, y, 0) \in R^3\}$ è chiuso sia rispetto a $\oplus$ che a $\otimes$. Infatti, si ha che $(a, b, 0) \oplus (c, d, 0) = (a+c, b+d, 0)$ e che $\alpha \otimes (a, b, 0) = (\alpha a, \alpha b, 0)$. Quindi, $B \leq R^3$.

9.14. Esempio. Consideriamo lo spazio vettoriale (R^3, $\oplus$, $\otimes$) delle terne ordinate di numeri reali. L'insieme non vuoto $C = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = 1\} = \{(x, y, 1) \in R^3\}$ <u>non</u> è chiuso rispetto a $\oplus$. Infatti, prese due terne (a, b, 1) e (c, d, 1) si ha che $(a, b, 1) \oplus (c, d, 1) = (a+c, b+d, 2) \notin C$.

9.15 Esempio. Consideriamo lo spazio vettoriale (R^4, $\oplus$, $\otimes$) delle quaterne ordinate di numeri reali. L'insieme non vuoto $D = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid w = 3x, z = x+y\} = \{(3x, x, y, x+y) \in R^4\}$ è chiuso sia rispetto a $\otimes$ che a $\oplus$. Infatti, si ha che

$(3a, a, b, a+b) \oplus (3c, c, d, c+d) = (3a°+3c, a+c, b+d, a+b+c+d) = (3(a+c), a+c, b+d, (a+c)+(b+d))$

e che $\alpha \otimes (3a, a, b, a+b) = (\alpha 3a, \alpha a, \alpha b, \alpha(a+b)) = (3(\alpha a), \alpha a, \alpha b, (\alpha a)+(\alpha b))$. Quindi, $D \leq R^4$.

9.16. Osservazioni. E' facile verificare che:

9.16.1. $\{\mathbf{0}\} \leq V$ ($\{\mathbf{0}\}$ viene detto *spazio nullo*)

9.16.2. $V \leq V$

9.16.3. $U \leq T$ et $T \leq V \Rightarrow U \leq V$

9.16.4. $U \leq V$ et $T \leq V$ et $U \subseteq T \Rightarrow U \leq T$

9.17. Definizione. Dati n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ di V_R, col simbolo $<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n>$ indicheremo il sottoinsieme di V_R contenente tutti e soli i vettori che si possono esprimere come una combinazione lineare degli n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$.

9.18. Osservazione. Se $\mathbf{v} \in <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n>$ allora $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L.Dip.

9.19. Teorema. Comunque presi n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ di V_R, l'insieme

$$<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n>$$

è un <u>sottospazio</u> di V_R.

Dimostrazione.

(1) Ovviamente, $U := <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n> \neq \emptyset$.

(2) Proviamo che U è chiuso rispetto a +, cioè che $\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in U$ si ha che $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in U$.

$\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$

$\mathbf{w} \in U \Rightarrow \mathbf{w} = \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n$

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n) + (\beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n)$

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1\mathbf{u}_1+\beta_1\mathbf{u}_1) + (\alpha_2\mathbf{u}_2+\beta_2\mathbf{u}_2) + (\alpha_3\mathbf{u}_3+\beta_3\mathbf{u}_3) + \ldots + (\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}) + (\alpha_n\mathbf{u}_n+\beta_n\mathbf{u}_n)$

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \gamma_1\mathbf{u}_1+\gamma_2\mathbf{u}_2+\gamma_3\mathbf{u}_3+\ldots+\gamma_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\gamma_n\mathbf{u}_n \Rightarrow (\mathbf{v}+\mathbf{w}) \in U$.

(3) Proviamo che U è chiuso rispetto a *, cioè che $\forall \mathbf{v} \in U$ e $\forall \delta \in R$ si ha che $(\delta\mathbf{v}) \in U$.

$\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$

$\delta\mathbf{v} = \delta(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n) = (\delta\alpha_1)\mathbf{u}_1+(\delta\alpha_2)\mathbf{u}_2+(\delta\alpha_3)\mathbf{u}_3+\ldots+(\delta\alpha_{n-1})\mathbf{u}_{n-1}+(\delta\alpha_n)\mathbf{u}_n$

$\delta\mathbf{v} = \omega_1\mathbf{u}_1+\omega\gamma_2\mathbf{u}_2+\omega_3\mathbf{u}_3+\ldots+\omega_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\omega_n\mathbf{u}_n \Rightarrow (\delta\mathbf{v}) \in U$. ■

9.20. Definizione. Dati n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ di V_R, il sottospazio

$$U = <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n>$$

si dice *(sotto) spazio generato* dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ (che vengono detti *generatori* di U).

9.21. Definizione. Diremo che uno spazio vettoriale reale V_R è *finitamente generato* se esiste un insieme <u>finito</u> $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ di vettori di V_R tali che $V_R = <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n>$.
In tal caso diremo anche che l'insieme B *genera* lo spazio V_R e scriveremo $V_R = <B>$.

