

**1. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$(1) \begin{cases} x_1 - 5x_3 + 2x_6 = 6 \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 - 7x_3 + 3x_6 = 4 \\ 3x_2 + 2x_4 + 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_3 + x_6 = -12 \\ 4x_2 + 3x_4 + 5x_5 = 9 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

**2. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases}$$

ha come unica soluzione la quaterna  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, -1, 1)$ .

**3. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

ha infinite  $\infty^1$  soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, -5, 3, -1, 0) + \alpha(-1, 1, 0, -1, 1)$$

**4. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$$

ha infinite  $\infty^2$  soluzioni, cioè dipendenti da due parametri

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, -3, 0, 0) + \alpha(1, 1, 1, 0) + \beta(2, 2, 0, 1)$$

**5. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 40x_1 + 5x_2 + 55x_3 - 25x_4 + 213x_5 = 35 \\ 8x_1 + x_2 + 11x_3 - 5x_4 - 11x_5 = 7 \\ 56x_1 + 7x_2 + 77x_3 - 35x_4 - 197x_5 = 49 \\ 24x_1 + 3x_2 + 33x_3 - 15x_4 - 29x_5 = 21 \end{cases}$$

ha infinite  $\infty^3$  soluzioni, cioè dipendenti da tre parametri

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 7, 0, 0, 0) + \alpha(1, -8, 0, 0, 0) + \beta(0, -11, 1, 0, 0) + \gamma(0, 5, 0, 1, 0)$$

**6. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 6y + 2z = 1 \end{cases}$$

ha come unica soluzione la terna  $(x, y, z) = (1/7, 10/7, -4)$ .

**7. Esercizio.** Si consideri il seguente sistema lineare “simultaneo”

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1; = 2 \\ x + 2y + z = 1; = 1 \\ x + 23y + 10z = 4; = 0 \end{cases}$$

Il primo ha infinite  $\infty^1$  soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$$(x, y, z) = (5/7, 1/7, 0) + \alpha(-1/7, -3/7, 1)$$

Il secondo non ha alcuna soluzione.

**8. Esercizio.** Si consideri il seguente sistema lineare “simultaneo”

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1; = 0; = 0 \\ x + 2y + z = 0; = 1; = 0 \\ 3x + 6y + 2z = 0; = 0; = 1 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Il primo ha come unica soluzione la terna  $(x, y, z) = (2/7, -1/7, 0)$ .

Il secondo ha come unica soluzione la terna  $(x, y, z) = (0, -1, 3)$ .

Il terzo ha come unica soluzione la terna  $(x, y, z) = (1/7, 3/7, -1)$ .

**Si noti che** la matrice B che ha come colonne ordinatamente le precedenti tre terne è l'inversa di A.

**9. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2000x_1 + 0,003x_2 - 0,3x_3 + 40x_4 = 5 \\ 3000x_1 + 0,005x_2 - 0,4x_3 + 90x_4 = 8 \\ 500x_1 + 0,0007x_2 - 0,08x_3 + 8x_4 = 1,3 \\ 60000x_1 + 0,09x_2 - 9x_3 + 1300x_4 = 160 \end{cases}$$

ha infinite  $\infty^1$  soluzioni, cioè le infinite soluzioni dipendono da un parametro

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,008; -5000; 0; 0,1) + \beta(0,003; -1000; 10; 0) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

**Suggerimento:** si moltiplichino entrambe i membri della III equazione per 10 e si dividano entrambe i membri della IV equazione per 10

$$\begin{cases} 2000x_1 + 0,003x_2 - 0,3x_3 + 40x_4 = 5 \\ 3000x_1 + 0,005x_2 - 0,4x_3 + 90x_4 = 8 \\ 5000x_1 + 0,007x_2 - 0,8x_3 + 80x_4 = 13 \\ 6000x_1 + 0,009x_2 - 0,9x_3 + 130x_4 = 16 \end{cases}$$

Ora si effettui il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} y_1 = 1000x_1 \\ y_2 = 0,001x_2 \\ y_3 = 0,1x_3 \\ y_4 = 10x_4 \\ 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 = 5 \\ 3y_1 + 5y_2 - 4y_3 + 9y_4 = 8 \\ 5y_1 + 7y_2 - 8y_3 + 8y_4 = 13 \\ 6y_1 + 9y_2 - 9y_3 + 13y_4 = 16 \end{cases}$$

Riducendo a gradino si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 = 5 \\ y_2 + y_3 + 6y_4 = 1 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} y_4 = 1 \\ y_3 = \beta \\ y_2 = -5 - \beta \\ y_1 = 8 + 3\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1000x_1 = 8 + 3\beta \\ 0,001x_2 = -5 - \beta \\ 0,1x_3 = \beta \\ 10x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,008 + 0,003\beta \\ x_2 = -5000 - 1000\beta \\ x_3 = 10\beta \\ x_4 = 0,1 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,008; -5000; 0; 0,1) + \beta(0,003; -1000; 10; 0) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

**10. Esercizio.** Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro reale  $t$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = t \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

Per  $t \neq 5$  il sistema non ha soluzioni.

Per  $t = 5$  il sistema ha infinite  $\infty^1$  soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$$(x, y, z) = (0, -5/2, 4) + \alpha(1, -2, 1)$$

**11. Esercizio.** Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro reale  $t$

$$\begin{cases} w + x + (2-t)y = 1 \\ (3-2t)w + (2-t)x + y = t \\ (2-t)w + (2-t)x + 1 = 1 \end{cases}$$

- per  $t = 3$  il sistema **non** ha soluzioni;

- per  $t = 1$  il sistema ha infinite  $\infty^2$  soluzioni  $(w, x, y) = (1, 0, 0) + \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$ ;

- **per ogni**  $t$  reale con  $t \neq 1$  e  $t \neq 3$  il sistema ha un'**unica** soluzione data dalla terna

$$(w, x, y) = (-1, (4-t)/(3-t), 1/(3-t)).$$

**12. Esercizio.** Si consideri il seguente sistema **non** lineare

$$\begin{cases} w + x + yz = 2 \\ w + xz + y = -1 \\ wz + x + y = -1 \end{cases}$$

- per  $z = 1$  il sistema **non** ha soluzioni;

- per  $z = -2$  il sistema è lineare e ha infinite soluzioni  $(w, x, y, z) = (1+\alpha, 1+\alpha, \alpha, -2)$ ;

- per  $z \neq 1$  e  $z \neq -2$  il sistema ha come soluzione  $(w, x, y, z) = (1/(1-z), 1/(1-z), 2/(z-1), z)$ .

**Suggerimento:** si consideri il sistema come un sistema lineare nelle tre incognite  $(w, x, y)$  i cui coefficienti dipendono dal parametro reale  $z$ .