Analisi Matematica II, Scritto A. Durata della prova: 2 ore **06.02.14**

Firma:..

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola:.................. **Corso di Laurea:**..............................

Esercizio 1

Dimostrare che l'equazione

$$g(x, y, z) = y \sin z + z \ln x + x - 1 = 0$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(1, 0, 0)$ una e una sola funzione $x = f(y, z)$. Mediante gli sviluppi di Taylor fino all'ordine necessario, verificare che il punto $(0, 0)$ é critico per la funzione implicitamente definita e determinarne la natura.

Esercizio 2

Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (xy, 0, yz)$$

e il dominio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1,\ x > 0,\ z > 0,\ 0 \leq y \leq 2\}.$$

Esercizio 3

Sia data la funzione $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ -1 & \text{se } 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

Si consideri il prolungamento di f su tutto $\mathbb{R}$ per periodicitá. Si disegni la funzione f. Si calcoli la serie di Fourier associata ad f e se ne discuta convergenza puntuale e uniforme.

Domanda 1

Dire sotto quali condizioni é garantita l'esistenza della soluzione per il problema di Cauchy.

Risposta

Domanda 2

Calcolare $(-3\sqrt{3}+3i)^4$.

Risposta

Esercizio 1

Risulta

- $g \in C^\infty(I)$ con I intorno del punto $(1,0,0)$
- $g(1,0,0) = 0$
- $g_x(x,y,z)\Big|_{(1,0,0)} = \left[\frac{z}{x} + 1 \right]_{(1,0,0)} = 1 \neq 0$

Sono, allora verificate le ipotesi del teorema della funzione implicita, in virtù del quale possiamo affermare che esiste un'unica funzione f definita in un intorno J del punto $(0,0)$, $f: J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tale che

- $g(f(y,z), y, z) = 0 \quad \forall (y,z) \in J$
- $f(0,0) = 1$
- f ha la stessa regolarità della funzione g, pertanto $f \in C^\infty(J)$.

Sviluppo di Taylor al I ordine: esso ha una struttura del tipo

$$x = f(y,z) = f(0,0) + f_y(0,0)y + f_z(0,0)z + o\left(\sqrt{y^2+z^2}\right) =$$

$$= 1 + f_y(0,0)y + f_z(0,0)z + o\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)$$

dove si devono determinare i coefficienti $f_y(0,0)$ e $f_z(0,0)$; si osservi che dalla precedente espressione segue che

(1) $$x - 1 = f_y(0,0)y + f_z(0,0)z + o\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)$$

Per ottenere lo sviluppo al I ordine, sostituiamo nell'equazione $g(x,y,z)=0$ gli sviluppi al primo ordine delle funzioni di variabile x in un intorno di $x=1$, delle funzioni di variabile y in un intorno di $y=0$ e delle funzioni di variabile z in un intorno di $z=0$ - Si ottiene

$$y\left(z+o(z)\right) + z\left[(x-1)+o(x-1)\right] + x-1 = 0;$$

$$(2) \quad yz + y\,o(z) + z(x-1) + z\cdot o(x-1) + x-1 = 0.$$

Osserviamo che yz è un $o(\sqrt{y^2+z^2})$ per $(y,z)\to(0,0)$ perché

$$\lim_{(y,z)\to(0,0)} \left|\frac{yz}{\sqrt{y^2+z^2}}\right| \leq \lim_{(y,z)\to(0,0)} \left|\frac{\cancel{\sqrt{y^2+z^2}}\; z}{\cancel{\sqrt{y^2+z^2}}}\right| = 0 \;;$$

di conseguenza anche $y\cdot o(z)$ è un $o(\sqrt{y^2+z^2})$.

Inoltre dalla (1) segue che

$$z\cdot(x-1) = f_y(0,0)\cdot zy + f_z(0,0)\cdot z^2 + z\cdot o(\sqrt{y^2+z^2})$$

dove si è già visto che zy è un $o(\sqrt{y^2+z^2})$ e, ragionando come prima, si vede che anche z^2 lo è; pertanto $z\cdot(x-1)$ e, a maggior ragione, $z\cdot o(x-1)$ sono degli $o(\sqrt{y^2+z^2})$.

Di conseguenza la (2) diventa

(3) $\quad x = 1 + o\left(\sqrt{y^2+z^2}\right),$

che è lo sviluppo al primo ordine della funzione $f(y,z)$. Da questo sviluppo segue che $f_y(0,0) = f_z(0,0) = 0$ e pertanto $(0,0)$ è un punto critico per la funzione $f(y,z)$. Per determinarne la natura sviluppiamo ulteriormente la funzione f.