9.22. Teorema. Se $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \leq V_R$ e $T = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \leq V_R$, allora

(1) $U \subseteq T$ e, quindi, $U \leq T$ (per l'Osservazione 9.16.4)

(2) $U = T \iff \mathbf{v} \in U$

Dimostrazione.

(1) Preso $\mathbf{w} \in U$ si ha che $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$.

Ovviamente, è anche $\mathbf{w} = 0\mathbf{v}+\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$. Quindi, $\mathbf{w} \in T$.

($2\Rightarrow$) $\mathbf{v} \in T$ et $T = U \Rightarrow \mathbf{v} \in U$.

($2\Leftarrow$) Per ipotesi $\mathbf{v} \in U$, cioè $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$.

Poiché per la (1) è già $U \subseteq T$, resta da provare che $T \subseteq U$.

Sia $\mathbf{w} \in T$. Quindi, $\mathbf{w} = \omega\mathbf{v} + \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n$.

$\mathbf{w} = \omega(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n) + \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n$.

$\mathbf{w} = (\omega\alpha_1+\beta_1)\mathbf{u}_1+(\omega\alpha_2+\beta_2)\mathbf{u}_2+(\omega\alpha_3+\beta_3)\mathbf{u}_3+ \quad +(\omega\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1}+(\omega\alpha_n+\beta_n)\mathbf{u}_n$

$\mathbf{w} = \delta_1\mathbf{u}_1+\delta_2\mathbf{u}_2+\delta_3\mathbf{u}_3+ \quad +\delta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\delta_n\mathbf{u}_n$. Quindi, $\mathbf{w} \in U$. ■

9.23. Corollario. Sia V_R uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se B è un suo insieme <u>minimale</u> di generatori, allora i vettori di B sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Sia $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ un insieme <u>minimale</u> di generatori. Se i vettori di B fossero linearmente dipendenti allora almeno uno di essi si potrebbe scrivere come combinazione lineare dei rimanenti. Supponendo che sia $\mathbf{u}_1 = \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n$ si avrebbe che $\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$. Per il Teorema 9.22 si avrebbe che

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V_R$$

Quindi, anche il sottoinsieme $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ di B sarebbe un insieme di generatori di V_R contro l'ipotesi che B fosse minimale. ■

9.24. Teorema. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$ e $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$. Si ha che

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L. Indip. et $\mathbf{v} \notin U$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L. Indip.

Dimostrazione.

($\Leftarrow$) Ovvia tenendo conto del corollario 7.19 e dell'osservazione 9.18.

($\Rightarrow$) Dobbiamo provare che l'unica combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ che ha come risultato il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Cioè, dobbiamo provare che se si ha

$$\omega\mathbf{v} + \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad (\#)$$

allora necessariamente sono nulli sia il coefficiente ω che tutti i coefficienti β_i .

Se fosse $\omega \neq 0$, allora $\mathbf{v} = (-\omega^{-1}\beta_1)\mathbf{u}_1+(-\omega^{-1}\beta_2)\mathbf{u}_2+(-\omega^{-1}\beta_3)\mathbf{u}_3+ \ldots +(-\omega^{-1}\beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1}+(-\omega^{-1}\beta_n)\mathbf{u}_n$ e, quindi, $\mathbf{v} \in U$ contro l'ipotesi $\mathbf{v} \notin U$. Per cui è $\omega = 0$. Sostituendo $\omega = 0$ in (#) si ottiene

$$\beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Essendo, per ipotesi, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ L. Indip. si ha che tutti i coefficienti β_i sono nulli. ■

9.25. Corollario. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$ e $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$.

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L. Indip. mentre $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L. Dip. allora $\mathbf{v} \in U$.

9.26. Corollario. Sia V_R uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se B è un suo insieme <u>massimale</u> di vettori linearmente indipendenti, allora i vettori di B sono generatori dello spazio.

Dimostrazione. Sia $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ un insieme <u>massimale</u> di vettori linearmente indipendenti. Essendo B massimale, per ogni vettore $\mathbf{v}$ di V_R si ha che $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono linearmente dipendenti. Per il Corollario 9.25 è $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle B \rangle$. Quindi, i vettori di B sono generatori dello spazio. ■

9.27. Definizione. Sia U := <$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …,$\mathbf{u}_j$, …, $\mathbf{u}_k$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$>.

Diremo *operazioni elementari sui generatori* di U le seguenti azioni:

(O.E.1) scambiare due generatori $\mathbf{u}_j$ e $\mathbf{u}_k$ tra loro;

(O.E.2) sostituire un generatore $\mathbf{u}_j$ con il vettore $\gamma\mathbf{u}_j$ $\forall\gamma\in R-\{0\}$;

(O.E.3) sostituire un generatore $\mathbf{u}_j$ con il vettore $\mathbf{u}_j+\beta\mathbf{u}_k$ $\forall\beta\in R$ et $k\neq j$.

9.28. Osservazione. U è invariante rispetto all'operazione (O.E.1) di scambio di due generatori. Infatti, per la commutatività della somma si ha che <$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …,$\mathbf{u}_k$, …, $\mathbf{u}_j$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$> = U.

