11. Rango di una matrice.

Consideriamo una matrice di tipo m×n ad elementi reali rappresentata nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ . & . & . & . & .\ .\ . & . & . \\ . & . & . & . & .\ .\ . & . & . \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & a_{(m-1)3} & a_{(m-1)4} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{(m-1),(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Per ogni i = 1, 2, 3, …, (m-1), m, col simbolo A_i indicheremo la i-esima riga della matrice A.

Per ogni j = 1, 2, 3, …, (n-1), n, col simbolo A^j indicheremo la j-esima colonna della matrice A.

Osservando che ogni riga di A è una n-upla ordinata di numeri reali possiamo scrivere

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{m-1}, A_m \in R^n$$

e parleremo di *vettore riga*.

Osservando che ogni colonna di A è una m-upla ordinata di numeri reali possiamo scrivere

$$A^1, A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}, A^n \in R^m.$$

e parleremo di *vettore colonna*.

11.1. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

Le due **righe** di A sono le **terne** ordinate $A_1 = (2, 3, 0)$ e $A_1 = (1, -7, 4)$.

Le tre **colonne** di A sono le **coppie** ordinate $A^1 = (2, 1)$, $A^2 = (3, -7)$ e $A^3 = (0, 4)$.

Le righe di A sono vettori dello spazio R^3 delle terne ordinate di numeri reali.

Le colonne di A sono vettori dello spazio R^2 delle coppie ordinate di numeri reali.

11.2. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 23 & 4 \end{bmatrix}$.

Le tre **righe** di A sono le **terne** ordinate $A_1 = (1, 1, 0)$, $A_2 = (0, 5, 1)$ e $A_3 = (3, 23, 4)$.

Le tre **colonne** di A sono le **terne** ordinate $A^1 = (1, 0, 3)$, $A^2 = (1, 5, 23)$ e $A^3 = (0, 1, 4)$.

Sia le righe che le colonne di A sono vettori dello spazio R^3 delle terne ordinate di numeri reali.

Ricordiamo che col simbolo M(m, n, R) indichiamo l'insieme (spazio vettoriale) contenente tutte e sole le matrici di tipo m×n ad elementi reali.

11.3. Definizione. Sia $A \in M(m, n, R)$. Siccome le righe di A sono vettori dello spazio R^n possiamo considerare il sottospazio $<A_1, A_2, A_3, \dots, A_{m-1}, A_m>$ da essi generato. Tale sottospazio viene detto *spazio delle righe* della matrice A e indicato col simbolo $\mathcal{R}_A$. Quindi,

$$\mathcal{R}_A = <A_1, A_2, A_3, \dots, A_{m-1}, A_m>$$

11.4. Definizione. Sia $A \in M(m, n, R)$. Siccome le colonne di A sono vettori dello spazio R^m possiamo considerare il sottospazio $<A^1, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}, A^n>$ da essi generato. Tale sottospazio viene detto *spazio delle colonne* della matrice A e indicato col simbolo $\mathcal{C}_A$. Quindi,

$$\mathcal{C}_A = <A^1, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}, A^n>$$

11.5. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 17 \end{bmatrix}$.

• Lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A è il sottospazio di R^3 generato dalle terne
$A_1 = (2, 3, 0)$ e $A_2 = (1, -7, 17)$. Cioè, $\mathcal{R}_A = <(2, 3, 0), (1, -7, 17)>$.

• Lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A è il sottospazio di R^2 generato dalle coppie
$A^1 = (2, 1)$, $A^2 = (3, -7)$ e $A^3 = (0, 17)$. Cioè, $\mathcal{C}_A = <(2, 1), (3, -7), (0, 17)>$.

• Si noti che gli spazi $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ sono sottospazi di spazi diversi.
Quindi, **non ha senso** chiedersi se essi siano uguali.

• Osservando che nessuna delle due terne (2, 3, 0) e (1, -7, 17) è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che esse sono linearmente indipendenti. Poiché sono anche generatori di $\mathcal{R}_A$ abbiamo provato che B = ((2, 3, 0), (1, -7, 17)) è una base dello spazio $\mathcal{R}_A$ .Quindi, $\dim\mathcal{R}_A = 2$.

