Marcellini - Sbordone

Elementi di Analisi II

CAPITOLO 1

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1. Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme

Sia I un insieme di numeri reali e sia $f_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni reali definite in I. Si dice che f_k *converge puntualmente in* I verso la funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se risulta

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \forall x \in I; \tag{1.1}$$

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in I$ esiste $\nu_{\varepsilon,x} \in \mathbb{R}$ tale che (figura 1.1)

$$f(x) - \varepsilon < f_k(x) < f(x) + \varepsilon \qquad \forall k > \nu_{\varepsilon,x}. \tag{1.2}$$

Utilizzando il valore assoluto, la (1.2) può esser riscritta nella forma

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall k > \nu_{\varepsilon,x}. \tag{1.3}$$

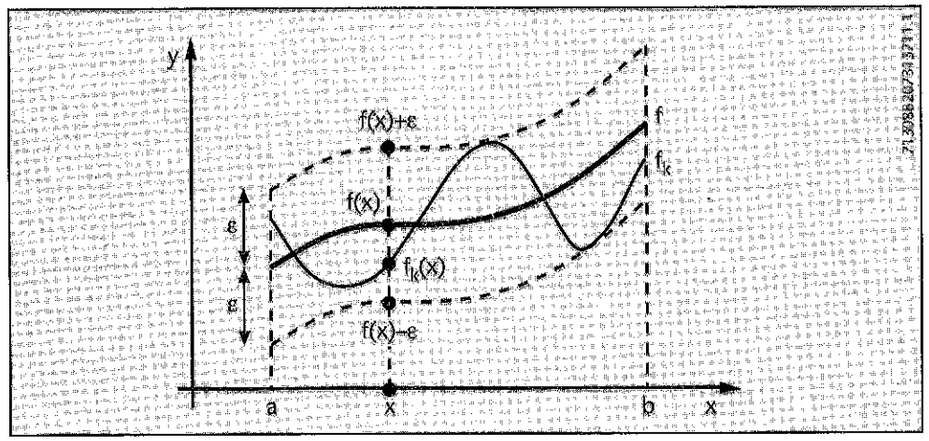

Figura 1.1

In generale, fissato $\varepsilon > 0$, il numero $\nu_{\varepsilon,x}$ dipende dal punto x; se invece tale numero risulta indipendente da x, si parla di *convergenza uniforme*.

Precisamente, si dice che f_k *converge uniformemente in I verso f* se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall k > \nu_\varepsilon, \forall x \in I. \tag{1.4}$$

La convergenza uniforme in I implica quella puntuale; infatti, fissato $\varepsilon > 0$, se ν_ε è tale che valga la (1.4), allora per ogni $x \in I$ si può porre $\nu_{\varepsilon,x} = \nu_\varepsilon$ e si otterrà la (1.3).

Il viceversa in generale non sussiste, come provano i seguenti esempi.

Esempio 1. Siano a, b due numeri reali e sia f_k la successione (si veda la figura 1.2) definita nell'intervallo $I = (0,1)$ da

$$f_k(x) = \begin{cases} a & \text{se } 0 < x \le 1/k \\ b & \text{se } 1/k < x < 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Fissato $x \in (0,1)$, per ogni $k > 1/x$ si ha $1/k < x < 1$ e perciò $f_k(x) = b$; ne segue che la successione f_k converge puntualmente verso la funzione $f(x) = b$. Inoltre, se è $a \neq b$, la convergenza non è uniforme. Infatti, posto $\varepsilon = |a-b|$, se esistesse ν_ε tale che $|f_k(x) - b| < \varepsilon$ per ogni $k > \nu_\varepsilon$ e per ogni $x \in (0,1)$, si avrebbe in particolare

$$|f_k(1/k) - b| = |a-b| < \varepsilon = |a-b|$$

il che è assurdo.