9.29. Lemma. Siano T = <**t**, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$> e W = <**w**, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$>

$$T = W \iff \mathbf{w}\in T \text{ et } \mathbf{t}\in W$$

Dimostrazione. Sia Y = <**t**, **w**, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$>.

($\Rightarrow$) $\mathbf{t}\in T = W$ et $\mathbf{w}\in W = T \Rightarrow \mathbf{t}\in W$ et $\mathbf{w}\in T$;

($\Leftarrow$) $\mathbf{w}\in T$ et $\mathbf{t}\in W \Rightarrow T = Y$ et $W = Y \Rightarrow T = W$. ■

9.30. Teorema. Lo spazio <$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$> è invariante rispetto alle O.E. sui generatori.

Dimostrazione. Sia U = <$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$>.

(O.E.1) Già visto nell'Osservazione 9.28.

Tenendo conto della proprietà (O.E.1), possiamo provare la (O.E.2) e la (O.E.3) con j = 1.

(O.E.2) Sia T = <$\gamma\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$> con $\gamma\neq 0$

$(\gamma\mathbf{u}_1)\in T \Rightarrow \mathbf{u}_1= (\gamma^{-1})(\gamma\mathbf{u}_1)\in T$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{u}_1\in U \Rightarrow (\gamma\mathbf{u}_1)\in U$

$\mathbf{u}_1\in T$ et $(\gamma\mathbf{u}_1)\in U \Rightarrow T = U$ (per il Lemma 9.29)

(O.E.3) Sia T = <$\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_k$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$> con $k\neq 1$.

$(\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_k\in T \Rightarrow (\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_k), (-\beta)\mathbf{u}_k\in T \Rightarrow [(\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_k) + (-\beta)\mathbf{u}_k]\in T \Rightarrow \mathbf{u}_1\in T$

$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_k\in U \Rightarrow \mathbf{u}_1$, $\beta\mathbf{u}_k\in U \Rightarrow (\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_k)\in U$

$\mathbf{u}_1\in T$ et $(\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_k)\in U \Rightarrow T = U$ (per il Lemma 9.29) ■

9.31. Corollario Se i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$ sono stati ottenuti effettuando un numero <u>finito</u> di operazioni elementari sui generatori dello spazio <$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$>, allora si ha che

$$<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n> = <\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n>.$$

10. Basi e dimensione di uno spazio vettoriale.

10.1. Lemma. Sia V_R uno spazio vettoriale reale finitamente generato.

Se A = $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ è un insieme di generatori di V_R e B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p\}$ è un insieme di vettori di V_R linearmente indipendenti, allora $p \leq n$.

Ovvero, **la cardinalità di un qualunque insieme di generatori è sempre maggiore o uguale della cardinalità di un insieme di vettori linearmente indipendenti**.

Dimostrazione. Passo 1) $\mathbf{v}_1 \in V_R = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\mathbf{u}_i$

$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists i \in [1, n] : \alpha_{1i} \neq 0$. Supponiamo che sia i = 1 (cioè $\alpha_{11} \neq 0$) e poniamo $x_1 := \alpha_{11}^{-1}$

$\mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} (-x_1\alpha_{1i})\mathbf{u}_i \Rightarrow \mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

$\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ et $\mathbf{v}_1 \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V_R \Rightarrow V_R = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

Passo 2) $\mathbf{v}_2 \in V_R = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \beta_{11}\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{2i}\mathbf{u}_i$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ L.I. $\Rightarrow \exists i \in [2, n] : \alpha_{2i} \neq 0$. Supponiamo che sia i = 2 (cioè $\alpha_{22} \neq 0$) e poniamo $x_2 := \alpha_{22}^{-1}$

$\mathbf{u}_2 = (-x_2\beta_{11})\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \sum_{i=3}^{n} (-x_2\alpha_{2i})\mathbf{u}_i \Rightarrow \mathbf{u}_2 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

$\mathbf{u}_2 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ et $\mathbf{v}_2 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V_R \Rightarrow V_R = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

Passo 3) $\mathbf{v}_3 \in V_R = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \beta_{21}\mathbf{v}_1 + \beta_{22}\mathbf{v}_2 + \sum_{i=3}^{n} \alpha_{3i}\mathbf{u}_i$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ L.I. $\Rightarrow \exists i \in [3, n] : \alpha_{3i} \neq 0$. Supponiamo i = 3 (cioè $\alpha_{33} \neq 0$) e poniamo $x_3 := \alpha_{33}^{-1}$

$\mathbf{u}_3 = (-x_3\beta_{21})\mathbf{v}_1 + (-x_3\beta_{22})\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \sum_{i=4}^{n} (-x_3\alpha_{3i})\mathbf{u}_i \Rightarrow \mathbf{u}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

$\mathbf{u}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ et $\mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V_R \Rightarrow V_R = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

