17. Sistemi lineari.

Ricordiamo che se $p \in N$ allora col simbolo I_p indichiamo l'insieme $\{1, 2, 3, 4, \ldots, p\}$.

17.1. Definizione. Diremo *sistema lineare di m equazioni in n incognite* un insieme di m equazioni lineari (cioè di 1^o grado) del tipo

(eq_1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

(eq_2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

(eq_3) $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$

(eq_4) $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \ldots + a_{4n}x_n = b_4$

…………………………………………………

(eq_m) $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

dove $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ è la n-upla delle *incognite*.

Per ogni $i \in I_m$ il numero reale b_i si dice *termine noto della i-esima equazione*. Per ogni coppia di indici $(i, j) \in I_m \times I_n$ il numero reale a_{ij} si dice *coefficiente dell'incognita x_j nella i-esima equazione*.

17.2. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

E' facile rendersi conto che è possibile rappresentare tale sistema anche nei due modi seguenti:

(I) $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

(II) $$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Si noti, inoltre, che

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ sono proprio le colonne della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$.

Ora, generalizziamo quanto visto nell'Esempio 17.2.

Con riferimento a quanto visto nella Definizione 17.1 definiamo tre matrici A, X e B come segue

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & a_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & . & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Le colonne di A sono

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ . \\ . \\ a_{m3} \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ . \\ . \\ a_{m4} \end{bmatrix}, \ldots.., \quad A^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

E' facile convincersi che il sistema lineare della definizione si può rappresentare nei seguenti modi

(I)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & a_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & . & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero $AX = B$

(II)
$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ . \\ . \\ a_{m3} \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ . \\ . \\ a_{m4} \end{bmatrix} x_4 + \ldots.. + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero $A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots.. + A^nx_n = B$

17.3. Definizione. Quando useremo la rappresentazione (I) diremo che il *sistema* è scritto *in forma matriciale* mentre quando useremo la (II) diremo che il *sistema* è scritto *per colonne*.

Sia C := [A|B] la matrice di tipo m×(n+1) che si ottiene "affiancando" la colonna B alla matrice A.

$$C = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & a_{3n} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & a_{4n} & b_4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & . & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

17.4. Definizione. Per un sistema lineare AX = B diremo che

- A è la *matrice dei coefficienti* o *matrice incompleta* del sistema;
- X è la (matrice) *colonna delle incognite*;
- B è la (matrice) *colonna dei termini noti*;
- C = [A|B] è la *matrice completa* del sistema.

17.5.Osservazione. Per il Teorema 9.22, lo spazio $<A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n>$ generato dalle colonne di A è un sottospazio dello spazio $<A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n, B>$ delle colonne di C. Per cui si ha che

17.5.1. $\mathscr{C}_A \leq \mathscr{C}_C$

17.5.2. $\dim \mathscr{C}_A \leq \dim \mathscr{C}_C$ ovvero rg(A) ≤ rg(C) (per l'Osservazione 10.14.1)

17.5.3. $\mathscr{C}_A = \mathscr{C}_C \iff \dim \mathscr{C}_A = \dim \mathscr{C}_C$ (per l'Osservazione 10.14.2)

17.6. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix} \quad C = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -17 & 7 & 26 \end{array}\right]$$

$$< \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} > \text{ è sottospazio di } < \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix} >$$

17.7. Definizione. Dato un sistema lineare $AX = B$ nelle incognite $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ diremo che la **n-upla ordinata** di numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$ è **UNA** *soluzione del sistema* se sostituendo ordinatamente i numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$ alle incognite $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ in ognuna delle equazioni si ottengono sempre delle identità.

17.8. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

È facile verificare che la quaterna ordinata $(w, x, y, z) = (19, 1, -2, -9)$ è una soluzione del sistema.

Riguardo all'esistenza di soluzioni di un sistema lineare abbiamo il seguente:

17.9. TEOREMA (Rouché - Capelli). Un sistema lineare ha almeno una soluzione se e solo se il rango della sua matrice incompleta è uguale al rango della sua matrice completa.