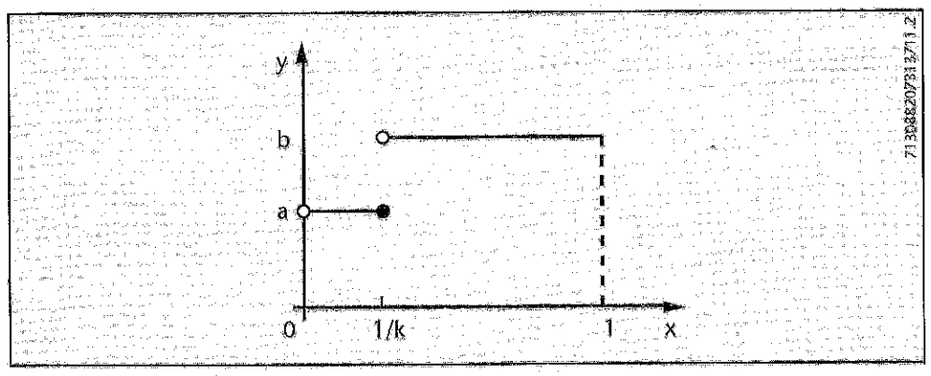

Figura 1.2

Esempio 2. La successione di funzioni, definita nell'intervallo $I = [0,1]$ da

$$f_k(x) = x^k \tag{1.6}$$

converge puntualmente in I verso la funzione (figura 1.3)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

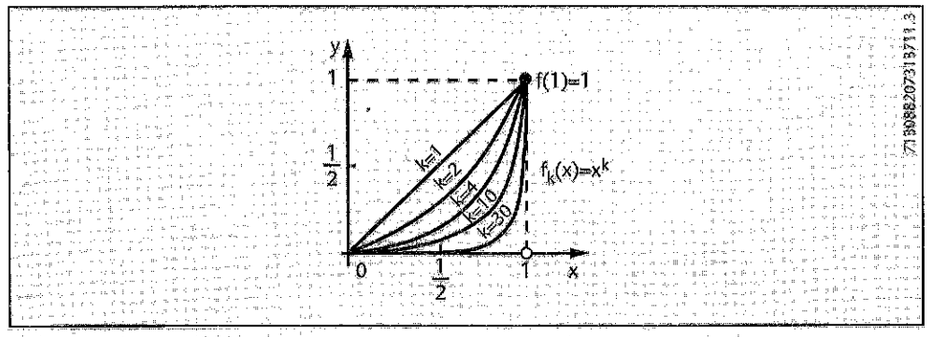

Figura 1.3 - $f_k(x) = x^k$

La convergenza non è uniforme. Infatti, posto $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se esistesse ν_ε tale che $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $k > \nu_\varepsilon$ e per ogni $x \in [0,1]$, si avrebbe in particolare per $x = 1/\sqrt[k]{2}$

$$|f_k(1/\sqrt[k]{2}) - f(1/\sqrt[k]{2})| = |\frac{1}{2} - 0| = \frac{1}{2} < \varepsilon$$

il che è assurdo.

Esempio 3. Consideriamo la successione di funzioni f_k (figura 1.4), definita

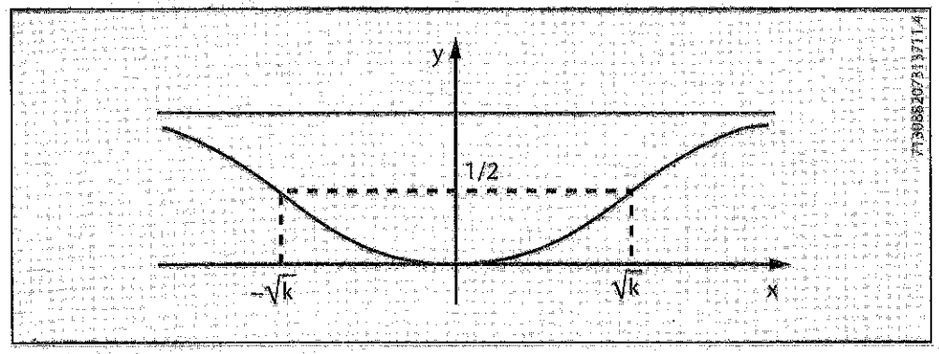

Figura 1.4 - $f_k(x) = \dfrac{x^2}{k+x^2}$

sull'asse reale $I = \mathbb{R}$ da

$$f_k(x) = \frac{x^2}{k+x^2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

In figura 1.4 è evidenziato il fatto che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f_k(x) \le 1/2\} = [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ è monotono crescente rispetto a k e che l'unione per $k \in \mathbb{N}$ coincide con $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ è nullo il limite puntuale