Passo j) $\mathbf{v}_j \in V_R = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{u}_j, \quad , \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_j = \sum_{i=j-1}^{n} \beta_{(j-1),i}\mathbf{v}_i + \sum_{i=j}^{n} \alpha_{ji}\mathbf{u}_i$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$ L.I. $\Rightarrow \exists i \in [j, n] : \alpha_{ji} \neq 0$. Supponiamo i = j (cioè $\alpha_{jj} \neq 0$) e poniamo $x_j := \alpha_{jj}^{-1}$

$\mathbf{u}_j = \sum_{i=j-1}^{n} (-x_j\beta_{(j-1),i})\mathbf{v}_i + x_j\mathbf{v}_j + \sum_{i=j+1}^{n} (-x_j\alpha_{ji})\mathbf{u}_i \Rightarrow \mathbf{u}_j \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \quad , \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

$\mathbf{u}_j \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \quad , \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ et $\mathbf{v}_j \in V_R \Rightarrow V_R = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \quad , \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$

Se fosse n<p, cioè $(n+1) \leq p$, allora al passo n si avrebbe

Passo n) $\mathbf{v}_n \in V_R = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{u}_n> \Rightarrow \mathbf{v}_n = \sum_{i=n-1}^{n} \beta_{(n-1),i}\mathbf{v}_i + \alpha_{nn}\mathbf{u}_n$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ L.I. $\Rightarrow$ $\alpha_{nn} \neq 0$. Poniamo $x_n := \alpha_{nn}^{-1}$

$\mathbf{u}_n = \sum_{i=n-1}^{n} (-x_n\beta_{(n-1),i})\mathbf{v}_i + x_n\mathbf{v}_n \Rightarrow \mathbf{u}_n \in <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n>$

$\mathbf{u}_n \in <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n>$ et $\mathbf{v}_n \in <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{u}_n> = V_R \Rightarrow V_R = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n>$

$\mathbf{v}_{n+1} \in V_R = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n> \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ L.D. $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_p$ L.D.

Essendo giunti ad un ***ASSURDO***, si ha che $p \leq n$. ■

10.2. Definizione. Diremo *base di uno spazio vettoriale reale finitamente generato* un insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti, che vengono anche detti *elementi della base*.

10.3. Esempio. Nello spazio vettoriale R^n si considerino le seguenti n-uple: $\mathbf{u}_1 = (1,0,0,0, \ldots ,0,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,0, \ldots ,0,0,0)$, $\mathbf{u}_3 = 0,0,1,0, \ldots ,0,0,0)$, ..., $\mathbf{u}_{n-1} = 0,0,0,0, \ldots ,0,1,0)$, $\mathbf{u}_n = 0,0,0,0, \ldots ,0,0,1)$.
E' facile convincersi che per ogni n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ di R^n si ha che

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

Da quest'ultima relazione si vede subito che:

(1) ogni n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ di R^n si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$; quindi, i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono dei generatori per R^n;

(2) $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n = (0,0,0,0, \ldots ,0,0,0)$ se e solo se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = (0,0,0,0, \ldots ,0,0,0)$.

Quindi, i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono linearmente indipendenti.

Da (1) e (2) si ha che $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base (detta *base canonica*) di R^n.

Tenendo conto dei Corollari 9.23 e 9.26 abbiamo la seguente

10.4. Osservazione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se B un insieme ordinato di vettori di V_R allora

10.4.1. B è una base di V_R $\Leftrightarrow$ B è un insieme minimale di generatori di V_R

10.4.2. B è una base di V_R $\Leftrightarrow$ B è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

10.5. Esempio. Ogni terna ordinata di vettori liberi non complanari è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti e, quindi, una base dello lo spazio vettoriale dei vettori liberi.

10.6. Teorema. Ogni spazio vettoriale reale $V_R \neq \{\mathbf{0}\}$ finitamente generato ha almeno una base.

1ª Dimostrazione (algoritmo di decrescita). Sia $V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$.

Passo 1) Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L.I. allora $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base di V. [STOP]

Altrimenti uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Se supponiamo che sia $\mathbf{u}_1$, allora si ha $\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ per cui è $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V$.

Passo 2) Se $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L.I. allora $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base di V. [STOP]

Altrimenti uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Se supponiamo che sia $\mathbf{u}_2$, allora si ha $\mathbf{u}_2 \in \langle \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ per cui è $\langle \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V$.

…………………………………………………………………………..

Passo j) Se $\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ sono L.I. allora $(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base di V. [STOP]

Altrimenti uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Se supponiamo che sia $\mathbf{u}_j$, allora si ha $\mathbf{u}_2 \in \langle \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ per cui è $\langle \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V$.

Se l'algoritmo non si fermasse prima (fornendo una base), dopo (n-1) passi si avrebbe $\langle \mathbf{u}_n \rangle = V$.

Essendo $V \neq \{\mathbf{0}\}$, deve essere $\mathbf{u}_n \neq \mathbf{0}$. Per cui $\mathbf{u}_n$ è L.Indip. e, quindi, $(\mathbf{u}_n)$ è una base di V. ■

2ª Dimostrazione (algoritmo di crescita). Sia $V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$.

