Analisi Matematica II, Scritto A. Durata della prova: 2 ore **16.01.14**

Firma:..............................

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

Esercizio 1

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{5}{2n}\right)^x \quad \text{in } [0, \infty).$$

Esercizio 2

Studiare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2(2e^{-y} - 1) \\ y(0) = \ln 3. \end{cases}$$

Esercizio 3

Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\, ,\ \frac{3y}{x^2 + y^2}\, ,\ 1\right)$$

e la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2 + y^2, \quad 0 < \delta \leq z \leq \frac{1}{4}\right\}$$

orientata in modo che il versore normale punti verso l'alto.

Domanda 1

Dare la definizione di dominio semplicemente connesso.

Risposta

Domanda 2

Calcolare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = -1$.

Risposta

Esercizio 1

Risulta $f_n \in C^\infty([0,+\infty[)$.

- Convergenza puntuale:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2n}\right)^x = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

La successione di funzioni data converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

- Convergenza uniforme:

Poichè il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua, ed, essendo f discontinua in $x=0$, possiamo sicuramente affermare che f_n non converge uniformemente a f.

Studiamo la convergenza uniforme negli intervalli $[\alpha,+\infty[$ con $\alpha>0$.

Risulta

$$\sup_{x\in[\alpha,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} \left(\frac{5}{2n}\right)^x;$$

per $n\geq 3$, la funzione $\left(\frac{5}{2n}\right)^x$ è strettamente decrescente, quindi

$$\sup_{x\in[\alpha,+\infty[} \left(\frac{5}{2n}\right)^x = \left(\frac{5}{2n}\right)^\alpha \qquad \forall n \geq 3 .$$

Di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2n}\right)^\alpha = 0 \quad ;$$

pertanto la successione di funzioni f_n converge uniformemente alla funzione f in tutti gli intervalli $[\alpha, +\infty[$ con $\alpha > 0$.

Si osservi infine che f_n non converge uniformemente a f nell'intervallo aperto $]0,+\infty[$; infatti se si convergesse dovrebbe valere il teorema di scambio dei limiti; invece nel nostro caso risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to 0} f_n(x) \right) = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) = \emptyset$$

Esercizio 2

La funzione $f(x,y) = x^2 (2e^{-y} - 1)$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pertanto per il teorema di Cauchy-Lipschitz, il problema di Cauchy dato ammette un'unica soluzione in un intorno del dato iniziale.

Verifichiamo se l'equazione differenziale $y' = x^2(2e^{-y} - 1)$ possiede soluzioni stazionarie; un'eventuale soluzione stazionaria $y_{ST}(x) \equiv y_0$ deve verificare l'uguaglianza

$$x^2(2e^{-y_0} - 1) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$2e^{-y_0} - 1 = 0;$$

$$y_0 = \ln 2.$$

Quindi la nostra equazione differenziale possiede la soluzione stazionaria $y_{ST}(x) \equiv \ln 2$ che, però, non è soluzione del problema di Cauchy perchè non verifica la condizione iniziale.

Inoltre, per il teorema di Cauchy-Lipschitz, possiamo dire che la nostra soluzione $y(x)$ non assumerà mai il valore $\ln 2$; siccome deve essere $y(0) = \ln 3 > \ln 2$, deduciamo allora che la soluzione del nostro problema di Cauchy verifica la proprietà

$y(x) > \ln 2$ per ogni x.

Cerchiamo ora la soluzione $y(x)$ con il metodo della separazione delle variabili:

$$\int_{\ln 3}^{y(x)} \frac{d\xi}{2e^{-\xi}-1} = \int_0^x t^2\, dt;$$

$$\int_{\ln 3}^{y(x)} \frac{e^{\xi}}{2-e^{\xi}}\, d\xi = \frac{x^3}{3};$$

$$\Big[-\ln|2-e^{\xi}|\Big]_{\xi=\ln 3}^{\xi=y(x)} = \frac{x^3}{3};$$

$$+\ln|2-e^{y(x)}| = -\frac{x^3}{3};$$

$$|2-e^{y(x)}| = e^{-x^3/3};$$

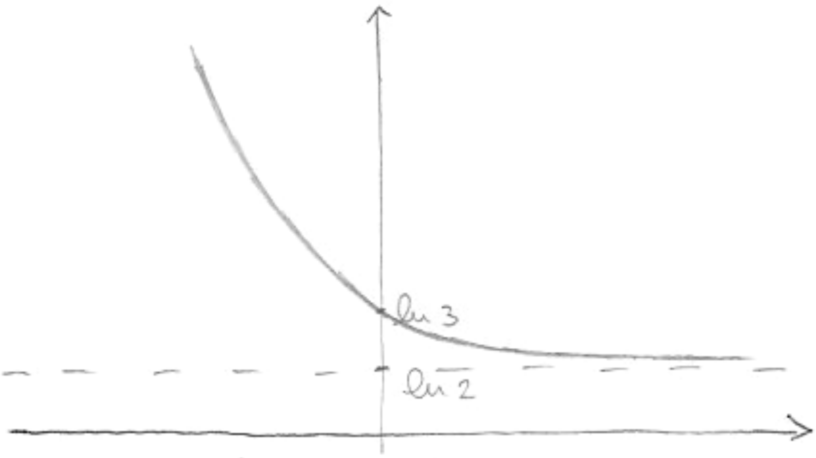
Siccome deve essere $y(x) > \ln 2$, segue che $|2-e^{y(x)}| = e^{y(x)}-2$; allora si ha

$$e^{y(x)} - 2 = e^{-x^3/3};$$

$$e^{y(x)} = 2 + e^{-x^3/3} \quad \text{dove } 2+e^{-x^3/3} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$y(x) = \ln\left(2+e^{-x^3/3}\right).$$

La soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e ha un andamento grafico del tipo



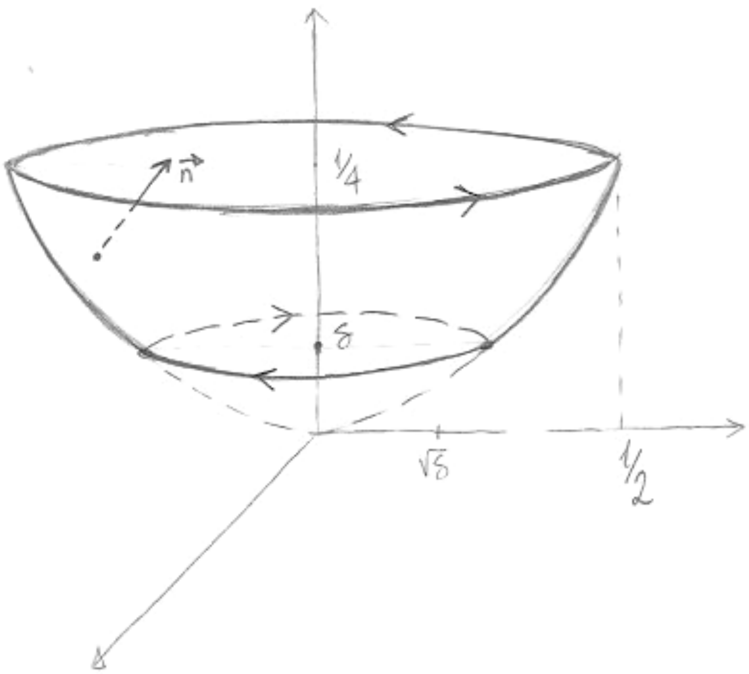
Esercizio 3

Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$(*) \qquad \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot ds$$

dove $\vec{F}$ è un campo vettoriale, S una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+ S$ il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa.

Nel nostro caso la superficie S è la parte di



paraboloide $z = x^2 + y^2$ (paraboloide di vertice (0,0,0) rivolto verso l'alto) compresa tra i piani $z = \delta$ e $z = 1/4$.

Il campo $\vec{F}$ è definito e C^∞ nell'insieme aperto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \neq (0,0,z)\}$$

che contiene la superficie S.

Cominciamo con il calcolare l'integrale superficiale.

