25. Cono e cilindro

25.1. Definizione. Diremo ***superficie*** il luogo geometrico $\sum$ dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un equazione del tipo $F(x, y, z) = 0$ che viene detta equazione cartesiana della superficie. Se $F(x, y, z)$ è un polinomio in x, y e z (a coefficienti costanti) allora diremo che $\sum$ è una *superficie algebrica*. Inoltre, il grado del polinomio si dice *ordine della superficie algebrica*.

25.2. Osservazione. Siccome $F(x, y, z) = 0$ è un'equazione e non un'identità, una superficie non contiene tutti gli ∞^3 punti dello spazio.

25.3. Esempi.

- $3x + y - 5z + 11 = 0$	è un piano
- $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 6z = 0$	è una sfera
- $(3x + 2y + z)(x - y) = 0$	è l'unione di due piani
- $(x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 6z)(3x + 2y + z) = 0$	è l'unione di una sfera e un piano
- $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 0$	è una superficie che ha solo un punto reale
- $[(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2][x^2 + y^2 + (z + 3)^2] = 0$	è la superficie che ha solo due punti reali
- $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 + 1= 0$	è una superficie senza punti reali

25.4. Definizione. Diremo ***curva*** il luogo dei punti comuni a due superfici. Quindi, una curva è il luogo geometrico dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un sistema di equazioni del tipo $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ che vengono dette equazioni cartesiane della curva. Una curva si dice *piana* se esiste un piano che contiene tutti i suoi punti. Altrimenti si dice *sghemba*.

25.5. Esempi.

- $3x + 2y + z = x - y = 0$	è una retta
- $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 3x + 2y + z = 0$	è una circonferenza
- $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = x + z + 1 = 0$	è una curva che ha solo un punto reale
- $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x - 1 = 0$	è una curva che ha solo un punto reale
- $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 + 1 = x - y = 0$	è una curva senza punti reali
- $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x - 2 = 0$	è una curva senza punti reali

25.6. Definizione. Diremo ***cono*** una superficie Γ luogo dei punti di ∞^1 rette (dette *generatrici* del cono) dello spazio passanti per uno stesso punto V (detto *vertice* del cono). Inoltre, una curva Ω che incontri ogni generatrice in un punto si dice *direttrice* del cono (quindi la direttrice ha ∞^1 punti).

25.7. Equazione cartesiana di un cono. **Per semplicità**, tratteremo un cono Γ tale che:

- la direttrice sia una curva piana Ω ottenuta come intersezione di una superficie $\sum$ di equazione cartesiana $F(x, y, z) = 0$ e di un piano π di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$;
- il vertice $V(x_0, y_0, z_0)$ non appartenga al piano π; quindi $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$.

Un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene al cono se e solo se il punto P appartiene ad una retta ρ passante per $V(x_0, y_0, z_0)$ e per un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ della curva Ω.

Siccome $P_1 \in \pi$ e $V \notin \pi$, il vettore $[P_1V]$ è sicuramente diverso dal vettore nullo. Per cui come parametri direttori della retta ρ possiamo prendere $(l, m, n) = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$.

Quindi, una terna di equazioni parametriche della retta ρ è data da $\begin{cases} x = (x_0 - x_1)t + x_1 \\ y = (y_0 - y_1)t + y_1 \\ z = (z_0 - z_1)t + z_1 \end{cases}$

Da cui si ha che le coordinate del punto $P_1 \in \Omega = \pi \cap \sum$ sono date da

25.8
$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{x - x_0}{t - 1} \\ y_1 = y_0 - \dfrac{y - y_0}{t - 1} \\ z_1 = z_0 - \dfrac{z - z_0}{t - 1} \end{cases}.$$

Dall'identità $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ (dovuta al fatto che $P_1 \in \pi$) otteniamo

$$a\left(x_0 - \frac{x - x_0}{t - 1}\right) + b\left(y_0 - \frac{y - y_0}{t - 1}\right) + c\left(z_0 - \frac{z - z_0}{t - 1}\right) + d = 0$$

da cui, tenendo conto che $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$, si ha che

25.9
$$t = \frac{ax + by + cz + d}{ax_0 + by_0 + cz_0 + d} = \varphi(x, y, z).$$

Dall'identità $F(x_1, y_1, z_1) = 0$ (dovuta al fatto che $P_1 \in \sum$), tenendo conto di (25.8) e (25.9), otteniamo

25.10
$$F\left(x_0 - \frac{x - x_0}{\varphi(x, y, z) - 1}, y_0 - \frac{y - y_0}{\varphi(x, y, z) - 1}, z_0 - \frac{z - z_0}{\varphi(x, y, z) - 1}\right) = 0.$$

che è proprio l'equazione cartesiana del cono Γ.