$V \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \exists \mathbf{v}_1 \in V : \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1$ è L.I.

Passo 1) Se $\langle \mathbf{v}_1 \rangle = V$ allora $(\mathbf{v}_1)$ è una base di V. [STOP]

Se $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \neq V$ allora $\exists \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1 \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono L.I.

Passo 2) Se $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = V$ allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è una base di V. [STOP]

Se $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \neq V$ allora $\exists \mathbf{v}_3 \in V : \mathbf{v}_3 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono L.I.

………………………………………………………………………………

Passo j) Se $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_j \rangle = V$ allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_j)$ è una base di V. [STOP]

Se $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_j \rangle \neq V$ allora $\exists \mathbf{v}_{j+1} \in V : \mathbf{v}_{j+1}\ \mathbf{v}_{n+1} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_j \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_j$ sono L.I.

Se l'algoritmo non si fermasse prima (fornendo una base), dopo n passi si avrebbe necessariamente che $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = V$. Infatti, se esistesse $\mathbf{v}_{n+1} \in V$ tale che $\mathbf{v}_{n+1} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ allora si avrebbe che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ sono linearmente indipendenti. Per cui in V esisterebbe un insieme di vettori linearmente indipendenti $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}\}$ la cui cardinalità (n+1) è strettamente maggiore della cardinalità n di un insieme $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ di generatori. E ciò sarebbe assurdo per il Lemma 10.1. ■

Tenendo conto dell'Osservazione 10.4.2. diamo la seguente

10.7. Definizione. Stabiliamo che lo spazio nullo $\{\mathbf{0}\}$ abbia come base l'insieme vuoto $\emptyset$.

10.8. Teorema. (*di equicardinalità delle basi*). Sia V uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p)$ sono due basi di V, allora $n = p$. Ovvero, tutte le basi di un fissato spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione.

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p)$ L.I. e $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ generatori $\Rightarrow$ $p \leq n$

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ L.I. e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p)$ generatori $\Rightarrow$ $n \leq p$

$p \leq n$ et $n \leq p$ $\Rightarrow$ $n = p$. ■

Tenendo conto del teorema precedente è ben posta la seguente

10.9. Definizione. Diremo *dimensione* di uno spazio vettoriale reale $V_R \neq \{\mathbf{0}\}$ finitamente generato, e la indicheremo con $\dim(V_R)$, il numero di elementi di una (qualsiasi) sua base. In accordo con la Definizione 10.7 stabiliamo che la dimensione dello spazio nullo $\{\mathbf{0}\}$ sia uguale a zero.

10.10. Esempio. Lo spazio delle n-uple ordinate di numeri reali ha dimensione n.

10.11. Esempio. Lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3.

Tenendo conto dell'osservazione 10.1 si ha subito la seguente:

10.12. Osservazione. Se V_R è uno spazio vettoriale reale finitamente generato, allora si ha che

10.12.1 $\dim(V_R)$ = numero massimo di vettori linearmente indipendenti in V_R

10.12.2 $\dim(V_R)$ = numero minimo di generatori di V_R

10.13. Osservazione. Siano V_R e U_R due spazi vettoriali reali finitamente generati.
Se $V_R = U_R$ allora, ovviamente, $\dim(V_R) = \dim(U_R)$. La precedente condizione necessaria **non è**, in generale, anche **sufficiente**. Ad esempio, lo spazio vettoriale V dei vettori liberi e lo spazio R^3 delle terne ordinate di numeri reali hanno la stessa dimensione 3 ma non sono lo stesso spazio.

10.14. Osservazione. Siano V_R e U_R due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si prova che

10.14.1. $V_R \leq U_R \quad \Rightarrow \quad \dim(V_R) \leq \dim(U_R)$

10.14.2. $V_R \leq U_R$ et $\dim(V_R) = \dim(U_R) \quad \Leftrightarrow \quad V_R = U_R$

Tenendo conto delle Osservazioni 10.4 e 10.12 si ha la seguente

10.15. Osservazione. Sia V_R è uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione n. Se B un insieme ordinato di vettori di V_R allora

10.15.1. B è una base di V_R $\Leftrightarrow$ B è un insieme di n generatori

10.15.2. B è una base di V_R $\Leftrightarrow$ B è un insieme di n di vettori linearmente indipendenti

10.16. Teorema. (*caratterizzazione di una base*) Sia V_R è uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Un insieme ordinato $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base di V_R se e solo se ogni vettore di V_R si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$.

Dimostrazione. Se l'insieme B è una base di V_R allora (poiché i suoi elementi sono generatori di V_R) per ogni vettore $\mathbf{v}$ di V_R si ha che $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$. Ci resta da provare che tale scrittura è unica. Supponiamo che sia anche $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n$. Da

$$\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\ldots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n$$

si ottiene

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{u}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{u}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\mathbf{u}_3 + \ldots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Poiché gli elementi di una base sono linearmente indipendenti, si ha che tutti i coefficienti $(\alpha_i - \beta_i)$ sono nulli, da cui $\alpha_i = \beta_i$. Quindi, le due scritture coincidono.