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x) = 0\ , \tag{1.9}$$

ma la convergenza di f_k verso f non è uniforme su $\mathbb{R}$. Infatti la disuguaglianza $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ equivale a

$$\frac{x^2}{k+x^2} < \varepsilon \tag{1.10}$$

ovvero a

$$k > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} x^2 = \nu_{\varepsilon,x} \,. \tag{1.11}$$

Per $0 < \varepsilon < 1$ la quantità $\nu_{\varepsilon,x}$ cresce indefinitamente per $x \longrightarrow +\infty$ e dunque non esiste ν_ε tale che la (1.10) sussista per $k > \nu_\varepsilon$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Continuità del limite

Cominciamo col descrivere la proprietà di continuità del limite uniforme di funzioni continue. Sia $f_k : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni *continue* nell'insieme I di $\mathbb{R}$ e supponiamo che f_k converga *uniformemente* in I verso la funzione $f : I \to \mathbb{R}$; proveremo che f è continua in I. Notiamo che tale risultato non sussiste se si suppone solo che f_k converga puntualmente verso f; ciò è quanto succede, ad esempio, nell'esempio 2 del paragrafo precedente, dove la funzione discontinua (1.7) è limite puntuale della successione di funzioni continue (1.6). Un altro esempio è proposto alla fine del paragrafo.

TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DEL LIMITE. — *Sia $f_k : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue convergente uniformemente in I verso la funzione f. Allora f è continua.*

Dimostrazione: verifichiamo che f è continua in x_0, per ogni fissato $x_0 \in I$. Per l'ipotesi di convergenza uniforme, fissato $\varepsilon > 0$, esiste ν_ε tale che

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall k > \nu_\varepsilon,\ \forall x \in I \,. \tag{2.1}$$

Scegliamo $k_0 > \nu_\varepsilon$; allora, evidentemente, per ogni $x \in I$ risulta

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \le \\ &< \varepsilon + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + \varepsilon \,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Per l'ipotesi di continuità di f_{k_0} è possibile determinare $\delta > 0$ tale che

$$x \in I,\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon \tag{2.3}$$

e quindi, per $x \in I$, $|x - x_0| < \delta$, si ottiene

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon \,. \tag{2.4}$$

Notiamo che, per una successione f_k di funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$, la convergenza uniforme di f_k verso la funzione continua f può essere espressa mediante la relazione di limite (di successione numerica)

$$\lim_{k \to +\infty} \max\{|f_k(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = 0 \tag{2.5}$$

Infatti, se f_k converge uniformemente verso la funzione continua f, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \,, \qquad \forall k > \nu_\varepsilon,\ \forall x \in [a,b] \,. \tag{2.6}$$

Per il teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo delle funzioni continue in un intervallo chiuso, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $x_k \in [a,b]$ tale che

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = \max\{|f_k(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = M_k \tag{2.7}$$

Dalla (2.6) con x_k al posto di x segue perciò $M_k < \varepsilon$ per ogni $k > \nu_\varepsilon$ e quindi la (2.5).

Esempio 1. In generale se una successione f_k di funzioni continue converge solo puntualmente ad una funzione f (ma non uniformemente), non è detto che f sia continua. È infatti facile verificare che la successione di funzioni continue $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_k(x) = \operatorname{arctg} kx \tag{2.8}$$

converge puntualmente verso la funzione discontinua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da (figura 1.5)

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases} \,. \tag{2.9}$$

Basta ricordare che $\lim\limits_{y \longrightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ e che $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

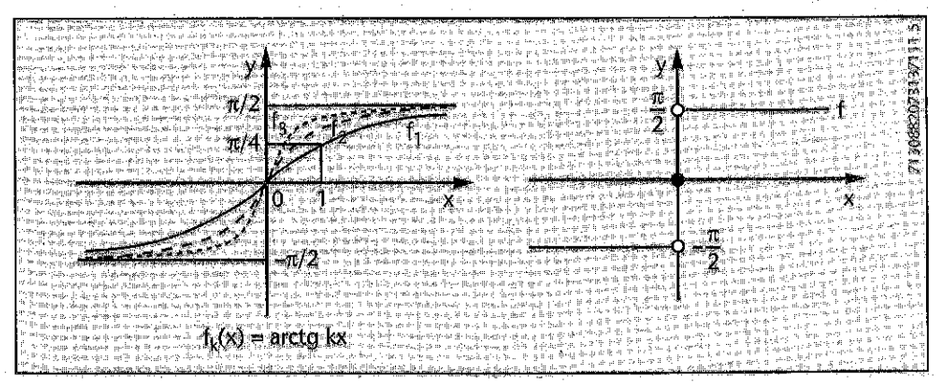

Figura 1.5

3. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata

Sia f_k una successione di funzioni integrabili in un intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$, che converge *puntualmente* in I verso una funzione f. Ci si può domandare se f sia integrabile in $[a,b]$ e se risulti

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f_k(x)dx=\int_a^b f(x)dx\ . \tag{3.1}$$

La risposta in generale è negativa, come si vede dagli esempi seguenti.