25.11. Esempio. Sia $\sum$ la superficie di equazione $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + x = 0$ e π il piano di equazione $x - y - z = 0$. Trovare l'equazione del cono Γ di vertice $V(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 3) \notin \pi$ avente come direttrice la curva Ω ottenuta come intersezione della superficie $\sum$ e del piano π.

Da (25.9) si ha che $t = \dfrac{x-y-z}{-3}$. Quindi, $t-1 = -\dfrac{x-y-z}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}(x-y-z+3)$.

Da (25.8) si ha che $\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{x-x_0}{t-1} = \dfrac{3x}{x-y-z+3} \\ y_1 = y_0 - \dfrac{y-y_0}{t-1} = \dfrac{3y}{x-y-z+3} \\ z_1 = z_0 - \dfrac{z-z_0}{t-1} = 3 + \dfrac{3(z-3)}{x-y-z+3} = \dfrac{3x-3y}{x-y-z+3} \end{cases}$

Da (25.10) si ha che

$$\left(\frac{3x}{x-y-z+3}\right)^2 + 2\left(\frac{3y}{x-y-z+3}\right)^2 - \left(\frac{3x-3y}{x-y-z+3}\right)^2 + \left(\frac{3x}{x-y-z+3}\right) = 0$$

Moltiplicando tutto per $(x-y-z+3)^2$ otteniamo

$$9x^2 + 18y^2 - 9x^2 - 9y^2 + 18xy + 3x(x-y-z+3) = 0$$

ovvero

$$3x^2 + 3y^2 + 7xy - x(z-3) = 0$$

che è l'equazione cartesiana del cono. Si noti che la precedente equazione è un'equazione algebrica omogenea di 2° grado nelle variabili $x = x-0 = x-x_0$, $y = y-0 = y-y_0$ e $z-3 = z-z_0$.

25.12. Cono con direttrice sul piano XY. Trattiamo ora il caso particolare in cui il piano π è il piano XY, ovvero il piano di equazione $z = 0$. In tal caso la curva Ω si rappresenta con un'equazione del tipo $F(x, y) = 0$. Inoltre, siccome il vertice $V(x_0, y_0, z_0)$ non appartiene a π, si ha che $z_0 \neq 0$.

Essendo $a = b = d = 0$ e $c = 1$, da (25.9) si ha subito che $t = \dfrac{z}{z_0}$ e $t-1 = \dfrac{z-z_0}{z_0}$.

Quindi, da (25.8) si ha $\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{x-x_0}{t-1} = x_0 - z_0\dfrac{x-x_0}{z-z_0} \\ y_1 = y_0 - \dfrac{y-y_0}{t-1} = y_0 - z_0\dfrac{y-y_0}{z-z_0} \\ z_1 = z_0 - \dfrac{z-z_0}{t-1} = z_0 - z_0\dfrac{z-z_0}{z-z_0} = 0 \end{cases}$

Per cui l'equazione (25.10) diventa semplicemente

25.13 $$F\left(x_0 - z_0\frac{x-x_0}{z-z_0}, y_0 - z_0\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)$$

25.14. Osservazione. Se F(x, y) = 0 è un'equazione algebrica in x e y di grado n, ovvero F(x, y) è un polinomio in x e y di grado n, allora nella (25.13) possiamo moltiplicare tutto per $(z - z_0)^n$ e otteniamo un'equazione del tipo

$$G(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

dove $G(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ è un polinomio **omogeneo** di grado n in $x - x_0$, $y - y_0$ e $z - z_0$.

25.15. Esempio. Trovare l'equazione cartesiana del cono di vertice $V(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -3)$ e avente come direttrice la parabola Ω di equazione $F(x, y) = y - 2x^2 = 0$.

