SVOLGIMENTO ES. COMPITO A DEL 23-01-2015

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} f_x = 2x+2-y^2-z^2 := 0 \\ f_y = -2xy+z^2 := 0 \\ f_z = 2z(y-x) := 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 2x+2-y^2=0 \\ -2xy=0 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x+2-x^2-z^2=0 \\ -2x^2+z^2=0 \\ y=x \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 2-y^2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x+2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x+2-x^2-2x^2=0 \\ z^2=2x^2 \\ y=x \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{2} \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x^2-2x-2=0 \\ z^2=2x^2 \\ y=x \end{cases}$$

$$(0,\pm\sqrt{2},0), \ (-1,0,0), \quad \begin{cases} x = \frac{1\pm\sqrt{1+6}}{3} \\ z^2 = 2\left(\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}\right)^2 \\ y=x \end{cases} ;$$

$$-, \ -, \ \begin{cases} x=y=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \\ z=\pm\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x=y=\frac{1-\sqrt{7}}{3} \\ z=\pm\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Quindi tutti i punti critici sono:

$(-1,0,0)$, $(0,\sqrt{2},0)$, $(0,-\sqrt{2},0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}, \sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$,

$\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1-\sqrt{7}}{3}, \sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$,

$\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1-\sqrt{7}}{3}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$

Studiamo la natura dei primi tre.

$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = -2y \qquad f_{xz} = -2z$

$f_{yx} = -2y \qquad f_{yy} = -2x \qquad f_{yz} = 2z$

$f_{zx} = -2z \qquad f_{zy} = 2z \qquad f_{zz} = 2(y-x)$

La matrice Hessiana valutata in $(-1,0,0)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale; quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale, ovvero 2 con molteplicità 3.
Essendo tutti gli autovalori positivi, $(-1,0,0)$ è un punto di minimo relativo.

La matrice Hessiana valutata in $(0,\pm\sqrt{2},0)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ \mp 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calcoliamone gli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ \mp 2\sqrt{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2\sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda(2-\lambda)(\pm 2\sqrt{2}-\lambda) - (\mp 2\sqrt{2})(\mp 2\sqrt{2})(\pm 2\sqrt{2}-\lambda) =$$

$$= (\pm 2\sqrt{2}-\lambda)\left[-\lambda(2-\lambda) - 8\right] \; := 0 \iff$$

$\iff \lambda = \pm 2\sqrt{2}$ oppure $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \end{cases}$$

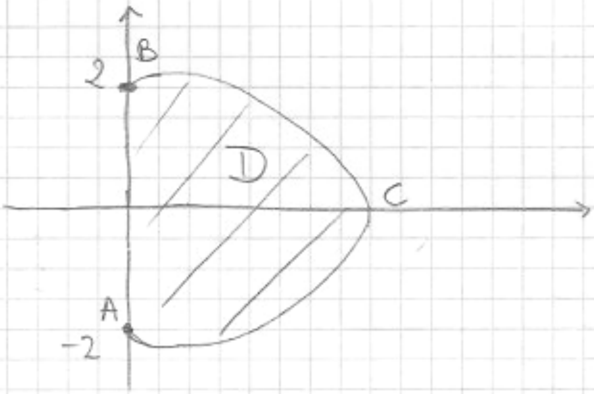
Per entrambi i punti, la matrice Hessiana possiede sia autovalori positivi (4) che autovalori negativi (-2). Quindi sono punti di sella.

Esercizio 2

Risulta $\quad \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, 2)$

$\quad \left(x\left(\frac{3}{2}\pi\right), y\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = (0, -2)$

Quindi la regione di cui vogliamo calcolare l'area è qualcosa del tipo



Una delle formule di Gauss-Green per il calcolo dell'area è