• Si noti che la coppia $A^3 = (0, 17)$ si può scrivere come combinazione lineare delle altre due $A^1 = (2, 1)$, $A^2 = (3, -7)$. Infatti, $3(2, 1) + (-2)(3, -7) = (0, 17)$. Quindi, $(0, 17) \in <(2, 1), (3, -7)>$ e

$$<(2, 1), (3, -7)> = <(2, 1), (3, -7), (0, 17)> = \mathcal{C}_A$$

Per cui le due coppie (2, 1) e (3, -7) sono sufficienti per generare lo spazio delle colonne. Osservando che nessuna delle due coppie (2, 1) e (3, -7) è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che quelle due coppie sono anche linearmente indipendenti. Abbiamo provato che B' = ((2, 1), (3, -7)) è una base dello spazio $\mathcal{C}_A$. Quindi, $\dim\mathcal{C}_A = 2$.

11.6. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 23 & 4 \end{bmatrix}$.

• Lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A è il sottospazio di R^3 generato dalle terne
$A_1 = (1, 1, 0)$, $A_2 = (0, 5, 1)$ e $A_3 = (3, 23, 4)$. Cioè, $\mathcal{R}_A = <(1, 1, 0), (0, 5, 1), (3, 23, 4)>$.

• Lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A è il sottospazio di R^3 generato dalle terne
$A^1 = (1, 0, 3)$, $A^2 = (1, 5, 23)$ e $A^3 = (0, 1, 4)$. Cioè, $\mathcal{C}_A = <(1, 0, 3), (1, 5, 23), (0, 1, 4)>$.

• In questo caso lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe e lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A sono sottospazi dello <u>stesso spazio</u> R^3. Quindi, **<u>ha senso</u>** chiedersi se essi siano uguali.

• Si noti che la terna $A_3 = (3, 23, 4)$ si può scrivere come combinazione lineare delle altre due
$A_1 = (1, 1, 0)$ e $A_2 = (0, 5, 1)$. Infatti, $3(1, 1, 0) + 4(0, 5, 1) = (3, 23, 4)$.
Quindi, $(3, 23, 4) \in <(1, 1, 0), (0, 5, 1)>$ e

$$<(1, 1, 0), (0, 5, 1)> = <(1, 1, 0), (0, 5, 1), (3, 23, 4)> = \mathcal{R}_A$$

Per cui le due terne (1, 1, 0), (0, 5, 1) sono sufficienti per generare lo spazio delle righe.
Inoltre, osservando che nessuna delle due terne è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che quelle due terne sono anche linearmente indipendenti. Abbiamo provato che $B = ((1, 1, 0), (0, 5, 1))$ è una base dello spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A. Quindi, $\dim\mathcal{R}_A = 2$.

• Si noti che la terna $A^2 = (1, 5, 23)$ si può scrivere come combinazione lineare delle altre due

$A^1 = (1, 0, 3)$ e $A^3 = (0, 1, 4)$. Infatti, $1(1, 0, 3) + 5(0, 1, 4) = (1, 5, 23)$.

Quindi, $(1, 5, 23) \in <(1, 0, 3), (0, 1, 4)>$ e

$$<(1, 0, 3), (0, 1, 4)> = <(1, 0, 3), (1, 5, 23), (0, 1, 4)> = \mathcal{C}_A$$

Per cui le due terne (1, 0, 3), (0, 1, 4) sono sufficienti per generare lo spazio delle colonne.
Inoltre, osservando che nessuna delle due terne è multipla dell'altra (cioè non sono proporzionali) si ha che quelle due terne sono anche linearmente indipendenti. Abbiamo provato che $B' = ((1, 0, 3), (0, 1, 4))$ è una base dello spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A. Quindi, $\dim\mathcal{C}_A = 2$.

• La terna (3, 23, 4), che ovviamente appartiene allo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A (è la terza riga di A) **<u>non</u>** appartiene allo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A. Infatti, non è possibile ottenere la terna
(3, 23, 4) come combinazione lineare degli elementi della base B' dello spazio $\mathcal{C}_A$.

$(3, 23, 4) \in \mathcal{C}_A \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 4) = (3, 23, 4) \iff$

$\iff \exists \alpha,\beta \in R : (\alpha, \beta, 3\alpha+4\beta) = (3, 23, 4) \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha = 3$ et $\beta = 23$ et $3\alpha+4\beta = 4 \iff$

$\iff 9 + 92 = 4 \iff 101 = 4$ **(assurdo)**

• La terna (1, 5, 23), che ovviamente appartiene allo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A (è la seconda riga di A) **non** appartiene allo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe di A. Infatti, non è possibile ottenere la terna (1, 5, 23) come combinazione lineare degli elementi della base B dello spazio $\mathcal{R}_A$.