Da (25.13) si ha $\left(y_0 - z_0\dfrac{y-y_0}{z-z_0}\right) - \left(x_0 - z_0\dfrac{x-x_0}{z-z_0}\right)^2 = \left(3\dfrac{y}{z+3}\right) - 2\left(1+3\dfrac{x-1}{z+3}\right)^2 = 0$

Moltiplicando tutto per $(z+3)^2$ otteniamo $3y(z+3) - 2((z+3)+3(x-1))^2 = 0$ ovvero

$$18(x-1)^2 + 2(z+3)^2 + 12(x-1)(z+3) - 3y(z+3) = 0\,.$$

Tale equazione è un'equazione algebrica omogenea di 2° grado nelle variabili (x–1), y e (z+3)

25.16. Esempio. Trovare l'equazione cartesiana del cono di vertice $V(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ e avente come direttrice la curva Ω di equazione F(x, y) = y – ln(x) = 0.

Da (25.13) si ha $\left(y_0 - z_0\dfrac{y-y_0}{z-z_0}\right) - \ln\left(x_0 - z_0\dfrac{x-x_0}{z-z_0}\right) = \left(1-\dfrac{y-1}{z-1}\right) - \ln\left(1-\dfrac{x-1}{z-1}\right) = 0$

ovvero $\dfrac{z-y}{z-1} - \ln\left(\dfrac{z-x}{z-1}\right) = \dfrac{z-y}{z-1} - \ln(z-x) + \ln(z-1) = 0$

Moltiplicando per (z–1) otteniamo l'equazione

$$z - y - (z-1)\left[\ln(z-x) - \ln(z-1)\right] = 0\,.$$

25.17. Esempio. Trovare l'equazione cartesiana del cono di vertice $V(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 5)$ e avente come direttrice la curva Ω di equazione F(x, y) = y – sin(x) = 0.

Da (25.13) si ha $\left(0 - 5\dfrac{(y-0)}{z-5}\right) - \sin\left(0 - 5\dfrac{(x-0)}{z-5}\right) = 0$ ovvero $\left(\dfrac{5y}{z-5}\right) + \sin\left(\dfrac{-5x}{z-5}\right) = 0$

Moltiplicando per (z–5) otteniamo l'equazione $5y + (z-5)\sin\left(\dfrac{-5x}{z-5}\right) = 0$ ovvero

$$5y - (z-5)\sin\left(\dfrac{5x}{z-5}\right) = 0\,.$$

25.18. Definizione. Sia Γ un cono di vertice V. Se la direttrice Ω sul piano π è una circonferenza di centro H tale che la retta s passante per H e V è perpendicolare a π, allora diremo che Γ un *cono rotondo*. La retta s viene detta *asse del cono*. Tale cono è la superficie delle ∞^1 rette che passano per V e formano con la asse s un angolo costante θ, detto *apertura del cono*, con $0<\theta<\pi/2$.

25.19. Osservazione. Sia Γ il cono rotondo della definizione precedente. Se indichiamo con r il raggio della circonferenza Ω e con h la distanza tra i punti V e H, allora si ha che $r = h\tan\theta$.

25.20. Equazione del cono rotondo avente il vertice V su una retta s e apertura θ.

Sia $H(x_H, y_H, z_H)$ un punto di s diverso da V e sia h la distanza tra H e V. Sia (l, m, n) una terna di parametri direttori della retta s. Il piano π di equazione $l(x - x_H) + m(y - y_H) + n(z - z_H) = 0$ passa per H ed è perpendicolare a s. Inoltre, il punto V non appartiene a π.

La sfera $\sum$ di centro $H(x_H, y_H, z_H)$ e raggio $r = h\tan\theta$ ha equazione

$$F(x, y, z) = (x - x_H)^2 + (y - y_H)^2 + (z - z_H)^2 - r^2 = 0$$

La circonferenza $\Omega = \pi \cap \sum$ è una direttrice del cono. Ora si usano la (25.9) e la (25.10).

25.21. Esempio. Trovare l'equazione cartesiana del cono rotondo avente il vertice in V(0, 2, 2), come asse la retta s : x = y – z = 0 e apertura $\theta = \pi/6$.