Sviluppo al II ordine: nell'equazione $g(x,y,z)=0$ sostituiamo gli sviluppi delle funzioni elementari in modo da arrestarci al secondo ordine; si ha

(4) $\quad yz + y\,o(z) + z\cdot(x-1) + z\cdot o(x-1) + x-1 = 0 .$

Osserviamo che $y\cdot o(z)$ è un $o(y^2+z^2)$ per $(y,z)\to(0,0)$, perché

$$\lim_{(y,z)\to(0,0)} \left|\frac{y\cdot o(z)}{y^2+z^2}\right| = \lim_{(y,z)\to(0,0)} \left|\frac{o(z)}{z}\right| \left|\frac{yz}{y^2+z^2}\right| \leq$$

$$\leq \lim_{(y,z)\to(0,0)} \left|\frac{o(z)}{z}\right| \cdot \left|\frac{\frac{1}{2}\cancel{(y^2+z^2)}}{\cancel{y^2+z^2}}\right| = 0 .$$

Osserviamo inoltre che nei termini $z\cdot(x-1)$ e $z\cdot o(x-1)$ possiamo sostituire lo sviluppo al primo ordine di x, ottenendo

$$z\cdot(x-1) = z\cdot o\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)$$

$$z\cdot o(x-1) = z\cdot o\left(\sqrt{y^2+z^2}\right) \qquad ;$$

Anche $z\, o(\sqrt{y^2+z^2})$ è un $o(y^2+z^2)$ per $(y,z) \to (0,0)$ in quanto

$$\lim_{(y,z)\to(0,0)} \left| \frac{z\, o(\sqrt{y^2+z^2})}{y^2+z^2} \right| \leq$$

$$\leq \lim_{(y,z)\to(0,0)} \left| \frac{\sqrt{z^2+y^2} \cdot o(\sqrt{y^2+z^2})}{y^2+z^2} \right| =$$

$$= \lim_{(y,z)\to(0,0)} \left| \frac{o(\sqrt{y^2+z^2})}{\sqrt{y^2+z^2}} \right| = 0 .$$

In virtù di queste osservazioni la (4) diventa

$$yz + o(y^2+z^2) + x - 1 = 0 ;$$

$$x = 1 + yz + o(y^2+z^2)$$

che è lo sviluppo al II ordine.

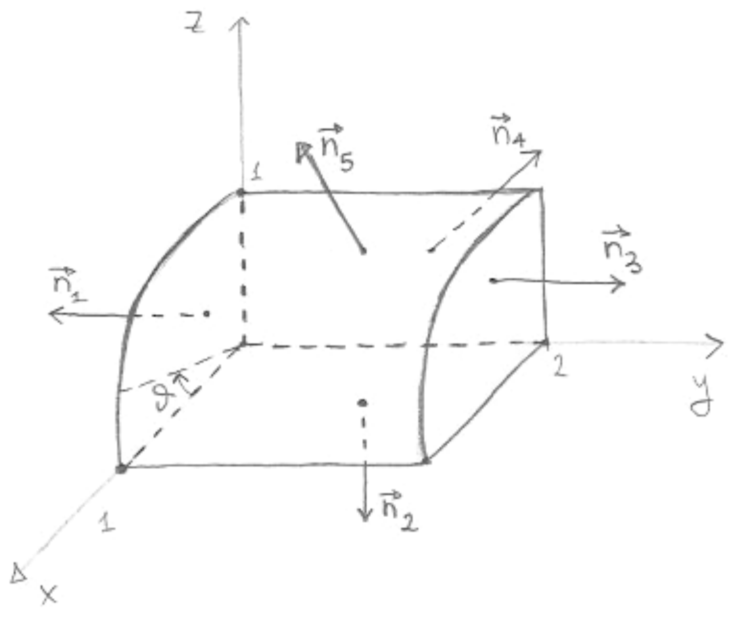
Da questo sviluppo al II ordine segue che $(0,0)$ è un punto di sella per $f(y,z)$; infatti in un qualunque intorno di $(0,0)$ cadono punti (y^+, z^+) con $y^+ > 0$ e $z^+ > 0$ sui quali $f(y^+, z^+) > 1$ e punti (y^-, z^+) con $y^- < 0$, $z^+ > 0$ sui quali $f(y^-, z^+) < 1$.