$(1, 5, 23) \in \mathcal{R}_A \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 5, 1) = (1, 5, 23) \iff$

$\iff \exists \alpha,\beta \in R : (\alpha, \alpha+5\beta, \beta) = (1, 5, 23) \iff \exists \alpha,\beta \in R : \alpha = 1$ et $\beta = 23$ et $\alpha+5\beta = 5 \iff$

$\iff 1 + 105 = 5 \iff 106 = 5$ **(assurdo)**

• La terna (19, –16, –7) appartiene sia allo spazio $\mathcal{R}_A$ che allo spazio $\mathcal{C}_A$ infatti

$(19, -16, -7) = 19(1, 1, 0) + (-7)(0, 5, 1)$ et $(19, -16, -7) = 19(1, 0, 3) + (-16)(0, 1, 4)$

• Ne concludiamo che i sottospazi $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ hanno intersezione non vuota ma nessuno dei due è sottospazio dell'altro. In particolare, si ha che i sottospazi $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ sono diversi.

11.7. Osservazione. Nei due precedenti esempi abbiamo visto che:

11.7.1. $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ **non sono**, in generale, sottospazi dello **stesso** spazio;

11.7.1. anche quando $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ sono sottospazi dello stesso spazio, in generale, si ha $\mathcal{R}_A \neq \mathcal{C}_A$.

11.8. Osservazione. In ognuno dei due precedenti esempi abbiamo visto che $\dim\mathcal{R}_A = \dim\mathcal{C}_A$.

Quanto osservato in 11.8 è vero in generale, cioè si può provare il seguente:

11.9. Teorema. Lo spazio $\mathcal{R}_A$ delle righe e lo spazio $\mathcal{C}_A$ delle colonne di una matrice A hanno la **stessa** dimensione.

Tenendo conto del Teorema 11.9 è ben posta la seguente

11.10. Definizione. Diremo *rango di una matrice* A, e lo indicheremo col simbolo rg(A), la dimensione del suo spazio delle righe oppure la dimensione del suo spazio delle colonne.

11.11. Osservazione. Se $A \in M(m, n, R)$ allora $0 \leq rg(A) \leq \min\{m, n\}$. Inoltre, $rg(A) = 0$ se e solo se A è la matrice nulla (tutti i suoi elementi sono uguali a zero).

Infatti,

$rg(A) = 0 \iff \dim\mathcal{R}_A = 0 \iff \mathcal{R}_A = \{\mathbf{0}\}$ (spazio nullo) $\iff$ tutti i generatori $\mathcal{R}_A$ sono uguali al vettore nullo $\iff$ tutte le righe di A sono nulle $\iff$ A è la matrice nulla

11.12. Definizione. Diremo che $A \in M(m, n, R)$ è una *matrice a scalini* se verifica le proprietà:

(SCAL1) Se una riga di A è la riga **nulla** (cioè i suoi elementi sono tutti zeri) allora sotto di essa ci possono essere solo righe nulle.

(SCAL2) Se $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, \ldots, a_{i(n-2)}, a_{i(n-1)}, a_{in},)$ è una riga **non nulla** e j è il minimo indice di colonna per cui è $a_{ij} \neq 0$ (cioè $h < j \Rightarrow a_{ij} = 0$) allora $a_{(i+1),k} = 0$ per ogni $k \leq j$.

11.13. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ **non** è a scalini. Infatti, poiché la prima riga non è nulla e $a_{11} = 2 \neq 0$ si ha che $j = 1$ è il minimo indice di colonna per cui $a_{1j} \neq 0$. Per soddisfare la proprietà (SCAL2) dovrebbe essere $a_{2,k} = 0$ per ogni $k \leq j = 1$ cioè $a_{21} = 0$. Ma $a_{21} = -1 \neq 0$.

11.14. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.15. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **non** è a scalini. Perché?

11.16. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.17. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.18. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.19. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **non** è a scalini. Perché?

11.20. Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è a scalini. Perché?