Sulla retta s prendiamo il punto H(0, 0, 0) diverso da V. La distanza di H da V è $h = \sqrt{8}$. Siccome (0, 1, 1) è una terna di parametri direttori di s, il piano π ha equazione y + z = 0. La sfera $\sum$ di centro H e raggio $r = h\tan\theta = \sqrt{8/3}$ ha equazione cartesiana $F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8 = 0$.

Da (25.9) otteniamo $t = (y+z)/4$ da cui $t-1 = (y+z-4)/4$.

Infine, da (25.10) si ha che

$$3\left(-\frac{8x}{y+z-4}\right)^2 + 3\left(2-\frac{8(y-2)}{y+z-4}\right)^2 + 3\left(2-\frac{8(z-2)}{y+z-4}\right)^2 - 8 = 0$$

Moltiplicando tutto per $(y + z - 4)^2$ otteniamo

$$3(-8x)^2 + 3(-6y+2z+8)^2 + 3(2y-6z+8)^2 - 8(y+z-4)^2 = 0$$

ovvero

$$12x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 10yz - 8y - 8z + 16 = 0$$

25.22. Cono rotondo con asse parallelo all'asse Z. Sia Γ un cono rotondo di vertice $V(x_0, y_0, z_0)$ e asse parallelo all'asse Z. Se il vertice V non appartiene al piano XY, cioè $z_0 \neq 0$, allora una direttrice di Γ è una circonferenza Ω del piano $z = 0$ di centro $H(x_0, y_0)$. Se il raggio di Ω è r allora la sua equazione è $F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$. Per la (25.13) l'equazione del cono sarà

$$\left((x_0 - z_0\frac{x - x_0}{z - z_0}) - x_0\right)^2 + \left((y_0 - z_0\frac{y - y_0}{z - z_0}) - y_0\right)^2 - r^2 = 0$$

da cui si ottiene $z_0^2\frac{(x - x_0)^2}{(z - z_0)^2} + z_0^2\frac{(y - y_0)^2}{(z - z_0)^2} - r^2 = 0$

Moltiplicando per $(z - z_0)^2$ otteniamo

25.23 $$z_0^2(x - x_0)^2 + z_0^2(y - y_0)^2 - r^2(z - z_0)^2 = 0$$

Quest'ultima è un'equazione omogenea di secondo grado nelle variabili $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ e $(z-z_0)$.

25.24. Definizione. Sia ∑ una sfera di centro C e raggio r. Sia V un punto esterno a ∑. Sia Γ la superficie luogo delle rette uscenti da V e tangenti a ∑. Non è difficile rendersi conto che i punti di tangenza di tali rette con la sfera formano una circonferenza Ω. Quindi Γ è un cono che viene detto *cono circoscritto alla sfera* ∑. Inoltre, la circonferenza Ω è una direttrice di tale cono.

25.25. Osservazione. Sia Γ il cono circoscritto alla sfera della definizione precedente. Indichiamo con s la retta passante per i due punti distinti C e V e con π il piano sul quale giace la circonferenza Ω. Non è difficile rendersi conto che la retta s è perpendicolare a π e che il centro H di Ω è proprio il punto di intersezione di s con π. Quindi, Γ è un cono rotondo.

25.26. Equazione di un cono circoscritto ad una sfera.

Sia $\sum : F(x, y, z) = 0$ la sfera di centro $C(x_C, y_C, z_C)$ e raggio r e sia $V(x_0, y_0, z_0)$ un punto esterno alla sfera ∑. Quindi, $d(V, C) > r$. Sia Γ il cono rotondo di vertice V circoscritto alla sfera ∑.

Per trovare l'equazione del cono Γ, siccome abbiamo già l'equazione di ∑, dobbiamo trovare l'equazione di π. Poiché il vettore non nullo $(a, b, c) = (x_0 - x_C, y_0 - x_C, z_0 - x_C) = [CV]$ è perpendicolare al piano π e il piano π passa per il centro H della circonferenza Ω si ha subito che un'equazione cartesiana di π è $a(x - x_H) + b(y - y_H) + c(z - z_H) = 0$.

Quindi, dobbiamo trovare le coordinate del centro $H(x_H, y_H, z_H)$ della circonferenza Ω.