Esempio 1. Sia $f_k:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ la successione definita da (figura 1.6, ove sugli assi sono scelte scale diverse)

$$f_k(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x=0\\ k & \text{se } x\in(0,1/k)\\ 0 & \text{se } x\in[1/k,1]\end{cases}\ . \tag{3.2}$$

Evidentemente f_k converge puntualmente verso la funzione $f(x)\equiv 0$ in $[0,1]$, ma non vi converge uniformemente, in quanto

$$\max\{|f_k(x)-f(x)|:x\in[0,1]\}=k\,. \tag{3.3}$$

Inoltre risulta

$$\int_0^1 f_k(x)dx=\int_0^{1/k}k\,dx=1 \tag{3.4}$$

mentre, ovviamente

$$\int_0^1 f(x)dx=0\,. \tag{3.5}$$

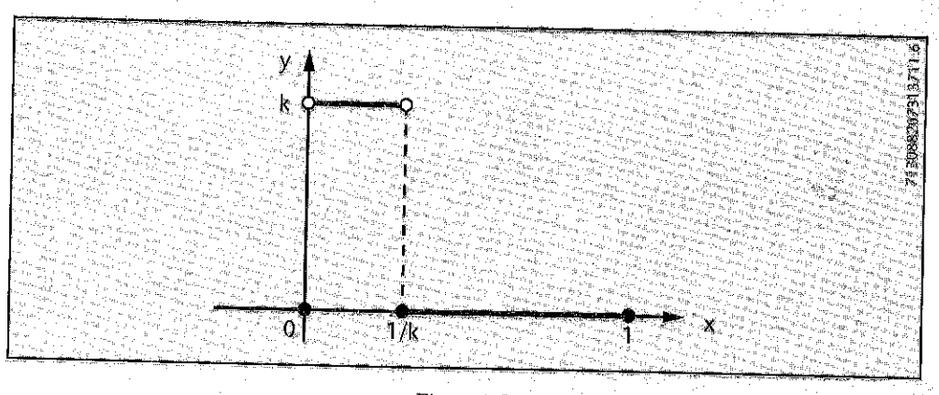

Figura 1.6

Dunque la (3.1) non sussiste.

Esempio 2. Per $x\in[0,1]$ poniamo (si vedano i grafici in figura 1.7)

$$f_k(x)=kxe^{-kx^2}\ . \tag{3.6}$$

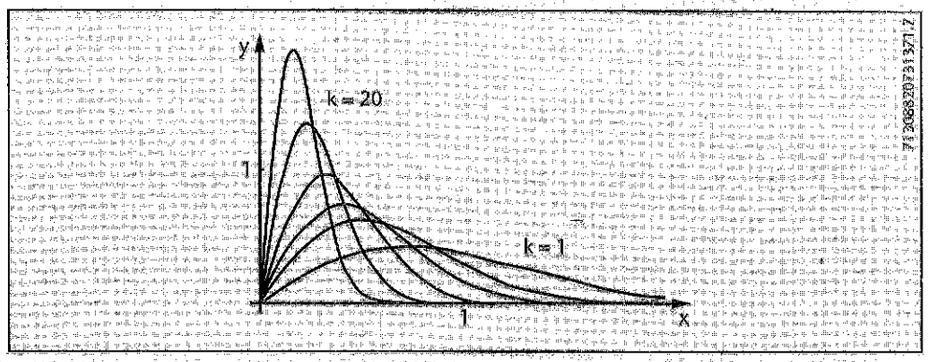

Figura 1.7 - $f_k(x)$ per $k=1,2,3,5,10,20$

Per ogni $x\in[0,1]$ la successione numerica $f_k(x)$ converge a zero; quindi la successione f_k converge puntualmente in $[0,1]$ ed il limite puntuale è la funzione $f(x)=0$ per ogni $x\in[0,1]$. Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^1 f_k(x)dx=\frac{1}{2}\left[-e^{-kx^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-k})\ , \tag{3.7}$$

perciò

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^1 f_k(x)dx=\frac{1}{2}\neq\int_0^1 f(x)dx=0\ . \tag{3.8}$$