11.21. Osservazione. Sia A una matrice **a scalino**.

Se A_x è una riga non nulla di A, allora con il simbolo j_x indicheremo l'indice di colonna del primo elemento non nullo di tale riga, cioè si ha che $a_{xj_x} \neq 0$ e che $a_{xj} = 0$ per ogni $j \leq j_x$.

Valgono le seguenti proprietà:

11.21.1. Se la i-esima riga A_i con $i \geq 2$ è non nulla, allora sono non nulle anche tutte le (i–1) righe al di sopra di essa, cioè $A_h = 0$ se $1 \leq h \leq (i-1)$.

11.21.2. Se A_i e A_{i+1} sono due righe non nulle di A, allora si ha che $j_{(i+1)} \geq j_i + 1$.

11.21.3. Se A_i e A_{i+s} sono due righe non nulle di A, allora si ha che $j_{(i+s)} \geq j_i + s$.

11.21.4. Se A_h è una riga non nulla di A, allora si ha che $j_h \geq h$.

In altre parole, se A_h è una riga non nulla di A e a_{hj} è il suo primo elemento non nullo, allora l'indice di colonna j è maggiore o uguale all'indice di riga h.

11.21.5. Se A_k è una riga non nulla di A allora per ogni $h \geq (k+1)$ e per ogni $j \leq j_k$ si ha che $a_{hj}= 0$.

11.21.6. Se A_k è una riga non nulla di A allora per ogni $h \geq (k+1)$ si ha che $a_{hj_k}= 0$.

In altre parole, se A_k è una riga non nulla di A e a_{kj} è il suo primo elemento non nullo, allora è nullo ogni elemento della matrice che si trova ***"sotto"*** all'elemento a_{kj}.

Dimostrazione.

11.21.1. Immediata conseguenza di (SCAL1).

11.21.2. Immediata conseguenza di (SCAL2).

11.21.3. Se s = 1 la tesi è vera per la 11.21.2. Supponiamo che la tesi sia vera per (s – 1), cioè che sia $j_{(i+s-1)} \geq j_i + (s-1)$. Proviamo la tesi per s. Applicando la 11.21.2. abbiamo che

$j_{(i+s)} \geq j_{(i+s-1)} + 1$. Quindi, $j_{(i+s)} \geq j_{(i+s-1)} + 1 \geq j_i + (s-1) + 1 = j_i + s$.

11.21.4. Se h = 1 allora per ogni indice j di colonna si ha che $j \geq 1$. Quindi, $j_1 \geq 1$.

Se $h \geq 2$, allora tutte le (h–1) righe al di sopra di A sono non nulle. Applicando la 11.21.3. alla prima riga A_1 e alla riga A_h abbiamo che $s = (h-1)$ e $j_h \geq j_1 + s \geq 1 + (h-1) = h$.

11.21.5. Per 11.21.3 abbiamo che $j_h \geq j_k + (h-k) \geq j_k + 1$. Quindi, è $j_h > j_k$.

Se esistessero $j \leq j_k$ e $h \geq (k+1)$ tale che $a_{hj} \neq 0$ allora il primo elemento non nullo della h-esima riga avrebbe indice di colonna $j_h \leq j$, da cui $j_h \leq j_k$. Essendo ciò assurdo, si ha la tesi.

11.21.6. Caso particolare di 11.21.5 con $j = j_k$ ■

11.22. Esempio.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 5 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{12} = 2 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della prima riga, $1 < 2$.

Si osservi che tutti gli elementi al di sotto di a_{12} sono nulli.

$a_{23} = -1 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della seconda riga, $2 < 3$.

Si osservi che tutti gli elementi al di sotto di a_{23} sono nulli.

$a_{35} = 7 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della terza riga, $3 < 5$.

Si osservi che tutti gli elementi al di sotto di a_{35} sono nulli.

$a_{48} = 5 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della quarta riga, $4 < 8$.

Si osservi che tutti gli elementi al di sotto di a_{48} sono nulli.

$a_{59} = 11 \neq 0$ è il primo elemento non nullo della quinta riga, $5 < 9$.

Si osservi che tutti gli elementi al di sotto di a_{59} sono nulli.

Si osservi che per ognuno dei cinque primi elementi non nulli a_{12} , a_{23} ,a_{35} , a_{48} e a_{59} visti sopra si ha che l'indice di colonna è sempre maggiore o uguale dell'indice di riga.