Siccome H è un punto interno al segmento CV, il vettore [CH] ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore [CV]. Per cui, esiste un unico numero reale positivo $\omega < 1$ tale che $[CH] = \omega[CV]$.

Utilizzando l'identità vettoriale [OH] = [OC]+[CH] = [OC] + ω[CV] si trovano le coordinate di H

$$(x_H, y_H, z_H) = (x_C, y_C, z_C) + \omega(a, b, c) = (x_C+\omega a, y_C+\omega b, z_C+\omega c)$$

A questo punto dobbiamo trovare il valore di ω.

Se indichiamo con h la lunghezza del vettore [CH] e con u la lunghezza del vettore [CV] allora da [CH] = ω[CV] si ha che h = ωu. Inoltre, se t è una retta passante per V e tangente alla sfera ∑ in un punto A, allora consideriamo il triangolo CAV rettangolo in A. La lunghezza del cateto CA è uguale al raggio r della sfera. Poiché A è un punto della circonferenza Ω, il segmento AH si trova sul piano H e, quindi, è perpendicolare al segmento CV. Per cui il segmento CH è la proiezione del cateto CA sull'ipotenusa CV. Tenendo conto del primo teorema di Euclide, si ha subito che $r^2 = uh$

Per cui alla fine si ha che $r^2 = \omega u^2 = \omega(a^2 + b^2 + c^2)$ ovvero $\omega = r^2/(a^2 + b^2 + c^2)$.

Infine, avendo le equazioni di π e di ∑, troviamo l'equazione del cono usando la (25.9) e la (25.10).

25.27. Esempio. Trovare l'equazione del cono di vertice $V(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -6)$ e circoscritto alla sfera ∑ di equazione $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$.

Il centro della sfera è $C(x_C, y_C, z_C) = (0, -2, 0)$, il raggio della sfera è r = 2.

Troviamo l'equazione del piano π : $a(x - x_H) + b(y - y_H) + c(z - z_H) = 0$

Da $(a, b, c) = (x_0 - x_C, y_0 - x_C, z_0 - x_C) = (0, 2, -6)$ si ha che $\omega = r^2/(a^2 + b^2 + c^2) = 1/10 < 1$.

Quindi, le coordinate di H sono $(x_H, y_H, z_H) = (x_C+\omega a, y_C+\omega b, z_C+\omega c) = (0, -9/5, -3/5)$.

Per cui l'equazione di π è $0(x - 0) + 2(y + 9/5) - 6(z + 3/5) = y - 3z = 0$. Per cui d = 0.

Dalla (25.9) otteniamo $t = (y - 3z)/18$ da cui $t - 1 = (y - 3z - 18)/18$.

Tenendo conto che $F(x_1, y_1, z_1) = (x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 + 4y_1 = 0$, dalla (25.10) si ha che

$$\left(-\frac{18x}{y-3z-18}\right)^2 + \left(-\frac{18y}{y-3z-18}\right)^2 + \left(-6-\frac{18(z+6)}{y-3z-18}\right)^2 + 4\left(-\frac{18y}{y-3z-18}\right) = 0$$

Moltiplicando tutto per $(y - 3z - 18)^2$ otteniamo

$$(-18x)^2 + (-18y)^2 + (-6y)^2 + 4(-18y)(y-3z-18) = 0$$

$$9x^2 + 8y^2 + 6y(z+6) = 0.$$

che è l'equazione del cono. Si osservi che tale equazione è un'equazione algebrica omogenea di 2° grado nelle incognite x, y e (z+6).

25.28. Definizione. Diremo ***cilindro*** una superficie luogo di ∞^1 rette (dette *generatrici* del cilindro) dello spazio aventi tutte la stessa direzione. Una curva che incontri ogni generatrice in un punto si dice *direttrice* del cilindro (quindi la direttrice ha ∞^1 punti).

25.29. Equazione cartesiana di un cilindro. **Per semplicità**, tratteremo un cilindro Φ tale che:

- la direttrice sia una curva piana Ω ottenuta come intersezione di una superficie $\sum$ di equazione $F(x, y, z) = 0$ e di un piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$;
- le generatrici abbiano la direzione di un vettore $\mathbf{v} = (l, m, n)$ non parallelo a π; cioè $al+bm+cn\neq 0$.