Dimostrazione. Sia $A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^nx_n = B$ e $C := [A|B]$.

Il sistema ha almeno una soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) \in R^n \iff$

$\iff A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \ldots + A^n\alpha_n = B \iff$

$\iff$ B è una combinazione lineare delle colonne di A $\iff$

$\iff B \in \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n \rangle \iff$

$\iff \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n \rangle = \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n, B \rangle \iff$

$\iff \mathscr{C}_A = \mathscr{C}_C \iff \dim \mathscr{C}_A = \dim \mathscr{C}_C \iff rg(A) = rg(C)$ ■

17.10. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

Abbiamo visto che tale sistema ha almeno una soluzione. Facciamo vedere che $rg(A) = rg(C)$. Il determinante della sottomatrice $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -17 & 7 \end{bmatrix}$ formata dalla prima, terza e quarta colonna di A è non nullo (è uguale a +3). Quindi, $rg(A) = 3$. Da $3 = rg(A) \leq rg(C) \leq 3$ si ha che $rg(C) = 3$.

17.11. Definizione. Un sistema lineare AX = B si dice *normale* se rg(A) = numero righe di A.

17.12. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

Abbiamo visto che rg(A) = 3 = numero righe di A. Quindi, questo sistema lineare è normale.

17.13. Lemma. In un sistema lineare normale il numero delle equazioni è minore o uguale al numero delle incognite.

Dimostrazione. Se AX = B è un sistema lineare normale con A di tipo m×n, allora rg(A) = m.
Da $m = rg(A) \leq \min\{m, n\}$ si ha che $m \leq n$. ■

17.14. Corollario. Un sistema lineare normale ha **sempre** almeno una soluzione.

Dimostrazione. Se AX = B è un sistema lineare normale con A di tipo m×n, allora $m \leq n$. Quindi, $m < (n+1)$ da cui $m = \min\{m, (n+1)\}$. Poiché $m = rg(A) \leq rg(C) \leq \min\{m, (n+1)\} = m$ si ha che rg(A) = rg(C) = m. Per il Teorema di Rouché - Capelli il sistema ha almeno una soluzione. ■

17.15. Definizione. Un sistema lineare AX = B normale con A quadrata si dice *sistema di Cramer*.

17.16. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite (x, y, z)

$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ 5y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Si ha che $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Poichè $\det A = -1 \neq 0$ è rg(A) = 3. Quindi, il sistema è normale.

Poiché A è una matrice quadrata, questo sistema lineare è un sistema di Cramer.

17.17. Teorema. (Cramer) Un sistema di Cramer ha un'unica soluzione.

Dimostrazione. Se $AX = B$ è un sistema di Cramer allora, per definizione, A è quadrata di rango massimo. Per cui A è non singolare (cioè $\det A \neq 0$) e, quindi, invertibile.

E' facile verificare che la colonna $Y := A^{-1}B$ è una soluzione del sistema $AX = B$.

Infatti, moltiplicando la matrice A per la colonna $Y := A^{-1}B$ si ottiene

$AY = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$

Quindi, sostituendo la colonna X con la colonna $Y := A^{-1}B$ si ottiene l'identità $B = B$.

Per cui, la colonna Y è una soluzione del sistema $AX = B$.

Proviamo che tale soluzione Y è unica.

Se Z fosse un'altra soluzione del sistema $AX = B$, allora si avrebbe l'identità $AZ = B$. Da cui si avrebbe $A^{-1}(AZ) = A^{-1}B$. Cioè $(A^{-1}A)Z = Y$ ovvero $IZ = Y$ e, infine $Z = Y$. ■

17.18. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite (x, y, z)

$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ 5y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Abbiamo già visto che questo è un sistema di Cramer.

Si ha che $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Inoltre, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

Quindi, l'unica soluzione del sistema è la colonna

$$Y = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ovvero, la terna $(x, y, z) = (0, 2, -3)$ è l'unica soluzione del sistema.

Si noti che tale sistema ha **UNA** unica soluzione data dalla terna $(0, 2, -3)$.

NON è corretto dire che $x = 0$, $y = 2$ e $z = -3$ sono **TRE** soluzioni del sistema.