Esercizio 2

Il teorema della divergenza ci dice che dato un dominio ammissibile $D \subset \mathbb{R}^3$ e un campo vettoriale $\vec{F}$ di classe C^1,
l'integrale esteso a D della divergenza di $\vec{F}$ uguaglia il flusso di $\vec{F}$ uscente dal dominio D,

$$(1) \qquad \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{n}_e \rangle \, ds$$

Nel nostro caso il dominio D è la parte di cilindro di equazione $x^2 + z^2 \leq 1$ compreso nell'ottante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e che si trova al di sotto del piano $y = 2$.



Risulta
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 2y$$

Parametrizziamo il dominio D usando le coordinate cilindriche; si ha

$$\begin{cases} x(\rho, \vartheta, t) = \rho \cos\vartheta & \vartheta \in [0, \pi/2] \\ y(\rho, \vartheta, t) = t & \rho \in [0, 1] \\ z(\rho, \vartheta, t) = \rho \sin\vartheta & t \in [0, 2] \end{cases}$$

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2t\rho \, d\vartheta \, d\rho \, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\rho^2\right]_0^1 \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right|_0^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{2} = \pi.$$

Dobbiamo ora calcolare l'integrale superficiale. Osserviamo che ∂D è costituito dalle seguenti superfici S_i aventi le seguenti normali $\vec{n}_i$, $i = 1, .., 5$

S_1 $\vec{\varphi}_1 = \begin{cases} x(\rho, \vartheta) = \rho \cos\vartheta \\ y(\rho, \vartheta) = 0 \\ z(\rho, \vartheta) = \rho \sin\vartheta \end{cases}$ $\quad \rho \in [0, 1]$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$

$\vec{n}_1 = (0, -1, 0)$

S_2: $\vec{\varphi}_2 = \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = 0 \end{cases}$ $\quad u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2]$

$\vec{n}_2 = (0, 0, -1)$

S_3 $\vec{\varphi}_3 = \begin{cases} x(\rho, \vartheta) = \rho \cos\vartheta \\ y(\rho, \vartheta) = 2 \\ z(\rho, \vartheta) = \rho \sin\vartheta \end{cases}$ $\quad \rho \in [0, 1]$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$

$\vec{n}_3 = (0, 1, 0)$

$$S_4 \quad \vec{\varphi}_4 = \begin{cases} x(u,v) = 0 \\ y(u,v) = u \\ z(u,v) = v \end{cases} \qquad \begin{matrix} u \in [0,2] \\ v \in [0,1] \end{matrix}$$

$$\vec{n}_4 = (-1, 0, 0)$$

$$S_5 \quad \vec{\varphi}_5 = \begin{cases} x(t,\vartheta) = \cos\vartheta \\ y(t,\vartheta) = t \\ z(t,\vartheta) = \sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0, \pi/2] \\ t \in [0,2] \end{matrix}$$

$$\vec{\varphi}_{5_t} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{\varphi}_{5_\vartheta} = (-\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$$

$$\vec{\varphi}_{5_t} \wedge \vec{\varphi}_{5_\vartheta} = (\cos\vartheta, 0, \sin\vartheta)$$

$$\vec{m}_5 = \frac{\vec{\varphi}_{5_t} \wedge \vec{\varphi}_{5_\vartheta}}{\|\vec{\varphi}_{5_t} \wedge \vec{\varphi}_{5_\vartheta}\|} = (\cos\vartheta, 0, \sin\vartheta)$$