Un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene al cilindro Φ se e solo se il punto P appartiene ad una retta ρ parallela al vettore $\mathbf{v} = (l, m, n)$ e passante per un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ della curva Ω.

Quindi, una terna di equazioni parametriche della retta ρ è data da $\begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \\ z = nt + z_1 \end{cases}$

Da cui si ha che le coordinate del punto $P_1 \in \Omega = \pi \cap \sum$ sono date da

25.30
$$\begin{cases} x_1 = x - lt \\ y_1 = y - mt \\ z_1 = z - nt \end{cases}$$

Dall'identità $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ (dovuta al fatto che $P_1 \in \pi$) e dalla (25.30) otteniamo

$$a(x-lt)+b(y-mt)+c(z-nt)+d=0$$

da cui, tenendo conto che $al+bm+cn\neq 0$, si ha che

25.31
$$t = \frac{ax+by+cz+d}{al+bm+cn} = \vartheta(x, y, z).$$

Dall'identità $F(x_1, y_1, z_1) = 0$ (dovuta al fatto che $P_1 \in \sum$) e dalla (25.30) otteniamo

25.32
$$F(x-lt, y-mt, z-nt)=0$$

Sostituendo in quest'ultima il valore di t trovato in (25.31), si ha

(25.33)
$$F\left(x-l\vartheta(x,y,z), y-m\vartheta(x,y,z), z-n\vartheta(x,y,z)\right)$$

che è proprio l'equazione cartesiana del cilindro Φ.

25.34. Esempio. Scrivere l'equazione del cilindro con generatrici parallele al vettore **v** = (1, 1, 0) e direttrice $\Omega = \pi \cap \sum$ dove $\sum$: F(x, y, z) = $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4x = 0$ e $\pi : 2x - y - z = 0$.

Siccome (l, m, n) = (1, 1, 0) e (a, b, c) = (2, −1, −1), dalla (25.31) si ha che $t = 2x - y - z$.

Per cui dalla (25.30) si ha $\begin{cases} x_1 = x - lt = x - t \\ y_1 = y - mt = y - t \\ z_1 = z - nt = z \end{cases}$

Tenendo conto della (25.32), nel nostro caso si ha che $(x-t)^2 + 2(y-t)^2 - 3z^2 + 4(x-t) = 0$.

Sostituendo il valore di t si ha

$$(-x+y+z)^2 + 2(-2x+2y+z)^2 - 3z^2 + 4(-x+y+z) = 0$$

e, infine,

$$9x^2 + 9y^2 - 18xy - 10xz + 10yz - 4x + 4y + 4z = 0$$

25.35. Esempio. Scrivere l'equazione del cilindro che proietta ortogonalmente sul piano XY la circonferenza Ω intersezione della sfera $\sum$ di equazione F(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ e del piano $\pi : x + y - z - 1 = 0$. Quindi, (a, b, c, d) = (1, 1, −1, −1).

Siccome le generatrici del cilindro sono parallele all'asse Z prendiamo **v** = (0, 0, −1).

Per la (25.31) si ha che $t = x + y - z - 1$.

Per cui dalla (25.30) si ha $\begin{cases} x_1 = x - 0t = x \\ y_1 = y - 0t = y \\ z_1 = z - (-1)t = z + t = x + y - 1 \end{cases}$

Tenendo conto della (25.32), nel nostro caso si ha che $x^2 + y^2 + (z+t)^2 - 1 = 0$.

Sostituendo il valore di t si ha

$$x^2 + y^2 + (x+y-1)^2 - 1 = 0$$

e, infine,

$$x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$$

25.36. Osservazione Il cilindro Φ dell'esercizio precedente ha le generatrici parallele all'asse Z. Inoltre, il piano π di equazione z = 0 incontra ogni generatrice in un sol punto. Quindi, la curva piana Ω che si ottiene intersecando Φ con π è una direttrice del cilindro. La curva Ω è la conica di equazione $x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$ sul piano XY.