Osserviamo inoltre che la successione f_k *non* converge uniformemente ad f nell'intervallo $[0,1]$. Infatti (il lettore esegua i calcoli)

$$\max\{|f_k(x)-f(x)|:x\in[0,1]\}=\max\{f_k(x):x\in[0,1]\}=f_k(x_k) \tag{3.9}$$

dove x_k è il punto di $[0,1]$ in cui si annulla la derivata prima f_k'; risulta

$$x_k=\frac{1}{\sqrt{2k}},\quad f_k(x_k)=\sqrt{\frac{k}{2e}}; \tag{3.10}$$

pertanto $f_k(x_k)$ diverge a $+\infty$ per $k\to+\infty$.

Dunque la convergenza puntuale da sola non è sufficiente a garantire la formula (3.1) di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Il seguente teorema prova che la convergenza uniforme di una successione f_k verso f implica la (3.1).

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE. — *Se f_k è una successione di funzioni continue che converge uniformemente verso f in $[a,b]$, allora vale la formula*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ . \tag{3.11}$$

Dimostrazione: per il teorema sulla continuità del limite, $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e perciò ivi integrabile. Inoltre

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b \{f_k(x)-f(x)\}dx\right| \le \\ &\le \int_a^b |f_k(x)-f(x)|dx \le (b-a)\cdot \max_{a\le x\le b}|f_k(x)-f(x)| \ ,\end{aligned} \tag{3.12}$$

da cui l'asserto per $k\to+\infty$.

Passiamo ora allo studio del passaggio al limite sotto il segno di derivata. Sia f_k una successione di funzioni derivabili in un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$ che converge *puntualmente* in I verso una funzione f. Ci si può domandare se anche f è derivabile in I e se risulta

$$\lim_{k\to+\infty} f_k'(x) = f'(x)\ , \qquad \forall x\in I\ . \tag{3.13}$$

La risposta in generale è negativa, come si vede dagli esempi seguenti.

Esempio 3. Per $x\in I=\mathbb{R}$ (I può anche essere un qualsiasi intervallo di $\mathbb{R}$ contenente lo zero all'interno) consideriamo la successione (figura 1.8)

$$f_k(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{k}}\ . \tag{3.14}$$

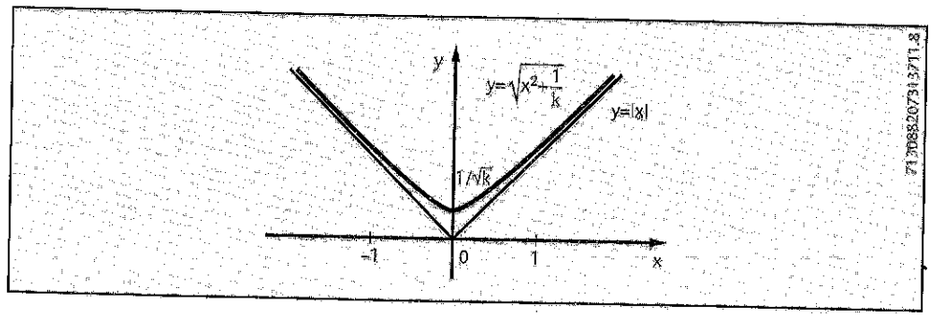

Figura 1.8 - $f_k(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}$

Si verifica subito che le f_k sono continue in I con le loro derivate prime. Inoltre la successione f_k converge uniformemente in I verso la funzione $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$, che non è derivabile nello zero; infatti

$$\begin{aligned}|f_k(x)-f(x)| &= \left|\sqrt{x^2+\tfrac{1}{k}}-\sqrt{x^2}\right| = \\ &= \frac{(x^2+\frac{1}{k})-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}+\sqrt{x^2}} = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}+\sqrt{x^2}} \le \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = \sqrt{\frac{1}{k}}\ ,\end{aligned} \tag{3.15}$$

in quanto $\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}+\sqrt{x^2}\ge\sqrt{\frac{1}{k}}$ per ogni $x\in I$ e per ogni $k\in\mathbb{N}$.