17.19. Teorema. Un sistema lineare normale non di Cramer ha infinite soluzioni.

Dimostrazione. Se $AX = B$ è un sistema lineare non normale di Cramer allora $rg(A) = m < n$. Quindi, tra le n colonne di A ne esistono m linearmente indipendenti che fomano una base di $\mathscr{C}_A$. Per comodità supponiamo che siano le ultime $(n - m)$. Rappresentiamo il sistema per colonne

(♣) $\quad A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + \ldots + A^mx_m + A^{m+1}x_{m+1} + A^{m+2}x_{m+2} + \ldots + A^nx_n = B$

Ora, scegliamo **<u>a piacere</u>** una $(n - m)$-upla ordinata di numeri reali $(\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n)$.

Sostituendo in tutte le equazioni del sistema i numeri reali $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n$ ordinatamente alle incognite $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots, x_n$ otteniamo

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + \ldots + A^mx_m + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n = B$$

ovvero

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^mx_m = B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n)$$

Ponendo

- $A^* := [A^1 \mid A^2 \mid A^3 \mid A^4 \mid \ldots \mid A^m]$

(cioè A è la sottomatrice di A ottenuta cancellando da A le sue ultime (n – m) colonne)*

- $B^* := B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n)$

si ottiene un **nuovo** sistema lineare di m equazioni nelle m incognite $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_m)$

(♥) $\quad A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^mx_m = B^*$

La matrice incompleta di questo sistema è la matrice quadrata $A^* := [A^1 \mid A^2 \mid A^3 \mid A^4 \mid \ldots \mid A^m]$ formata dalle prime m colonne della matrice A. Poiché tali colonne sono linearmente indipendenti la matrice A^* ha rango massimo m. Quindi, il sistema (♥) è un sistema di Cramer.

Sia $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m)$ l'unica soluzione del sistema (♥), cioè si ha la seguente

$$A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \ldots + A^m\alpha_m = B^*.$$

E' immediato verificare che la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n)$ è una soluzione del sistema **<u>iniziale</u>** (♣). Infatti, sostituendola all'n-upla delle incognite si ha

$$A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + \ldots + A^m\alpha_m + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n =$$
$$= B^* + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n =$$
$$= [B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n)] + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \ldots + A^n\beta_n = B$$

Quindi, **per ogni scelta** della $(n - m)$-upla $(\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \ldots, \beta_n)$, si ottiene un'unica soluzione del sistema lineare (♣). Di conseguenza, il sistema lineare (♣) ha infinite soluzioni. ■

17.20. Definizione. Nel Teorema 17.12 abbiamo visto che un sistema lineare può avere infinite soluzioni che dipendono dalla scelta di una (n – m)-upla di numeri reali.

In tal caso diremo che *il sistema ha $\infty^{(n-m)}$ soluzioni*.

17.21. Esempio. Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w+2x-y+3z=15 \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-2x-17y+7z=26 \end{cases}$$

Si ha che $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$.

Abbiamo già visto che il determinante della sottomatrice $A'=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -17 & 7 \end{bmatrix}$ formata dalla prima, terza e quarta colonna di A è uguale a +3. Per cui, la prime, terza e quarta colonna di A sono linearmente indipendenti. Quindi, scegliamo la seconda incognita x, poniamola uguale a β e portiamola a secondo membro. Si ottiene il seguente **nuovo** sistema nelle tre incognite (w, y, z)

$$\begin{cases} 2w-y+3z=15-2\beta \\ w-3y+2z=7 \\ 3w-17y+7z=26+2\beta \end{cases}$$

Tale sistema è un sistema di Cramer.

Si ha che $A'=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -17 & 7 \end{bmatrix}$, $X'=\begin{bmatrix} w \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 15-2\beta \\ 7 \\ 26+2\beta \end{bmatrix}$ e $(A')^{-1}=(1/3)\begin{bmatrix} 13 & -44 & 7 \\ -1 & 5 & -1 \\ -8 & 31 & -5 \end{bmatrix}$.