11.23. Teorema. Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero delle sue righe non nulle.

Dimostrazione. (omessa)

11.24. Esempio. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 5 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

di tipo 7×9 **a scalini** avente le ultime due righe nulle.

VERIFICHIAMO che rg(A) = 5 = numero delle righe non nulle di A. Ovvero proviamo che le prime cinque righe di A sono linearmente indipendenti.

Per far ciò consideriamo una combinazione lineare delle prime cinque righe con coefficienti α_1 , α_2 , α_3 , α_4 e α_5 e la poniamo uguale alla 9-upla $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9)$.

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 + \alpha_5 A_5 = S$$

Infine proviamo che $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, ovvero che il risultato della combinazione lineare è il vettore nullo, se e **SOLO SE** $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

Tenendo conto di questa figura,

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 5 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9 \end{array} \end{array}$$

è facile rendersi conto che

$s_1 = 0 = 0$ (identità)

$s_2 = 2\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0$

$s_3 = 3\alpha_1 + (-1)\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1)\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0$

$s_4 = 5\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$ (identità)

$s_5 = (-1)\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7\alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 0$

$s_6 = 5\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$ (identità)

$s_7 = 5\alpha_1 + (-3)\alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$ (identità)

$s_8 = 5\alpha_1 + (-2)\alpha_2 + 4\alpha_3 + 8\alpha_4 = 0 \Rightarrow \quad 8\alpha_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = 0$

$s_9 = 7\alpha_1 + 1\alpha_2 + 6\alpha_3 + 0\alpha_4 + 11\alpha_5 = 0 \Rightarrow \quad 11\alpha_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_5 = 0$.

11.25. Teorema. Sia A una matrice non nulla di tipo m×n.

Le righe A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , …, $A_{(m-1)}$ e A_m , sono un insieme di generatori dello spazio $\mathcal{R}_A$.

Tramite un numero **finito** di **opportune** operazioni elementari applicate alle righe di A è **sempre** possibile trovare m nuovi generatori B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , …, $B_{(m-1)}$ e B_m di $\mathcal{R}_A$ tali che la matrice B avente proprio tali generatori come righe è una matrice di tipo m×n **a scalino**.

Ovviamente, $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$ e, quindi, rg(A) = rg(B) = numero di righe non nulle di B.

Dimostrazione. (omessa)

11.26. Esempio. Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -1 & 0 & -3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

(OE1) Scambiamo tra loro la prima e la terza riga e otteniamo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -1 & 0 & -3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

(OE3) Poiché $b_{33} = 2 \neq 0$ sostituiamo la terza riga con $B_3 + 2B_1$ e otteniamo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

(OE1) Scambiamo la terza riga con la seconda riga e otteniamo

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

(OE3) Scambiamo la sesta riga con la terza riga e otteniamo

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -17 & -11 \end{bmatrix}$$

- Siccome $e_{56} = 3 \neq 0$ sostituiamo la quinta riga con $E_5 + (-1)E_3$
- Siccome $e_{76} = -6 \neq 0$ sostituiamo la settima riga con $E_7 + 2E_3$ e otteniamo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

(OE1) Scambiamo la quinta riga con la quarta riga e otteniamo

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

• Siccome $g_{77} = -1 \neq 0$ sostituisco la settima riga con $G_7 + (-1)G_4$ e otteniamo

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice H è a scalini e il suo rango è 4.

Si noti che le 8 matrici A, B, C, D, E, F, G e H sono a **due a due diverse** tra loro.

Però, siccome abbiamo usato solo operazioni elementari per righe, si ha che

$$rg(A) = rg(B) = rg(C) = rg(D) = rg(E) = rg(F) = rg(G) = rg(H) = 4$$

11.27. Esempio. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Scambiamo la terza riga con la prima riga e otteniamo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

• $b_{21} = 3 \neq 0$ sostituisco la seconda riga con $B_2 + (-3)B_1 = (0, -3, -2)$

• $b_{31} = 2 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $B_3 + (-2)B_1 = (0, -3, -2)$

• $b_{41} = -2 \neq 0$ sostituisco la quarta riga con $B_4 + 2B_1 = (0, 3, 2)$

Otteniamo $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

• $c_{32} = -3 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $C_3 + (-1)C_2 = (0, 0, 0)$

• $c_{42} = 3 \neq 0$ sostituisco la quarta riga con $C_4 + C_2 = (0, 0, 0)$

Otteniamo $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La matrice D è a scalini e il suo rango è 2.