Mostriamo ora che, anche nell'ipotesi che il limite $f(x)$ sia derivabile, non necessariamente vale la (3.13).

Esempio 4. Su $I=\mathbb{R}$ (o anche su di un qualsiasi intervallo I di $\mathbb{R}$) definiamo la successione di funzioni

$$f_k(x) = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kx\ , \qquad \forall k\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x\in I\ . \tag{3.16}$$

La successione f_k converge uniformemente verso la funzione $f(x)=0$ per ogni $x\in I$; mentre, essendo

$$f_k'(x) = \cos kx\ , \qquad \forall k\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x\in I\ , \tag{3.17}$$

risulta $f_k'(0)=1$ per ogni $k\in\mathbb{N}$ e $f'(0)=0$, dunque la (3.13) non sussiste per $x=0$.

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA. — *Sia f_k una successione di funzioni derivabili con derivata continua in $[a,b]$. Supponiamo che esista $x_0\in[a,b]$ tale che la successione numerica $f_k(x_0)$ converga in $\mathbb{R}$ e che la successione delle derivate f_k' converga uniformemente in $[a,b]$. Allora f_k converge uniformemente in $[a,b]$ verso una funzione f, derivabile con derivata continua in $[a,b]$, e risulta*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k'(x) = f'(x)\ . \tag{3.18}$$

Dimostrazione: essendo f_k' continua, possiamo scrivere la formula fondamentale del calcolo integrale

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f_k'(t)dt\ , \qquad \forall k\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x\in[a,b]\ . \tag{3.19}$$

Inoltre, detto $\ell\in\mathbb{R}$ il limite della successione numerica $f_k(x_0)$ e indicato con $g(x)$ il limite uniforme della successione $f_k'(x)$ in $[a,b]$, per il teorema sulla continuità del limite, la funzione g è continua in

$[a,b]$ e quindi ivi integrabile. Per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, dalla (3.19) per $k \to +\infty$ segue

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,. \tag{3.20}$$

Pertanto la successione $f_k(x)$ converge puntualmente in $[a,b]$; denotando con $f(x)$ il limite, risulta

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,, \tag{3.21}$$

e, dalle (3.19), (3.21) segue che

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &\le |f_k(x_0) - \ell| + \left| \int_{x_0}^{x} \{f_k'(t) - g(t)\}dt \right| \le \\ &\le |f_k(x_0) - \ell| + (b-a)\cdot \max\{|f_k'(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}\,; \end{aligned} \tag{3.22}$$

quindi, dato che f_k' converge uniformemente verso g in $[a,b]$,

$$\lim_{k\to+\infty} \max\{|f_k(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = 0\,, \tag{3.23}$$

cioè $f_k(x)$ converge uniformemente ad $f(x)$ in $[a,b]$. Infine dalla (3.21), per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si deduce che f è derivabile e che risulta

$$f'(x) = g(x)\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,; \tag{3.24}$$

perciò $\lim_{k\to+\infty} f_k' = g = f'$ e vale la tesi (3.18).

4. Serie di funzioni

Se f_k è una successione di funzioni reali definite nell'insieme I di $\mathbb{R}$, indichiamo con s_k la *successione delle somme parziali*

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1 \\ s_2 &= f_1 + f_2 \\ &\ldots\ldots \\ s_k &= f_1 + f_2 + \ldots + f_k \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tale successione di funzioni s_k si chiama *serie (di funzioni)* di termine generale f_k e si indica anche con il simbolo

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k + \ldots \tag{4.2}$$

Se per ogni $x \in I$ la serie numerica di termine generale $f_k(x)$

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) + \ldots \tag{4.3}$$

è convergente, cioè se la successione $s_k(x)$ converge (ammette limite finito) per ogni $x \in I$, allora si dice che la serie di funzioni (4.2) *converge puntualmente in I*.

Se la successione di funzioni s_k converge uniformemente in I, allora si dice che la serie di funzioni (4.2) *converge uniformemente in I*.

In ogni caso il limite per $k \to +\infty$ di s_k si chiama *somma* della serie di termine generale f_k e si indica con

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,. \tag{4.4}$$

Talvolta con il simbolo (4.4) si indica anche la serie di termine generale f_k, oltre che la sua somma. Come accade anche per le serie numeriche, spesso si utilizza un diverso indice di sommazione per denotare il termine generale di una serie o per la successione delle somme parziali, ad esempio, per una serie convergente, nel modo seguente

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,; \tag{4.5}$$

$$f = \lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,.$$

Come per le serie numeriche, la serie (4.2) si dice *assolutamente convergente* in I se la serie di termine generale $|f_k|$ converge puntualmente in I.