Quindi, l'**unica** soluzione di tale sistema è

$$(A')^{-1}B=(1/3)\begin{bmatrix} 13 & -44 & 7 \\ -1 & 5 & -1 \\ -8 & 31 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15-2\beta \\ 7 \\ 26+2\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 23-4\beta \\ -2 \\ -11+2\beta \end{bmatrix}$$

Per cui, l'unica soluzione è la terna (w, y, z) = (23–4β, –2, –11+2β).

A questo punto è immediato rendersi conto che la quaterna (w, x, y, z) = (23–4β, β, –2, –11+2β) è una soluzione del sistema iniziale. Essendo infiniti i possibili valori di β, si ha che il sistema iniziale ha infinite soluzioni dipendenti dal parametro β.

17.22. Definizione. Dati due *sistemi lineari* AX =B e A̲X = B̲ con A di tipo m×n, A̲ di tipo m×n, diremo che sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. Si noti che affinché due sistemi siano equivalenti è necessario che abbiano lo stesso numero di incognite mentre, in generale, non è necessario i due sistemi abbiano lo stesso numero di equazioni.

17.22. Definizione. Dato un sistema lineare le seguenti azioni:

(1) scambiare due equazioni tra loro;

(2) moltiplicare un'equazione per un numero reale $c \neq 0$;

(3) aggiungere ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale qualsiasi;

si dicono *operazioni elementari sulle equazioni del sistema*.

17.23. Osservazione. Consideriamo le seguenti due equazioni lineari.

(I) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n = b$

(II) $ca_1x_1 + ca_2x_2 + ca_3x_3 + ca_4x_4 + \ldots.. + ca_nx_n = cb \quad$ con $c \neq 0$

Si noti che l'equazione (II) si può scrivere anche nel modo seguente

$c(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n) = cb$

cioè l'equazione (II) è stata ottenuta dall'equazione (I) con l'operazione elementare (2).

Si vede subito che una n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ è una soluzione dell'equazione (I) se e solo se la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ è una soluzione dell'equazione (II).

Quindi, le equazioni (I) e (II) hanno le stesse soluzioni.

17.24. Osservazione. Consideriamo le seguenti tre equazioni lineari.

(I) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n = r$

(II) $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + \ldots.. + b_nx_n = s$

(III) $(a_1+db_1)x_1 + (a_2+db_2)x_2 + (a_3+db_3)x_3 + (a_4+db_4)x_4 + \ldots.. + (a_5+db_5)x_n = r + ds$

Si noti che l'equazione (III) si può scrivere anche nel modo seguente

$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots.. + a_nx_n) + d(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + \ldots.. + b_nx_n) = r + ds$

cioè l'equazione (III) è stata ottenuta dalle equazioni (I) e (II) con l'operazione elementare (3).

Si vede subito che se la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n)$ è soluzione delle equazioni (I) e (II) allora tale n-upla è anche soluzione dell'equazione (III). Inoltre, se la n-upla $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots.., \beta_n)$ è soluzione delle equazioni (II) e (III) allora tale n-upla è anche soluzione dell'equazione (I).

Quindi, se (I) e (II) sono due equazioni di un sistema lineare AX = B allora esso è equivalente al sistema lineare A̲X = B̲ che si ottiene sostituendo l'equazione (I) con l'equazione (III).

Tenendo conto delle Osservazioni 17.23 e 17.24 si ha subito il seguente

17.25. Lemma. Sia $AX = B$ un sistema lineare. Se agiamo su di esso con un numero finito di operazioni elementari, allora otteniamo un sistema lineare $\underline{A}X = \underline{B}$ equivalente a quello iniziale.

17.26. Osservazione. Sia $AX = B$ un sistema lineare. Se un'equazione del sistema è combinazione lineare di altre s equazioni del sistema, allora possiamo supporre che sia l'ultima equazione (se così non fosse possiamo effettuare uno scambio di equazioni). A questo punto, tramite s operazioni elementari del tipo (3) si può ottenere un sistema $\underline{A}X = \underline{B}$ (equivalente a quello dato per il Lemma precedente) che ha come ultima equazione l'identità $0 = 0$.