25.37. Cilindro con direttrice sul piano XY. Trattiamo ora il caso in cui il piano π è il piano XY, ovvero il piano di equazione z = 0. In tal caso la curva Ω si rappresenta con un'equazione del tipo F(x, y) = 0. Siccome il vettore **v** = (l, m, n) è un vettore non parallelo al piano π si ha che n ≠ 0. Essendo a = b = d = 0 e c = 1, dalla (25.31) si ha subito che t = z/n e l'equazione del cilindro è

Quindi, da (25.30) si ha $\begin{cases} x_1 = x - lt = x - (l/n)z \\ y_1 = y - mt = y - (m/n)z \\ z_1 = z - nt = z - (n/n)z = 0 \end{cases}$

Per cui l'equazione (25.32) diventa semplicemente

25.38 $$F(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z) = 0.$$

Essendo n ≠ 0, possiamo sempre scegliere il vettore **v** in modo che sia n = 1. In tal caso si ha

25.39 $$F(x - lz, y - mz) = 0$$

25.40. Esempio. Scrivere l'equazione del cilindro avente per direttrice la conica Ω del piano XY di equazione $x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ e le generatrici parallele alla retta s : 4x – z + 2 = 2y – z – 2 = 0.
Una terna di parametri direttori di s è la terna (l, m, n) = (1, 2, 4). Per la (25.38) si ha l'equazione

$(x - \frac{z}{4})^2 + 2(y - \frac{z}{2})^2 - 5 = 0$ ovvero $(4x - z)^2 + 8(2y - z)^2 - 80 = 0$ e infine

$$16x^2 + 32y^2 + 9z^2 - 8xz - 32yz - 80 = 0.$$

25.41. Esempio. Scrivere l'equazione del cilindro avente per direttrice la curva Ω del piano XY di equazione y = cos(x) e le generatrici parallele alla retta s : x – 2z = y + 3z –1 = 0.
Una terna di parametri direttori di s è la terna (l, m, n) = (2, –3, 1). Per la (25.39) si ha l'equazione

$$(y+3z) - \cos(x-2z) = 0.$$

25.42. Esempio. Scrivere l'equazione del cilindro avente per direttrice la circonferenza del piano XY di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e le generatrici parallele alla retta s : x = y = z.
Una terna di parametri direttori di s è la terna (l, m, n) = (1, 1, 1). Per la (25.39) si ha l'equazione

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 - 2(x-z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2x + 2z = 0.$$

25.43. Esempio. Scrivere l'equazione del cilindro avente per direttrice la curva Ω del piano XY di equazione $y = e^x$ e le generatrici parallele al vettore v = (–5, 4, 1). Per la (25.39) si ha l'equazione

$$y + 4z - e^{x+5z} = 0$$

25.44. Cilindro con direttrice sul piano XY e generatrici parallele all'asse Z.

Se il vettore **v** è parallelo all'asse Z, ovvero **v** = (l, m, n) = (0, 0, 1), l'equazione del cilindro è

25.45 $$F(x, y) = 0$$

25.46. Osservazione. In modo analogo si può dimostrare che un cilindro con direttrice sul piano XZ e generatrici parallele all'asse Y si può rappresentare con un'equazione cartesiana del tipo G(x, z) = 0 e che un cilindro con direttrice sul piano YZ e generatrici parallele all'asse X si può rappresentare con un'equazione cartesiana del tipo H(y, z) = 0.

In generale, si potrebbe dimostrare il seguente

25.47. Teorema. Nello spazio la superficie rappresentata da un'equazione cartesiana in due sole variabili è un cilindro con le generatrici parallele all'asse del sistema di riferimento avente il nome della variabile che manca e viceversa.

25.48. Definizione. Sia Φ un cilindro avente come direttrice una curva piana Ω e le generatrici parallele ad un vettore **v** non parallelo al piano π contenente Ω. Se Ω è una circonferenza e **v** è perpendicolare al piano π, allora diremo che Φ un *cilindro rotondo* o *cilindro circolare retto*. La retta s parallela a **v** e passante per il centro H di Ω viene detta *asse del cilindro*. Tale cilindro è la superficie delle ∞^1 rette parallele all'asse s ed aventi da essa distanza uguale al raggio r della circonferenza Ω.

25.49. Definizione. Sia ∑ una sfera di centro C e raggio r. Sia **v** un vettore non nullo. Sia Φ la superficie luogo delle rette parallele a **v** e tangenti a ∑. Non è difficile rendersi conto che i punti di tangenza di tali rette con la sfera formano una circonferenza Ω. Quindi Φ è un cilindro che viene detto *cilindro circoscritto alla sfera* ∑. Inoltre, la circonferenza Ω è una direttrice di tale cilindro.