La serie di funzioni (4.2) si dice *totalmente convergente* in I se esiste una successione di numeri reali non negativi M_k tali che

$$|f_k(x)| \le M_k\,, \qquad \forall x \in I,\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

e se risulta convergente la serie numerica

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k + \ldots \tag{4.7}$$

Utile è la seguente

PROPOSIZIONE — *La convergenza totale di una serie di funzioni implica la sua uniforme convergenza; cioè vale l'implicazione*

$$\textit{convergenza totale} \quad \Rightarrow \quad \textit{convergenza uniforme.} \tag{4.8}$$

Dimostrazione: sia $f_1 + f_2 + \ldots + f_k + \ldots$ una serie di funzioni totalmente convergente nell'insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ verso la funzione f e sia

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k + \ldots \tag{4.9}$$

una serie numerica convergente, tale che $|f_k(x)| \leq M_k$, per ogni $x \in I$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per il criterio del confronto, si ha dunque che per ogni $x \in I$ la serie $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_k(x)| + \ldots$ è convergente e quindi che la serie $f_1 + f_2 + \ldots + f_k + \ldots$ converge puntualmente in I ad una funzione f.

Indicato con R_n il resto n-simo della serie (4.9), cioè posto

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \,, \tag{4.10}$$

si ha

$$|f(x) - s_n(x)| \leq R_n \,, \qquad \forall x \in I \,. \tag{4.11}$$

Infatti, se $m > n$, si ha

$$s_m(x) - s_n(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \,, \tag{4.12}$$

da cui segue

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k \,. \tag{4.13}$$

Passando al limite per $m \to +\infty$, si ottiene la (4.11).

Poiché la serie (4.9) converge, risulta

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0 \tag{4.14}$$

e perciò, fissato $\varepsilon > 0$, esiste ν_ε tale che, per $n > \nu_\varepsilon$ sia $R_n < \varepsilon$; ne segue che, per $n > \nu_\varepsilon$ si ha anche, grazie alla (4.11)

$$|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in I \tag{4.15}$$

da cui l'asserto.

Esempio 1. Si consideri per ogni $x \in I = \mathbb{R}$ la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \,, \qquad \text{dove} \qquad f_k(x) = \frac{x}{x^4 + 3k^4} \,, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,. \tag{4.16}$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$, la derivata della funzione $f_k(x)$ vale

$$f_k'(x) = \frac{3(k^4 - x^4)}{(x^4 + 3k^4)^2} \,, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,, \tag{4.17}$$

e si annulla per $x = \pm k$. Si verifica facilmente (si veda il grafico in figura 1.9) che il punto $x = k$ è di massimo assoluto per $f_k(x)$, mentre $x = -k$ è di minimo assoluto. Risulta

$$M_k = \max\{|f_k(x)| : x \in \mathbb{R}\} = f_k(k) = \frac{1}{4k^3} \,, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,, \tag{4.18}$$

e la serie numerica di termine generale $1/k^3$ è (una serie armonica generalizzata) convergente; pertanto la serie di funzioni (4.16) è totalmente convergente in $\mathbb{R}$ e quindi anche uniformemente e puntualmente convergente su tutto $\mathbb{R}$.