Tenendo conto dell'Osservazione 17.26 si ha subito il seguente

17.27. Corollario. Se un'equazione di un sistema lineare è combinazione lineare di altre equazioni del sistema, allora eliminando tale equazione si ottiene un sistema equivalente al sistema dato.

17.28. Osservazione. Si noti che ogni operazione elementare sulle righe di un sistema corrisponde ad un'operazione elementare sulla matrice $C = [A|B]$ completa del sistema, e viceversa.

17.29. Corollario. Sia $AX = B$ un sistema lineare. Sia $C = [A|B]$ la matrice completa del sistema. Se la matrice $\underline{C} = [\underline{A}|\underline{B}]$ è stata ottenuta dalla matrice C con un numero finito di operazioni elementari sulle sue righe, allora il sistema lineare $\underline{A}X = \underline{B}$ è equivalente al sistema iniziale.

17.30. TEOREMA. Sia $AX = B$ un sistema lineare **NON** normale. **Se** tale sistema ha almeno una soluzione, **allora** esso è equivalente ad un sistema lineare normale.

Dimostrazione. Sia $AX = B$ un sistema lineare non normale con A di tipo $m \times n$ e sia $C = [A|B]$.
Se esso ha almeno una soluzione allora (per il Teorema di Rouchè-Capelli) $rg(C) = r = rg(A) < m$. Quindi, tra le m righe di C ve ne sono r linearmente indipendenti. Tali r righe sono una base dello spazio delle righe di C. Per cui ognuna delle altre $(m - r)$ si può scrivere come loro combinazione lineare. Sia $\underline{C} = [\underline{A}|\underline{B}]$ la matrice che si ottiene da C cancellando queste $(m - r)$. Il sistema lineare $\underline{A}X = \underline{B}$ (cioè quello ottenuto da quello iniziale eliminando le equazioni che sono combinazioni lineari di altre equazioni) è equivalente, per il Corollario 17.27, al sistema iniziale. Inoltre, si ha che numero righe di $\underline{A} = r = rg(A)$. Quindi, $\underline{A}X = \underline{B}$ è un sistema lineare normale. ■

18. Sistemi lineari omogenei.

18.1. Definizione. Sia AX = B un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite. Se la (matrice) colonna B dei termini noti è la colonna **0** nulla, ovvero sono nulli tutti i termini noti

(eq_1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$

(eq_2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$

(eq_3) $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \ldots + a_{3n}x_n = 0$

(eq_4) $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \ldots + a_{4n}x_n = 0$

……………………………………………………

(eq_m) $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$

allora diremo che il sistema è *omogeneo* e scriveremo AX = **0**.

18.2. Osservazione. E' immediato verificare che **ogni** sistema lineare **omogeneo** in n incognite ha **almeno una** soluzione. Infatti, la n-upla nulla (0, 0, 0, 0, ….., 0), cioè la colonna **0**, è una soluzione del sistema lineare omogeneo AX = **0**.

18.3. Definizione. Sia AX = **0** un sistema lineare omogeneo in n incognit. La sua soluzione data dalla n-upla nulla (0, 0, 0, 0, ….., 0) viene detta *soluzione banale*. Ogni **altra** sua soluzione (quindi diversa da quella banale) viene detta *autosoluzione*.

18.4. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

E' facile verificare che la soluzione banale (0, 0, 0) è la sua unica soluzione.

18.5. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

La quaterna (0, 0, 0, 0) è la soluzione banale. La quaterna (1, 1, –1, 1) è una autosoluzione.

18.6. Teorema. Un sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ in n incognite ha autosoluzioni se e solo se il rango della sua matrice incompleta A è minore del numero n delle incognite.

Dimostrazione. Sia $A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \ldots + A^nx_n = \mathbf{0}$.

Il sistema ha almeno una autosoluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \ldots + A^n\alpha_n = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ le n colonne di A sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A ha $s < n$ colonne linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ $rg(A) = \dim \mathcal{C}_A = s < n$ $\Leftrightarrow$ $rg(A) < n$ ■

18.7. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.4. Esso aveva solo la soluzione banale. Verifichiamo che il rango della sua matrice completa è uguale al numero delle sue incognite. Si ha che $\det A = 2 \neq 0$ e, quindi, $rg(A) = 3$ = numero incognite.