25.50. Osservazione. Sia Φ il cilindro circoscritto alla sfera della definizione precedente e sia π il piano contenente la circonferenza direttrice Ω. Non è difficile rendersi conto che il vettore **v** è perpendicolare al piano π. Quindi, Φ è un cilindro rotondo.

25.51. Equazione del cilindro rotondo.

25.51.1 Del cilindro sono note l'equazione della sfera ∑ e del piano π.

In tal caso vettore **v** è un qualunque vettore perpendicolare al piano π. La circonferenza direttrice Ω è l'intersezione di π e ∑.

25.51.2. Del cilindro sono note l'equazione dell'asse s e il raggio r di Ω.

In tal caso il vettore **v** è un qualunque vettore parallelo all'asse s. Scelto, a piacere, un punto $H(x_H, y_H, z_H)$ sulla retta s, sia π il il piano passante per H e perpendicolare al vettore **v**. Infine, sia la sfera ∑ di centro H e raggio r. La circonferenza direttrice Ω è l'intersezione di π e ∑.

25.51.3. Il cilindro è circoscritto ad una sfera ∑ e ha le generatrici parallele ad un vettore **v**.

In tal caso sia π il piano passante per il centro C della sfera ∑ e perpendicolare a **v**. La circonferenza direttrice Ω è l'intersezione di π e ∑.

25.52. Esempi.

25.52.1 Sia Ω la circonferenza ottenuta come intersezione della sfera ∑ di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 1 = 0$ e del piano π di equazione cartesiana $x - 2y + z = 0$.

Un vettore perpendicolare a π è **v** (1, –2, 1) = (l, m, n). Per la (25.31) si ha $t = (x - 2y + z)/6$.

Per la (25.32) si ha $(x-t)^2 + (y+2t)^2 + (z-t)^2 - 2(x-t) + (y+2t) + 1 = 0$. Sostituendo il valore di t si ha

$$(5x+2y-z)^2 + 4(x+y+z)^2 + (-x+2y+5z)^2 - 12(5x+2y-z) + 12(x+y+z) + 36 = 0$$

ovvero $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz - 8x - 3y + 4z + 6 = 0$.

25.52.2 Trovare l'equazione cartesiana del cilindro circolare retto avente per asse la retta s di equazioni $x - 1 = z - 2 = 0$ e passante per il punto A(3, 0, 0). Un vettore parallelo all'asse s è il vettore **v** = (0, 1, 0) = (l, m, n). Il piano π passante per A è perpendicolare all'asse s ha equazione $y = 0$. Il punto d'intersezione di π con l'asse s è H(1, 0, 2). Il raggio della circonferenza Ω è uguale alla distanza del punto A dall'asse s ovvero la distanza di A da H. Quindi, $r^2 = 8$. Un'equazione della sfera di centro H e raggio r è $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 - 8 = 0$. Dalla (25.31) si ha $t = y$. Per la (25.32) si ha $((x-lt)-1)^2 + ((y-mt))^2 + ((z-nt)-2) - 8 = 0$ ovvero $(x-1)^2 + (z-2)^2 - 8 = 0$.

25.52.3 Trovare l'equazione del cilindro circoscritto alla sfera ∑ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z + 1 = 0$ e avente le generatrici parallele alla retta di equazioni $x = y = z$. Il centro di ∑ è C(1, –3/2, 1/2). Si ha che **v** = (1, 1, 1). Il piano π ha equazione $(x-1)+(y+3/2)+(z-1/2) = x+y+z$. Per la (25.31) si ha che $t = (x+y+z)/3$. Per la (25.32) si ha $(x-lt)^2 + (y-mt)^2 + (z-nt)^2 - 2(x-lt) + 3(y-mt) - (z-nt) + 1 = 0$

$$(2x-y-z)^2 + (-x+2y-z)^2 + (-x-y+2z)^2 - 6(2x-y-z) + 9(-x+2y-z) - 3(2x-y-z) + 9 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6x + 9y - 3z + 3 = 0.$$