Viceversa, supponiamo che ogni vettore (anche quello nullo) di V_R si possa scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B. Ovviamente, questo vuol dire che gli elementi di U sono generatori dello spazio V_R. Inoltre, $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1+0\mathbf{u}_2+0\mathbf{u}_3+\ldots+0\mathbf{u}_{n-1}+0\mathbf{u}_n$ è un modo di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$. Poiché, per ipotesi, tale modo di scrivere il vettore nullo è unico, abbiamo che i vettori di B sono linearmente indipendenti. ■

10.17. Osservazione. Sia V_R è uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione n. Se $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base di V_R allora **per ogni** elemento $\mathbf{v} \in V$ **esiste, ed è unica**, una n-upla ordinata $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots , \alpha_{n-1} , \alpha_n)$ di R^n tale che $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$.

Si noti anche che la n-upla ordinata $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots , \alpha_{n-1} , \alpha_n)$ dipende dalla base B.

10.18. Definizione. Sia $\Omega : V \to U$ una funzione tra due spazi vettoriali reali V e U. Diremo che Ω è *lineare* se valgono le seguenti proprietà:

(L1) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ $\quad \Omega(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \Omega(\mathbf{v}) + \Omega(\mathbf{w})$

(L2) $\forall \mathbf{v} \in V$, $\forall \omega \in R$ $\quad \Omega(\omega\mathbf{v}) = \omega\Omega(\mathbf{v})$

10.19. Corollario. Sia $\Omega : V \to U$ una funzione tra due spazi vettoriali reali V e U. Se f è lineare allora valgono anche le seguenti proprietà:

(L3) $\Omega(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$

(L4) $\forall \mathbf{v} \in V_R$ $\quad \Omega(-\mathbf{v}) = -\Omega(\mathbf{v})$

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{v} \in V_R$ si ha subito che:

- $\Omega(\mathbf{0}_V) = \Omega(0\mathbf{v}) = 0\Omega(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_U$;

- $\Omega(-\mathbf{v}) = \Omega((-1)\mathbf{v}) = (-1)\Omega(\mathbf{v}) = -\Omega(\mathbf{v})$.

10.20. Definizione. Sia $\Omega : V \to U$ una funzione lineare tra due spazi vettoriali reali V e U. Se Ω è biettiva allora diremo che Ω è un *isomorfismo* tra V e U. Diremo anche che V è *isomorfo* U.

Se $\Omega : V \to U$ è un isomorfismo tra due spazi vettoriali reali, nei teoremi che seguono si prova che:

1) p vettori di V sono linearmente indipendenti se e solo se le loro immagini (che sono vettori di U) sono linearmente indipendenti;

2) p vettori sono linearmente dipendenti se e solo se le loro immagini sono linearmente dipendenti;

3) p vettori di V sono dei generatori di V se e solo se le loro immagini sono dei generatori di U.

4) p vettori di V sono una base di V se e solo se le loro immagini sono una base di U.

10.21. Teorema. Sia $\Omega : V \to U$ un isomorfismo tra due spazi vettoriali V e U. La funzione inversa di Ω è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali U e V.

Dimostrazione. La funzione inversa di Ω è una funzione $\Omega^{-1} : U \to V$ biettiva. Proviamo che Ω^{-1} è lineare. Siano $\mathbf{a},\mathbf{b} \in U$ e $\omega \in R$. Se poniamo $\mathbf{v} := \Omega^{-1}(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} := \Omega^{-1}(\mathbf{b})$ e $\mathbf{t} := \Omega^{-1}(\omega\mathbf{a})$ allora si ha che $\Omega(\mathbf{v}) = \mathbf{a}$, $\Omega(\mathbf{w}) = \mathbf{b}$ e $\Omega(\mathbf{t}) = \omega\mathbf{a}$. Siccome Ω è un isomorfismo tra V e U si ha che

1) $\Omega(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \Omega(\mathbf{v}) \oplus \Omega(\mathbf{w}) = \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ e, quindi, $\Omega^{-1}(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \Omega^{-1}(\mathbf{a}) + \Omega^{-1}(\mathbf{b})$;

2) $\Omega(\omega * \mathbf{v}) = \omega \times \Omega(\mathbf{v}) = \omega \times \mathbf{a}$ e, quindi, $\Omega^{-1}(\omega \times \mathbf{a}) = \omega * \mathbf{v} = \omega * \Omega^{-1}(\mathbf{a})$. ■

10.22. Teorema. Sia $\Omega : V \to U$ un isomorfismo tra due spazi vettoriali V e U.

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$ sono dei generatori dello spazio V se e solo se le loro immagini $\Omega(\mathbf{v}_1), \Omega(\mathbf{v}_2), \Omega(\mathbf{v}_3), \ldots, \Omega(\mathbf{v}_{p-1}), \Omega(\mathbf{v}_p)$ sono dei generatori dello spazio U.