18.8. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.5. Esso aveva almeno una autosoluzione. Verifichiamo che il rango della sua matrice completa è minore del numero delle sue incognite. Col metodo di Gauss-Jordan applicato alla matrice A si trova una matrice a scalino A' avente una riga nulla. Quindi, $rg(A) = rg(A') = 3 < 4$ = numero incognite.

Tenendo conto che se A è di tipo $m\times n$, allora $rg(A) \leq \min\{m, n\}$ si ha il seguente

18.9. Corollario. Se in un sistema lineare omogeneo il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, allora esso ha <u>sicuramente</u> autosoluzioni.

18.10. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Poiché il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, tale sistema ha autosoluzioni. Infatti, si può verificare che $(2, -1, 1, 0, 0)$, $(8, -2, 0, 1, 0)$ e $(0, 2, -4, 1, 0)$ sono autosoluzioni.

Poiché una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se è non singolare si ha il seguente

18.11. Corollario. Un sistema lineare omogeneo quadrato (cioè con tante equazioni quante incognite) ha autosoluzioni se e solo se la sua matrice incompleta è singolare.

18.12. Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

E' facile verificare che $\det A = 0$ e la terna $(2, 1, -1)$ è una sua autosoluzione.

18.13. Tabella. Sia $AX = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo con A di tipo $m \times n$. Si ha che:

- $m < n \rightarrow \infty^{n-rg(A)}$ soluzioni
- $m = n \rightarrow \begin{cases} \det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{la soluzione banale è l'unica soluzione} \\ \det(A) = 0 \Rightarrow \infty^{n-rg(A)} \text{ soluzioni} \end{cases}$
- $m > n \rightarrow \begin{cases} n = rg(A) \Rightarrow \text{la soluzione banale è l'unica soluzione} \\ n > rg(A) \Rightarrow \infty^{n-rg(A)} \text{ soluzioni} \end{cases}$

18.14. Definizione. Con $\mathscr{S}_{AB}$ indicheremo l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

Se il sistema ha n incognite, allora $\mathscr{S}_{AB}$ è un sottoinsieme (anche vuoto) di R^n.

18.15. Teorema. Se $AX = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo in n incognite, allora $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}} \leq R^n$.

Dimostrazione. L'insieme $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$ è <u>non vuoto</u> poiché la n-upla nulla $\mathbf{0}$ è una soluzione di $AX = \mathbf{0}$.

Proviamo ora che $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$ è <u>chiuso rispetto alla somma di due n-uple</u>, cioè che se Y e Z sono due n-uple di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$ allora anche (Y+Z) è una n-upla di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$.

Se Y e Z sono due n-uple di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$ allora $AY = \mathbf{0}$ e $AZ = \mathbf{0}$ sono due identità. Sommandole membro a membro si ottiene l'identità $AY+AZ = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ da cui l'identità $A(Y+Z) = \mathbf{0}$. Per cui (Y+Z) è una soluzione di $AX = \mathbf{0}$ e, quindi, (Y+Z) è una n-upla di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$.

Infine, proviamo che $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$ è chiuso <u>rispetto al prodotto di un numero reale (scalare) per una n-upla</u>, cioè se α è un numero reale e Y è una n-upla di di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$ allora anche (αY) è una n-upla di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$.

Se Y è una n-upla di di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$ allora $AY = \mathbf{0}$ è un'identità. Moltiplicando entrambe i membri di tale identità per α si ottiene l'identità $\alpha(AY) = \alpha\mathbf{0}$ da cui l'identità $A(\alpha Y) = \mathbf{0}$. Per cui αY è una soluzione di $AX = \mathbf{0}$ e, quindi, (αY) è una n-upla di $\mathscr{S}_{A\mathbf{0}}$. ∎

Omettiamo la dimostrazione del seguente

18.16. Teorema. Se AX = **0** è un sistema lineare omogeneo in n incognite, allora

$$\dim \mathcal{S}_{A\mathbf{0}} = n - \mathrm{rg}(A).$$

Vediamo quanto affermato nel Teorema 18.16 con alcuni esempi.