Risulta

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{3y}{x^2+y^2} & 1 \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{-2xy}{x^2+y^2}\right)$$

Parametrizziamo la superficie S come segue

$$\vec{\Phi}(\rho,\vartheta) = \begin{cases} x(\rho,\vartheta) = \rho\cos\vartheta \\ y(\rho,\vartheta) = \rho\sin\vartheta \\ z(\rho,\vartheta) = \rho^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \in [\sqrt{8}, 1/2] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\vec{\Phi}_\rho \wedge \vec{\Phi}_\vartheta$, dove

$$\vec{\Phi}_\rho(\rho,\vartheta) = (\cos\vartheta \ , \ \sin\vartheta \ , \ 2\rho) \ ,$$

$$\vec{\Phi}_\vartheta(\rho,\vartheta) = (-\rho\cos\vartheta, \ \rho\cos\vartheta, \ 0) \ ,$$

$$\vec{\Phi}_\rho \wedge \vec{\Phi}_\vartheta(\rho,\vartheta) = (-2\rho^2\cos\vartheta, -2\rho^2\sin\vartheta, \rho);$$

essendo richiesto il versore normale che punta verso l'alto, allora

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{\Phi}_\rho \wedge \vec{\Phi}_\vartheta\|}(-2\rho^2\cos\vartheta, -2\rho^2\sin\vartheta, \rho) .$$

Si ha

$$\int_S \langle \text{rot}\,\vec{F}, \vec{n} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{8}}^{1/2} \langle (\text{rot}\,\vec{F})(\vec{\Phi}(\rho,\vartheta)), \vec{n} \rangle \, \| \vec{\Phi}_\rho \wedge \vec{\Phi}_\vartheta \| \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{8}}^{1/2} \langle (0, 0, \frac{-2\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho^4}), (-2\rho^2\cos\vartheta, -2\rho^2\sin\vartheta, \rho) \rangle \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{8}}^{1/2} \frac{-2\cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho} \, d\rho \, d\vartheta = \left[\ln \rho \right]_{\sqrt{8}}^{1/2} \left[\cos^2\vartheta \right]_0^{2\pi} = 0 .$$

Calcoliamo ora l'integrale di destra della (*). Nel nostro caso il bordo della superficie $\partial^+ S$ è costituito dalle due circonferenze

$$C_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ z = 8 \end{cases} \qquad C_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1/4 \\ z = 1/4 \end{cases}$$

dove il verso di percorrenza delle circonferenze deve essere scelto in accordo con l'orientazione della superficie (si veda la figura).

C_1 ha parametrizzazione

$$\vec{r}_1(\vartheta) : \begin{cases} x(\vartheta) = \sqrt{8} \cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sqrt{8} \sin\vartheta \\ z(\vartheta) = 8 \end{cases}$$

con ϑ che va da 2π a 0

e vettore tangente

$$\vec{T}_1(\vartheta): \begin{cases} \dot{x}(\vartheta) = -\sqrt{8}\sin\vartheta \\ \dot{y}(\vartheta) = \sqrt{8}\cos\vartheta \\ \dot{z}(\vartheta) = 0 \end{cases}$$

C_2 ha parametrizzazione

$$\vec{r}_2(\vartheta): \begin{cases} x(\vartheta) = \frac{1}{2}\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \frac{1}{2}\sin\vartheta \\ z(\vartheta) = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

e vettore tangente

$$\vec{T}_2(\vartheta): \begin{cases} \dot{x}(\vartheta) = -\frac{1}{2}\sin\vartheta \\ \dot{y}(\vartheta) = \frac{1}{2}\cos\vartheta \\ \dot{z}(\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Allora

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F}\cdot ds = \int_{C_1} \vec{F}\cdot ds + \int_{C_2} \vec{F}\cdot ds =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} < \vec{F}(\vec{r}_1(\vartheta)), \vec{T}_1(\vartheta) > d\vartheta + \int_0^{2\pi} < \vec{F}(\vec{r}_2(\vartheta)), \vec{T}_2(\vartheta) > d\vartheta =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} < \left(\frac{2\sqrt{8}\cos\vartheta}{8}, \frac{3\sqrt{8}\sin\vartheta}{8}, 1\right), \left(-\sqrt{8}\sin\vartheta, \sqrt{8}\cos\vartheta, 0\right) > d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} < \left(\frac{\cos\vartheta}{1/4}, \frac{3/2\sin\vartheta}{1/4}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}\sin\vartheta, \frac{1}{2}\cos\vartheta, 0\right) > d\vartheta =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \sin\vartheta\cos\vartheta \, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \sin\vartheta\cos\vartheta \, d\vartheta = 0 \, .$$

La formula del teorema di Stokes è verificata.