Dimostrazione. Siccome Ω è biettiva per ogni $\mathbf{a}\in U$ esiste un unico vettore $\mathbf{v}\in V$ tale che $\Omega(\mathbf{v}) = \mathbf{a}$. Se supponiamo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$ siano generatori dello spazio V, allora esistono p numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p$ tali che $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3+\ldots+\alpha_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}+\alpha_p\mathbf{v}_p$. Quindi, $\mathbf{a} = \Omega(\mathbf{v}) = \Omega(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3+\ldots+\alpha_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}+\alpha_p\mathbf{v}_p)$. Tenendo conto della linearità di Ω si ha che $\mathbf{a} = \alpha_1\Omega(\mathbf{v}_1)+\alpha_2\Omega(\mathbf{v}_2)+\alpha_3\Omega(\mathbf{v}_3)+\ldots+\alpha_{p-1}\Omega(\mathbf{v}_{p-1})+\alpha_p\Omega(\mathbf{v}_p)$. Per cui $\Omega(\mathbf{v}_1), \Omega(\mathbf{v}_2), \Omega(\mathbf{v}_3), \ldots, \Omega(\mathbf{v}_{p-1}), \Omega(\mathbf{v}_p)$ sono dei generatori dello spazio U. Siccome Ω è una funzione per ogni $\mathbf{v}\in V$ esiste un unico vettore $\mathbf{a}\in U$ tale che $\Omega(\mathbf{v}) = \mathbf{a}$. Se ora supponiamo che $\Omega(\mathbf{v}_1), \Omega(\mathbf{v}_2), \Omega(\mathbf{v}_3), \ldots, \Omega(\mathbf{v}_{p-1}), \Omega(\mathbf{v}_p)$ siano generatori dello spazio U, allora esistono p numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p$ tali che $\mathbf{a} = \alpha_1\Omega(\mathbf{v}_1)+\alpha_2\Omega(\mathbf{v}_2)+\alpha_3\Omega(\mathbf{v}_3)+\ldots+\alpha_{p-1}\Omega(\mathbf{v}_{p-1})+\alpha_p\Omega(\mathbf{v}_p)$. Tenendo conto della linearità di Ω si ha che $\Omega(\mathbf{v}) = \mathbf{a} = \Omega(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3+\ldots+\alpha_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}+\alpha_p\mathbf{v}_p)$. Poiché Ω è biettiva si ha che $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3+\ldots+\alpha_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}+\alpha_p\mathbf{v}_p$. Quindi, i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$ sono dei generatori dello spazio V. ■

Tenendo conto che Ω^{-1} è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali U e V si ha anche il seguente:

10.23. Corollario. Sia $\Omega : V \to U$ un isomorfismo tra due spazi vettoriali V e U.

I vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_p$ sono dei generatori dello spazio U se e solo se le loro controimmagini $\Omega^{-1}(\mathbf{a}_1), \Omega^{-1}(\mathbf{a}_2), \Omega^{-1}(\mathbf{a}_3), \ldots, \Omega^{-1}(\mathbf{a}_{p-1}), \Omega^{-1}(\mathbf{a}_p)$ sono dei generatori di V.

10.24. Teorema. Sia $\Omega : V \to U$ un isomorfismo tra due spazi vettoriali V e U.

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$ di V sono linearmente indipendenti se e solo se le loro immagini $\Omega(\mathbf{v}_1), \Omega(\mathbf{v}_2), \Omega(\mathbf{v}_3), \ldots, \Omega(\mathbf{v}_{p-1}), \Omega(\mathbf{v}_p)$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Le seguenti proposizioni sono equivalenti tra loro:

1) i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti

2) $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3+\ldots+\alpha_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}+\alpha_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{p-1} = \alpha_p = 0$

3) $\Omega(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3+\ldots+\alpha_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}+\alpha_p\mathbf{v}_p) = \Omega(\mathbf{0}_V) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{p-1} = \alpha_p = 0$

4) $\alpha_1\Omega(\mathbf{v}_1)+\alpha_2\Omega(\mathbf{v}_2)+\alpha_3\Omega(\mathbf{v}_3)+\ldots+\alpha_{p-1}\Omega(\mathbf{v}_{p-1})+\alpha_p\Omega(\mathbf{v}_p) = \mathbf{0}_U \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{p-1} = \alpha_p = 0$

5) i vettori $\Omega_B(\mathbf{v}_1), \Omega_B(\mathbf{v}_2), \Omega_B(\mathbf{v}_3), \ldots, \Omega_B(\mathbf{v}_{p-1}), \Omega_B(\mathbf{v}_p)$ sono linearmente indipendenti. ■

10.25. Corollario. Sia $\Omega : V \rightarrow U$ un isomorfismo tra i due spazi vettoriali V e U.

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$ di V sono linearmente dipendenti se e solo se le loro immagini $\Omega(\mathbf{v}_1), \Omega(\mathbf{v}_2), \Omega(\mathbf{v}_3), \ldots, \Omega(\mathbf{v}_{p-1}), \Omega(\mathbf{v}_p)$ sono linearmente dipendenti.