18.17. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.5

$$(\heartsuit)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, rg(A) = rg (H) = 3.

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ($\heartsuit$) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit)\ \begin{cases} x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 12x_3 - 13x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché le prime tre colonne di A' sono <u>sicuramente</u> linearmente indipendenti, portando l'incognita x_4 a secondo membro e ponendo $x_4 = \beta$, otteniamo il seguente sistema di Cramer

$$(\spadesuit)\ \begin{cases} x_1 + 8x_3 = -7\beta \\ x_2 - 12x_3 = 13\beta \\ x_3 = -\beta \end{cases} \qquad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ($\spadesuit$) è la terna $(x_1, x_2, x_3) = (\beta, \beta, -\beta)$. Per cui, per ogni valore reale di β la quaterna $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\beta, \beta, -\beta, \beta)$ è una soluzione del sistema ($\clubsuit$) e, quindi, del sistema ($\heartsuit$).

Per cui il sottospazio delle soluzioni di ($\heartsuit$) è $\mathcal{S}_{A\mathbf{0}} = \{(\beta, \beta, -\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. Inoltre, poiché $(\beta, \beta, -\beta, \beta) = \beta(1, 1, -1, 1)$, la quaterna $(1, 1, -1, 1)$ è un generatore del sottospazio $\mathcal{S}_{A\mathbf{0}}$. Essendo $(1, 1, -1, 1)$ anche linearmente indipendente (è diversa dalla quaterna nulla) si ha che la quaterna $(1, 1, -1, 1)$ è una base di $\mathcal{S}_{A\mathbf{0}}$. Per cui $\dim \mathcal{S}_{A\mathbf{0}} = 1 = 4 - 3 = n - \mathrm{rg}(A)$.

18.18. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.10

$$(\heartsuit)\ \begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5=0 \\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Quindi, rg(A) = rg (H) = 3.

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale (♥) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit)\ \begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5=0 \\ x_2+x_3+2x_4+7x_5=0 \\ 13x_5=0 \end{cases} \qquad A'=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Poiché le prima, la seconda e la quinta colonna di A' sono <u>sicuramente</u> linearmente indipendenti, portando le incognite x_3 e x_4 a secondo membro e ponendo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, otteniamo il seguente sistema di Cramer

$$(\spadesuit)\ \begin{cases} x_1+4x_2-3x_5=-2\alpha \\ x_2+7x_5=-\alpha-2\beta \\ 13x_5=0 \end{cases} \qquad A''=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di (♠) è la terna $(x_1, x_2, x_3) = (2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, 0)$. Per cui, per ogni valore reale di α e β la 5-upla $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, \alpha, \beta, 0)$ è una soluzione del sistema (♣) e, quindi, del sistema (♥).

Per cui il sottospazio delle soluzioni di (♥) è $\mathcal{S}_{\mathbf{A0}} = \{(2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, \alpha, \beta, 0)\in R^5 \mid \alpha,\beta\in R\}$.

Inoltre, poiché $(2\alpha+8\beta, -\alpha-2\beta, \alpha, \beta, 0) = \alpha(2, -1, 1, 0, 0) + \beta(8, -2, 0, 1, 0)$, le 5-uple (2, –1, 1, 0) e (8, –2, 0, 1, 0) sono generatori del sottospazio $\mathcal{S}_{\mathbf{A0}}$.

Essendo (2, –1, 1, 0) e (8, –2, 0, 1, 0) anche linearmente indipendenti (si verifica subito che non sono proporzionali tra loro) si ha che B = ((2, –1, 1, 0), (8, –2, 0, 1, 0)) è una base di $\mathcal{S}_{\mathbf{A0}}$.

Per cui $\dim\mathcal{S}_{\mathbf{A0}} = 2 = 5 - 3 = n - \mathrm{rg}(A)$.