Osserviamo ora che

$$< \vec{F}, \vec{m}_1 > = 0$$

$$< \vec{F}(\vec{\varphi}_2(u,v)), \vec{m}_2 > = 0$$

$$< \vec{F}, \vec{n}_3 > = 0$$

$$< \vec{F}(\vec{\varphi}_4(u,v)), \vec{m}_4 > = 0 \quad ,$$

quindi

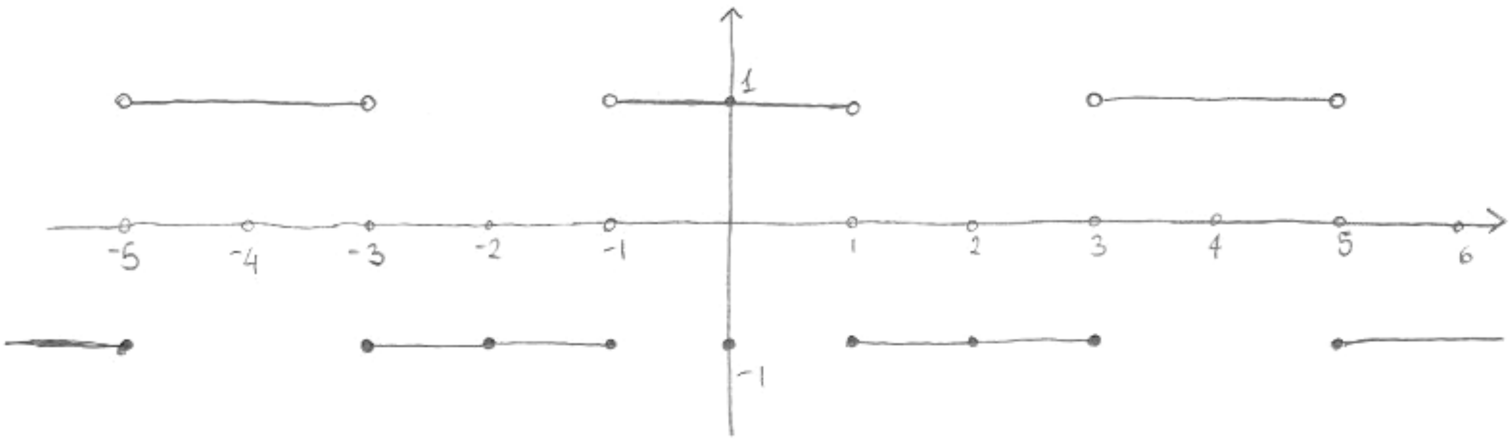
$$\iint_{\partial D} < \vec{F}, \vec{m}_e > ds = \iint_{S_5} < \vec{F}, \vec{m}_5 > ds =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \langle (t\cos\vartheta, 0, t\sin\vartheta), (\cos\vartheta, 0, \sin\vartheta) \rangle \, d\vartheta \, dt =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \left(t\cos^2\vartheta + t\sin^2\vartheta \right) d\vartheta \, dt =$$

$$= \pi/2 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right|_0^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{2} = \pi$$

Esercizio 3



Essendo f pari, la serie di Fourier ad essa associata sarà una funzione di soli coseni.
Calcoliamo i coefficienti di Fourier.

Essendo f una funzione 4-periodica, si ha

$$a_0 = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \int_0^2 f(t)\,dt = 0.$$

$$a_n = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \int_{-2}^{2} f(t) \cos \frac{2\pi n}{4} t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \int_0^2 f(t) \cos \frac{\pi n}{2} t\,dt =$$

$$= \int_0^1 \cos \frac{\pi n}{2} t\,dt + \int_1^2 - \cos \frac{\pi n}{2} t\,dt =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} t \right|_0^1 - \left[\frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} t \right|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} =$$

$$= \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}$$

Osserviamo che $a_n = 0$ per ogni n pari.
Quindi sono non nulli solo i coefficienti di Fourier della forma a_{2k+1} con $k = 0, 1, 2, \dots$
e

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} =$$

$$= \frac{4}{\pi(2k+1)} \operatorname{sen}\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi(2k+1)} (-1)^k .$$

In conclusione la serie di Fourier associata ad f è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)} \cos \frac{\pi(2k+1)}{2} x$$

Convergenza puntuale:
osserviamo che la nostra funzione f è C^1 in tutti i punti diversi da $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$; in tali punti $2k+1$, comunque, esistono finiti i limiti destro e sinistro e le pseudoderivate destra e sinistra.
Pertanto possiamo applicare il teorema di convergenza puntuale del Dini e concludere che la serie di Fourier associata ad f converge per ogni $x \in \mathbb{R}$; in particolare per $x \neq 2k+1$

converge a $f(x)$ e nei punti del tipo $2k+1$ converge puntualmente a

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to(2k+1)^-} f(x) + \lim_{x\to(2k+1)^+} f(x)\right] = \emptyset$$

Convergenza uniforme:

non può esserci convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$ alla funzione f, perché f non è continua in $\mathbb{R}$. Per il teorema della convergenza uniforme, però, possiamo dire che la serie di Fourier converge uniformemente a f in tutti i sottointervalli chiusi in cui f è continua (essendo in tali sottointervalli anche C^1).