Le 4 matrici A, B, C e D sono **a due a due diverse** tra loro.

Però, siccome abbiamo usato solo operazioni elementari per righe, si ha che

$$rg(A) = rg(B) = rg\,(C) = rg(D) = 2.$$

11.28. Esempio. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Scambiamo la seconda riga con la prima riga e otteniamo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- $b_{21} = 2 \neq 0$ sostituisco la seconda riga con $B_2 + (-2)B_1 = (0, -1, 2, 1)$
- $b_{31} = -2 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $B_3 + 2B_1 = (0, 4, -2, -1)$

Otteniamo $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

- $c_{32} = 4 \neq 0$ sostituisco la terza riga con $C_3 + 4C_2 = (0, 0, 6, 3)$

Otteniamo $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$. La matrice D è a scalini e il suo rango è 2.

Le 4 matrici A, B, C e D sono **a due a due diverse** tra loro.

Però, siccome abbiamo usato solo operazioni elementari per righe, si ha che

$$rg(A) = rg(B) = rg(C) = rg(D) = 2.$$

12. Rango di una matrice: il caso delle matrici quadrate

Nel seguito A sarà una matrice ad elementi reali di tipo n×n rappresentata nel modo seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{(n-1),(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

12.1. Definizione. Diremo che A è una *matrice (quadrata) di ordine n*.

12.2. Definizione. Diremo *diagonale principale* di A, la n-upla ordinata

$$(a_{11}\ ,\ a_{22}\ ,\ a_{33}\ ,\ a_{44}\ ,\ a_{55}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ a_{(n-2),(n-2)}\ ,\ a_{(n-1),(n-1)1}\ ,\ a_{nn}\ )$$

12.3. Osservazione. Per ogni indice i di riga e ogni indice j di colonna si ha che:

- se i = j allora l'elemento a_{ij} di A si trova "*sulla*" diagonale principale;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & a_{44} & \\ & & & & a_{55} \end{bmatrix}$$

- se i > j allora l'elemento a_{ij} di A si trova "*al di sotto*" della diagonale principale;

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ a_{21} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \end{bmatrix}$$

- se i < j allora l'elemento a_{ij} di A si trova "*al di sopra*" della diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & a_{34} & a_{35} \\ & & & & a_{45} \\ & & & & \end{bmatrix}$$

12.4. Definizione. Diremo che una matrice quadrata A è:

• *triangolare superiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale, cioè

$i > j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0;$ $\qquad \begin{bmatrix} & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$

• *triangolare inferiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale, cioè

$i < j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0;$ $\qquad \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \end{bmatrix}$

• *diagonale* se sono nulli tutti gli elementi che **non** si trovano sulla diagonale principale, cioè

$i \neq j \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0;$ $\qquad \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$

12.5. Osservazione. Una matrice quadrata A è diagonale se e solo se è sia triangolare superiore che triangolare inferiore.

Tenendo conto di (SCAL1) e dell'osservazione 11.21.4 si ha subito la seguente

12.6. Osservazione. Tutte le matrici quadrate a scalino sono matrici triangolari superiori.

12.7. Esempio. Si vede che le seguenti quattro matrici a scalino

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono anche matrici triangolari superiori.

12.8. Osservazione. **NON** tutte le matrici triangolari superiori sono matrici a scalino.

12.9. Esempio. Si vede che delle seguenti quattro matrici triangolari superiori

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nessuna è una matrice a scalino.

Ricordiamo che nell'Osservazione 11.21 abbiamo stabilito di indicare col simbolo j_x l'indice di colonna del primo elemento non nullo della x-esima riga di una matrice a scalino A non nulla.

12.10. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n a scalino. Stabiliamo che:
- $S_n := \{s \in N \mid 1 \leq s \leq n\}$
- $J_A := \{j_x \in S_n \mid$ x è l'indice di colonna del primo elemento non nullo della x-esima riga di A$\}$

Ovviamente, $\varnothing \subseteq J_A \subseteq S_n$ essendo $J_A = \varnothing$ se e solo se A è la matrice nulla.