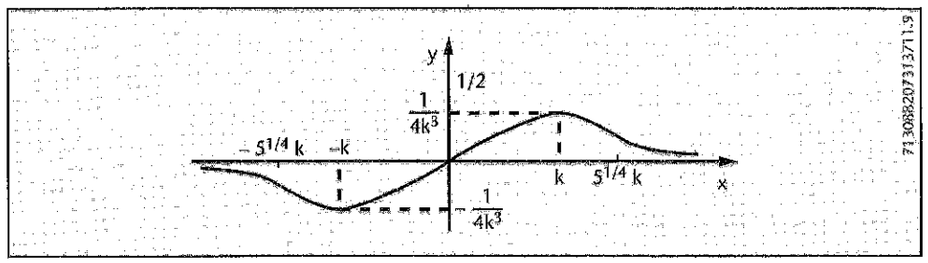

Figura 1.9 – $f_k(x) = \dfrac{x}{x^4 + 3k^4}$

Esempio 2. Un caso molto particolare di serie di funzioni

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k + \ldots \tag{4.19}$$

è quello in cui ogni f_k è costante sull'insieme I considerato. In tal caso se è $f_k(x) = a_k$ per $x \in I$, la convergenza uniforme della serie equivale alla convergenza puntuale, mentre la convergenza totale equivale alla assoluta convergenza della serie numerica a_k. Si costruisce quindi subito un esempio di serie di funzioni (costanti) che converge uniformemente ma non totalmente; basta infatti scegliere f_k, costante in I, uguale a $(-1)^k/k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Il teorema sulla continuità del limite (paragrafo 2) implica il:

TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DELLA SOMMA. — *La somma di una serie di funzioni continue convergente uniformemente è anch'essa continua.*

I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata (paragrafo 3) implicano i seguenti analoghi risultati per le serie di funzioni; consideriamo a tale scopo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \,. \tag{4.20}$$

TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER SERIE. — *Sia f_k una successione di funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e supponiamo che la serie (4.20) converga uniformemente verso f in $[a,b]$. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx \,. \tag{4.21}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE PER SERIE. — *Sia f_k una successione di funzioni derivabili con derivata continua in $[a,b]$. Se la serie (4.20) converge in $[a,b]$ verso f, allora f è derivabile con derivata continua in $[a,b]$ e risulta*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,, \tag{4.22}$$

purché la serie delle derivate converga uniformemente in $[a,b]$.

Talvolta la formula (4.21) si riscrive nel modo seguente

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx \tag{4.23}$$

e si dice che la serie (4.20) può essere integrata termine a termine.

Analogamente, la formula (4.22) si può riscrivere

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,, \tag{4.24}$$

e si dice che la serie (4.20) può essere derivata termine a termine.

5. Serie di potenze

Consideriamo la serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$, cioè la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{5.1}$$

Essa è una particolare serie di funzioni che converge per $x \in (-1,1)$, e non converge per $|x| \geq 1$. Per tale motivo l'intervallo $(-1,1)$ è *l'insieme di convergenza* della serie (5.1).

Più in generale, data una successione di numeri reali a_k, $k = 0,1,2,\ldots$, si pone il problema di determinare l'insieme dei numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che la *serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{5.2}$$

sia convergente, cioè l'*insieme di convergenza* della serie (5.2). Tale insieme è certamente non vuoto, in quanto contiene sempre lo zero.

Esempio 1. Considerata la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k\,, \tag{5.3}$$

per determinare l'insieme di convergenza, osserviamo che

$$\lim_{k\to+\infty} k!\,|x^k| = +\infty\,, \qquad \forall x \neq 0\,. \tag{5.4}$$

Dunque la serie (5.3) converge solo per $x = 0$.

Esempio 2. Considerata la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \tag{5.5}$$

verifichiamo che essa converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti si ha

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

e quindi l'asserto, grazie al criterio del rapporto.

Esempio 3. Per la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)2^k} \tag{5.7}$$

si ha

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{k+1}/(k+2)2^{k+1}}{x^k/(k+1)2^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{2}\frac{k+1}{k+2} = \frac{|x|}{2} \tag{5.8}$$

e dunque, essa converge per $|x| < 2$. Se poi $|x| > 2$, $|x|^k/2^k(k+1)$ tende a $+\infty$ e quindi la serie (5.7) non converge.

Le considerazioni precedenti non si applicano al caso $x = \pm 2$. Tuttavia osserviamo che, per $x = 2$, essa si riduce alla serie armonica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{5.9}$$

che diverge, mentre, per $x = -2$ si riduce alla serie armonica alternata, che converge. In definitiva l'insieme di convergenza è l'intervallo $[-2,2)$.

Negli esempi precedenti si è visto che *l'insieme di convergenza è sempre un intervallo*, eventualmente ridotto ad un sol punto o coincidente con $\mathbb{R}$.

Più precisamente vale il seguente teorema.

TEOREMA 1. — *Data la serie di potenze (5.2) si verifica sempre una delle seguenti circostanze:*

i) *la serie converge solo per $x = 0$*

ii) *la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$*

iii) *esiste un numero reale $\rho > 0$ tale che la serie converge per $|x| < \rho$ e non converge per $|x| > \rho$.*