Esercizio 3

Eq. caratteristica $3\lambda^5 + 4\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1) = 0;$

$\lambda = 0$

oppure $3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0;$

$\lambda = 0, \quad \lambda^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{-2 \pm 1}{3} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

Allora le cinque radici dell'eq. caratteristica sono:

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i, \quad \lambda_{4,5} = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$

e l'integrale generale dell'eq. differenziale è

$y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 \cos \frac{x}{\sqrt{3}} + c_5 \sin \frac{x}{\sqrt{3}}$

Imponiamo ora le condizioni iniziali. A tale scopo dobbiamo derivare l'integrale generale fino all'ordine quattro.

$y'(x) = -c_2 \sin x + c_3 \cos x - \frac{c_4}{\sqrt{3}} \sin \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{c_5}{\sqrt{3}} \cos \frac{x}{\sqrt{3}}$

$y''(x) = -c_2 \cos x - c_3 \sin x - \frac{c_4}{3} \cos \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{c_5}{3} \sin \frac{x}{\sqrt{3}}$

$y'''(x) = c_2 \sin x - c_3 \cos x + \frac{c_4}{3\sqrt{3}} \sin \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{c_5}{3\sqrt{3}} \cos \frac{x}{\sqrt{3}}$

$y^{IV}(x) = c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{c_4}{9} \cos \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{c_5}{9} \sin \frac{x}{\sqrt{3}}$

Imponendo le condizioni iniziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ c_3 + \frac{c_5}{\sqrt{3}} = 0 \\ -c_2 - \frac{1}{3} c_4 = 0 \\ -c_3 - \frac{c_5}{3\sqrt{3}} = 0 \\ c_2 + \frac{1}{9} c_4 = 1 \end{cases}$$

dalla seconda e terza equazione, segue subito che $c_3 = c_5 = 0$;

sommando la terza e la quinta equazione, si ha $-\frac{2}{9} c_4 = 1 \Rightarrow c_4 = -\frac{9}{2}$

Sostituendo nella terza, segue $c_2 = \frac{3}{2}$;

sostituendo nella prima, si ha

$$c_1 = -c_2 - c_4 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$$

In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = 3 + \frac{3}{2}\cos x - \frac{9}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{3}}x .$$

<u>Domanda 1</u>

$$\sup_{x \in [0, 1/2]} |x^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è convergente,

per il criterio della convergenza totale, la serie data è uniformemente convergente in $[0, 1/2]$.