12.11. Esempio. Consideriamo le seguenti matrici QUADRATE a scalino

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che l'unica matrice avente TUTTE le righe NON nulle è la matrice B.

Osserviamo che il primo elemento non nullo della riga B_1 è $b_{11} = -1$, il primo elemento non nullo della riga B_2 è $b_{22} = 2$, il primo elemento non nullo della riga B_3 è $b_{33} = 7$.

Si ha che $J_A = \varnothing$, $J_B = \{1,2,3\}$, $J_C = \{1,3,4\}$ e $J_D = \{2,4,5\}$.

Tenendo conto delle Osservazioni 11.21.3 e 11.21.4 si ha subito la seguente:

12.12. Osservazione. Se A è una matrice quadrata di ordine n a scalino, allora si ha che

12.12.1. $|J_A|$:= numero di elementi di J_A = numero di righe non nulle di A

12.12.2. le righe di A sono tutte non nulle se e solo se $|J_A| = n$, ovvero se e solo se $J_A = S_n$.

12.12.3. Le righe di A sono tutte non nulle se e solo se per ogni $s \in S_n$ si ha che $j_s = s$.

In altre parole, le righe di una matrice quadrata a scalino A sono tutte non nulle se e solo se il primo elemento non nullo di ogni riga A_i è l'elemento a_{ii}.

12.13. Esempio. Consideriamo le seguenti matrici a scalino

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che la matrice A di ordine 2 ha $|J_A| = 0$ righe non nulle.

Si ha che la matrice B di ordine 3 ha $|J_B| = 3$ righe non nulle.

Si ha che la matrice C di ordine 4 ha $|J_C| = 3$ righe non nulle.

Si ha che la matrice D di ordine 5 ha $|J_D| = 3$ righe non nulle.

Inoltre, si noti che le righe di B sono tutte non nulle e $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ e $j_3 = 3$.

Tenendo conto dell'Osservazione 11.11 è ben posta la seguente:

12.14. Definizione. Diremo che A è una *matrice quadrata di rango massimo* se A è una matrice quadrata avente rango uguale al suo ordine.

Conseguenza immediata del Teorema 11.23 e dell'Osservazione 12.12.3 è la seguente

12.15. Osservazione. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se tutte le sue righe sono non nulle.

12.16. Teorema. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se tutti gli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale sono non nulli.

Dimostrazione. Se A è una matrice quadrata a scalino di rango massimo, allora (per l'Osservazione 12.15) per ogni $s \in S_n$ si ha che $j_s = s$, ovvero per ogni $s \in S_n$ si ha che l'elemento $a_{ss} = a_{sj_s} \neq 0$ (essendo il primo elemento non nullo della s-esima riga di A). Viceversa, sia A una matrice a scalino avente tutti gli elementi della diagonale principale non nulli. Per l'Osservazione 12.6 la matrice A è triangolare superiore. Quindi, per ogni $s \in S_n$ l'elemento a_{ss} è il primo elemento non nullo della s-esima riga, cioè per ogni $s \in S_n$ si ha che $j_s = s$. Per cui A ha rango massimo. ■

12.17. Corollario. Una matrice quadrata a scalino ha rango massimo se e solo se è non nullo il prodotto di tutti gli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.

12.18. Teorema. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione n.

Sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$) una base di V_R.

Sia D = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$) una n-upla ordinata di vettori di V_R.

Per ogni $s \in S_n$ sia $\mathbf{a}_s$ la n-upla di coordinate del vettore $\mathbf{v}_s$ rispetto alla base B.

Cioè, se $\Omega_B : V_R \to R^n$ è la coordinatizzazione di V_R rispetto a B, allora per ogni $s \in S_n$ è $\mathbf{a}_s = \Omega_B(\mathbf{v}_s)$.

Sia A la matrice avente come righe le n-uple $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, …, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$.

L’insieme D è una base di V_R se e solo se la matrice A ha rango massimo.

Dimostrazione. Per il l’Osservazione 10.15.2 l’insieme D è una base di V_R se e solo se gli n vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti. Per i Teoremi 10.23 e 10.24 gli n vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti se s solo se le n n-uple $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, …, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti, ovvero se e solo se le n righe di A sono linearmente indipendenti. Quest’ultimo fatto accade se e solo se il rango di A è uguale a n, cioè è massimo. ■

Tenendo conto dei Teoremi 11.25, 12.16, 12.18 e del Corollario 12.17 si ha subito il seguente:

12.19. Corollario. Sia V_R uno spazio vettoriale reale di dimensione n.

Sia B = ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, …, $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n$) una base di V_R.

