1. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 - 5x_3 + 2x_6 = 6 \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 - 7x_3 + 3x_6 = 4 \\ 3x_2 + 2x_4 + 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_3 + x_6 = -12 \\ 4x_2 + 3x_4 + 5x_5 = 9 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

2. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases}$$

ha come <u>unica</u> soluzione la quaterna $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, -1, 1)$.

3. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, -5, 3, -1, 0) + \alpha(-1, 1, 0, -1, 1)$

4. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$$

ha infinite ∞^2 soluzioni, cioè dipendenti da due parametri

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, -3, 0, 0) + \alpha(1, 1, 1, 0) + \beta(2, 2, 0, 1)$

5**. Esercizio.** Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 40x_1 + 5x_2 + 55x_3 - 25x_4 + 213x_5 = 35 \\ 8x_1 + x_2 + 11x_3 - 5x_4 - 11x_5 = 7 \\ 56x_1 + 7x_2 + 77x_3 - 35x_4 - 197x_5 = 49 \\ 24x_1 + 3x_2 + 33x_3 - 15x_4 - 29x_5 = 21 \end{cases}$$

ha infinite ∞^3 soluzioni, cioè dipendenti da tre parametri

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 7, 0, 0, 0) + \alpha(1, -8, 0, 0, 0) + \beta(0, -11, 1, 0, 0) + \gamma(0, 5, 0, 1, 0)$

6. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 6y + 2z = 1 \end{cases}$$

ha come <u>unica</u> soluzione la terna $(x, y, z) = (1/7, 10/7, -4)$.

7. Esercizio. Si consideri il seguente sistema lineare "simultaneo"

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1; = 2 \\ x + 2y + z = 1; = 1 \\ x + 23y + 10z = 4; = 0 \end{cases}$$

Il primo ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$(x, y, z) = (5/7, 1/7, 0) + \alpha(-1/7, -3/7, 1)$

Il secondo <u>**non**</u> ha alcuna soluzione.

8. Esercizio. Si consideri il seguente sistema lineare "simultaneo"

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1; = 0; = 0 \\ x + 2y + z = 0; = 1; = 0 \\ 3x + 6y + 2z = 0; = 0; = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Il primo ha come <u>unica</u> soluzione la terna $(x, y, z) = (2/7, -1/7, 0)$.

Il secondo ha come <u>unica</u> soluzione la terna $(x, y, z) = (0, -1, 3)$.

Il terzo ha come <u>unica</u> soluzione la terna $(x, y, z) = (1/7, 3/7, -1)$.

<u>**Si noti che**</u> la matrice B che ha come colonne ordinatamente le precedenti tre terne è l'inversa di A.

9. Esercizio. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2000x_1 + 0{,}003x_2 - 0{,}3x_3 + 40x_4 = 5 \\ 3000x_1 + 0{,}005x_2 - 0{,}4x_3 + 90x_4 = 8 \\ 500x_1 + 0{,}0007x_2 - 0{,}08x_3 + 8x_4 = 1{,}3 \\ 60000x_1 + 0{,}09x_2 - 9x_3 + 1300x_4 = 160 \end{cases}$$

ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè le infinite soluzioni dipendono da un parametro

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}008; -5000; 0; 0{,}1) + \beta(0{,}003; -1000; 10; 0) \quad \forall\beta\in R$

Suggerimento: si moltiplichino entrambe i membri della III equazione per 10 e si dividano entrambe i membri della IV equazione per 10

$$\begin{cases} 2000x_1 + 0{,}003x_2 - 0{,}3x_3 + 40x_4 = 5 \\ 3000x_1 + 0{,}005x_2 - 0{,}4x_3 + 90x_4 = 8 \\ 5000x_1 + 0{,}007x_2 - 0{,}8x_3 + 80x_4 = 13 \\ 6000x_1 + 0{,}009x_2 - 0{,}9x_3 + 130x_4 = 16 \end{cases}$$

Ora si effettui il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} y_1 = 1000x_1 \\ y_2 = 0{,}001x_2 \\ y_3 = 0{,}1x_3 \\ y_4 = 10x_4 \\ 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 = 5 \\ 3y_1 + 5y_2 - 4y_3 + 9y_4 = 8 \\ 5y_1 + 7y_2 - 8y_3 + 8y_4 = 13 \\ 6y_1 + 9y_2 - 9y_3 + 13y_4 = 16 \end{cases}$$

Riducendo a gradino si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 = 5 \\ \qquad\quad y_2 + y_3 + 6y_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad y_4 = 1 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} y_4 = 1 \\ y_3 = \beta \\ y_2 = -5 - \beta \\ y_1 = 8 + 3\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1000x_1 = 8 + 3\beta \\ 0{,}001x_2 = -5 - \beta \\ 0{,}1x_3 = \beta \\ 10x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}008 + 0{,}003\beta \\ x_2 = -5000 - 1000\beta \\ x_3 = 10\beta \\ x_4 = 0{,}1 \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}008; -5000; 0; 0{,}1) + \beta(0{,}003; -1000; 10; 0) \quad \forall\beta\in R$

10. Esercizio. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro reale t

$$\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 7x+6y+5z=t \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$$

Per $t \neq 5$ il sistema non ha soluzioni.

Per $t = 5$ il sistema ha infinite ∞^1 soluzioni, cioè dipendenti da un parametro

$(x, y, z) = (0, -5/2, 4) + \alpha(1, -2, 1)$

11. Esercizio. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro reale t

$$\begin{cases} w+x+(2-t)y=1 \\ (3-2t)w+(2-t)x+y=t \\ (2-t)w+(2-t)x+1=1 \end{cases}$$

- per $t = 3$ il sistema **<u>non</u>** ha soluzioni;

- per $t = 1$ il sistema ha infinite ∞^2 soluzioni $(w, x, y) = (1, 0, 0) + \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$;

- **per ogni** t reale con $t \neq 1$ et $t \neq 3$ il sistema ha un'**<u>unica</u>** soluzione data dalla terna

$(w, x, y) = (-1, (4-t)/(3-t), 1/(3-t))$.

12. Esercizio. Si consideri il seguente sistema **<u>non</u>** lineare

$$\begin{cases} w+x+yz=2 \\ w+xz+y=-1 \\ wz+x+y=-1 \end{cases}$$

- per $z = 1$ il sistema **<u>non</u>** ha soluzioni;

- per $z = -2$ il sistema è lineare e ha infinite soluzioni $(w, x, y, z) = (1+\alpha, 1+\alpha, \alpha, -2)$;

- per $z \neq 1$ et $z \neq -2$ il sistema ha come soluzione $(w, x, y, z) = (1/(1-z), 1/(1-z), 2/(z-1), z)$.

Suggerimento: si consideri il sistema come un sistema lineare nelle tre incognite (w, x, y) i cui coefficienti dipendono dal parametro reale z.