Tenendo conto che Ω^{-1} è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali U e V si ha anche il seguente:

10.26. Corollario. Sia $\Omega : V \rightarrow U$ un isomorfismo tra due spazi vettoriali V e U.

I vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_p$ di U sono linearmente indipendenti se e solo se le loro controimmagini $\Omega^{-1}(\mathbf{a}_1), \Omega^{-1}(\mathbf{a}_2), \Omega^{-1}(\mathbf{a}_3), \ldots, \Omega^{-1}(\mathbf{a}_{p-1}), \Omega^{-1}(\mathbf{a}_p)$ sono linearmente indipendenti.

Immediata conseguenza del Teorema 10.22 e del Teorema 10.24 è il seguente:

10.27. Teorema. Sia $\Omega : V \rightarrow U$ un isomorfismo tra due spazi vettoriali V e U.

L'insieme ordinato $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p\}$ è una base dello spazio V se e solo se l'insieme ordinato $B' = \{\Omega(\mathbf{v}_1), \Omega(\mathbf{v}_2), \Omega(\mathbf{v}_3), \ldots, \Omega(\mathbf{v}_{p-1}), \Omega(\mathbf{v}_p)\}$ è una base dello spazio U.

Tenendo conto dell'Osservazione 10.17 è ben posta la seguente

10.28. Definizione. Sia V_R uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione n.

Se $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ è una base di V_R si consideri la funzione $\Omega_B : V_R \rightarrow R^n$ così definita

$$\forall \mathbf{v} \in V_R \qquad \Omega_B(\mathbf{v}) := \mathbf{a} \in R^n$$

dove $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ è l'unica n-upla ordinata di numeri reali tale

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$$

Tale funzione $\Omega_B : V_R \rightarrow R^n$ viene detta *coordinatizzazione di V_R rispetto a B*.

I numeri reali della n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ vengono detti *componenti* o *coordinate* del vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla base B.

10.29. Teorema. Sia V_R uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione n e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ una sua base. La funzione di coordinatizzazione $\Omega_B : V_R \rightarrow R^n$ è un isomorfismo tra lo spazio vettoriale V_R e lo spazio vettoriale R^n.

Dimostrazione. Siano **v** e **w** due generici vettori di V_R. Poiché B è una base di V_R esiste un'unica n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \in R^n$ ed un'unica n-upla $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n) \in R^n$ tali che $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\dots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{w} = \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\dots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n$. Quindi, $\Omega_B(\mathbf{v}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ e $\Omega_B(\mathbf{w}) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$. Ω_B è iniettiva. Infatti

$\Omega_B(\mathbf{v}) = \Omega_B(\mathbf{w}) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\dots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n = \beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\dots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Ω_B è anche suriettiva. Infatti, per ogni n-upla $\mathbf{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n) \in R^n$ esiste il vettore $\mathbf{w} := (\gamma_1\mathbf{u}_1+\gamma_2\mathbf{u}_2+\gamma_3\mathbf{u}_3+\dots+\gamma_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\gamma_n\mathbf{u}_n) \in V_R$ tale che $\Omega_B(\mathbf{w}) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n) = \mathbf{c}$.

Da $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\dots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n) + (\beta_1\mathbf{u}_1+\beta_2\mathbf{u}_2+\beta_3\mathbf{u}_3+\dots+\beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\beta_n\mathbf{u}_n)$ si ha che

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{u}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{u}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{u}_3 + \dots + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{u}_n$

Quindi, $\Omega_B(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}, \alpha_n + \beta_n)$. Osservando che

$$(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3, \dots, \alpha_{n-1}+\beta_{n-1}, \alpha_n+\beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$$

si è provata la proprietà (L1). Da $\omega\mathbf{v} = \omega(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{u}_3+\dots+\alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\alpha_n\mathbf{u}_n)$ si ha che

$\omega\mathbf{v} = (\omega\alpha_1)\mathbf{u}_1+(\omega\alpha_2)\mathbf{u}_2+(\omega\alpha_3)\mathbf{u}_3+\dots+(\omega\alpha_{n-1})\mathbf{u}_{n-1}+(\omega\alpha_n)\mathbf{u}_n$

Quindi, $\Omega_B(\omega\mathbf{v}) = (\omega\alpha_1, \omega\alpha_2, \omega\alpha_3, \dots, \omega\alpha_{n-1}, \omega\alpha_n)$. La (L2) è provata osservando che

$(\omega\alpha_1, \omega\alpha_2, \omega\alpha_3, \dots, \omega\alpha_{n-1}, \omega\alpha_n) = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. ■

Tenendo conto del Teorema 10.29 si ha subito la seguente

10.30. Osservazione. Ogni spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione n è isomorfo allo spazio vettoriale reale R^n delle n-uple ordinate di numeri reali.

Tenendo conto dell'Osservazione 10.30 diamo la seguente

10.31. Definizione. Diremo che lo spazio vettoriale reale R^n delle n-uple ordinate di numeri reali è un *modello universale* di spazio vettoriale di dimensione finita n.