Sia D = ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_n$) una n-upla ordinata di vettori di V_R.

Per ogni $s \in S_n$ sia $\mathbf{a}_s$ la n-upla di coordinate del vettore $\mathbf{v}_s$ rispetto alla base B.

Sia A la matrice avente come righe le n-uple $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, …, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{a}_n$.

Sia A’ una matrice a scalino ottenuta da A usando solo le operazioni elementari per righe.

L’insieme D è una base di V_R se e solo se tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale principale della matrice A’ sono non nulli, ovvero se e solo se è non nullo il prodotto di tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale principale della matrice A’.

12.20. Esempio. Si considerino i seguenti polinomi di $R_5[x]$:

$p_1(x) = - x^5 + x^4 + 4x^2 + x$ $p_2(x) = 2x^5 - 11x^2 - 2x + 4$ $p_3(x) = -3x^5 + 7x^4 + 5x + 12$

$p_4(x) = 4x^5 + 2x^2 - 12x - 8$ $p_5(x) = -5x^5 + 7x^4 + 23x^2 + 3x$

Sia U <$p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$, $p_5(x)$> lo spazio da essi generato.

- Trovare dim(U).
- Posto r := dim(U), trovare una base B = ($q_1(x)$, …, $q_r(x)$) di U.
- Trovare altri (6 – r) polinomi $q_{r+1}(x)$, …, $q_6(x)$ tali che (($q_1(x)$, …, $q_6(x)$) sia una base di $R_5[x]$.

La coordinatizzazione di $R_5[x]$ rispetto alla base canonica $C = (x^5 , x^4 , x^3 , x^2 , x , 1)$ è la funzione

$\Omega_B : R_5[x] \to R^6$ così definita: $\Omega_B(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f) := (a, b, c, d, e, f)$

Si ha che

$\Omega_B(p_1(x)) = \Omega_B(- x^5 + x^4 + 4x^2+ x) = (- 1, 1, 0, 4, 1, 0) = \mathbf{a}_1$

$\Omega_B(p_2(x)) = \Omega_B(2x^5 - 11x^2 - 2x + 4) = (2, 0, 0, -11, -2, 4) = \mathbf{a}_2$

$\Omega_B(p_3(x)) = \Omega_B(-3x^5 + 7x^4 + 5x + 12) = (-3, 7, 0, 0, 5, 12) = \mathbf{a}_3$

$\Omega_B(p_4(x)) = \Omega_B(4x^5 + 2x^2 - 12x - 8) = (4, 0, 0, 2, -12, -8) = \mathbf{a}_4$

$\Omega_B(p_5(x)) = \Omega_B(-5x^5 + 7x^4 + 23x^2 + 3x) = (-5, 7, 0, 23, 3, 0) = \mathbf{a}_4$

Sia A la matrice avente $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ come righe, cioè $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -11 & -2 & 4 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & -12 & -8 \\ -5 & 7 & 0 & 23 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Tramite operazioni elementari si trova la matrice $A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si ha che lo spazio delle righe di A e di A' coincidono. Quindi, dim(U) = rg(A) = rg(A') = 3.

Le prime tre righe di A' sono una base dello spazio delle righe di A', quindi i polinomi

$q_1(x) = p_1(x) = - x^5 + x^4 + 4x^2+ x$, $q_2(x) = 2x^4 -3x^2 + 4$, $q_3(x) = -3x^2 + x + 2$ sono una base di U.

Tenendo conto del Corollario 12.19 possiamo prendere, <u>a piacere</u>, tre polinomi nel modo seguente:

$q_4(x) = a_{33}x^3 + a_{34}x^2 + a_{35}x + a_{36}$, $q_5(x) = a_{55}x + a_{56}$, $q_6(x) = a_{66}$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$$

con $a_{33} \neq 0$, $a_{55} \neq 0$ e $a_{66} \neq 0$.

Per esempio, $q_4(x) = x^3$, $q_5(x) = x$, $q_6(x) = 1$.