18.19. Esempio. Si consideri il sistema lineare omogeneo seguente

$$(\heartsuit)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+6x_4+5x_5=0 \\ 4x_1-5x_2+7x_3+3x_4-8x_5=0 \\ 8x_1-9x_2+13x_3+15x_4+2x_5=0 \\ 10x_1-12x_2+17x_3+12x_4-11x_5=0 \\ 6x_1-7x_2+10x_3+9x_4-3x_5=0 \\ 14x_1-17x_2+24x_3+15x_4-19x_5=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & -5 & 7 & 3 & -8 \\ 8 & -9 & 13 & 15 & 2 \\ 10 & -12 & 17 & 12 & -11 \\ 6 & -7 & 10 & 9 & -3 \\ 14 & -17 & 24 & 15 & -19 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Quindi, } rg(A) = rg(H) = 2.$$

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ($\heartsuit$) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+6x_4+5x_5=0 \\ x_2-x_3+9x_4+18x_5=0 \end{cases} \qquad A'=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Poiché le prima e la seconda colonna di A' sono linearmente indipendenti, portando le incognite x_3, x_4 e x_5 a secondo membro e ponendo $x_3 = 2\alpha$, $x_4 = \beta$ e $x_5 = 2\gamma$, otteniamo il sistema di Cramer

$$(\spadesuit)\begin{cases} 2x_1-2x_2=-6\alpha-6\beta-10\gamma \\ x_2=+2\alpha-9\beta-36\gamma \end{cases} \qquad A''=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ($\spadesuit$) è la coppia $(x_1, x_2) = (-\alpha-12\beta-41\gamma,\ 2\alpha-9\beta-36\gamma)$. Per cui, per ogni valore reale di α, β e γ la 5-upla $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\alpha-12\beta-41\gamma,\ 2\alpha-9\beta-36\gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$ è una soluzione del sistema ($\clubsuit$) e, quindi, del sistema ($\heartsuit$). Per cui il sottospazio delle soluzioni di ($\heartsuit$) è

$$\mathscr{S}_{A0} = \{(-\alpha-12\beta-41\gamma,\ 2\alpha-9\beta-36\gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)\in R^5 \mid \alpha,\beta,\gamma\in R\}$$

Inoltre, poiché

$$(-\alpha-12\beta-41\gamma,\ 2\alpha-9\beta-36\gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) = \alpha(-1, 2, 1, 0, 0) + \beta(-12, -9, 0, 1, 0) + \gamma(-41, -36, 0, 0, 1)$$

le 5-uple $(-1, 2, 1, 0, 0)$, $(-12, -9, 0, 1, 0)$ e $(-41, -36, 0, 0, 1)$ sono generatori del sottospazio $\mathscr{S}_{A0}$.

Inoltre, la matrice $\left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ -41 & -36 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ che ha come righe quelle tre 5-uple ha sicuramente rango 3 poiché contiene come sottomatrice la matrice unitaria di ordine 3. Quindi, quelle tre 5-uple sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathscr{S}_{A0}$. Per cui $\dim\mathscr{S}_{A0} = 3 = 5 - 2 = n - rg(A)$.

La proprietà vista nel Teorema 18.15 non vale per i sistemi lineari non omogenei. Infatti,

18.17. Osservazione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare **non** omogeneo $AX = B$ in n incognite **non** è un sottospazio di R^n.

Dimostrazione. Se $AX = B$ è un sistema lineare non omogeneo, allora $B \neq \mathbf{0}$. Poiché $A\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq B$, la n-upla nulla $\mathbf{0}$ non è una soluzione del sistema e, quindi, non appartiene a $\mathscr{S}_{AB}$. Poiché l'elemento neutro $\mathbf{0}$ rispetto alla somma non appartiene a $\mathscr{S}_{AB}$, esso non è un sottospazio R^n. ■

18.18. Definizione. Se $AX = B$ è un sistema lineare **non** omogeneo (cioè $B \neq \mathbf{0}$), allora il sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ (cioè avente la stessa matrice A dei coefficienti) viene detto *sistema omogeneo associato* al sistema lineare $AX = B$.

18.19. Teorema. Sia $AX = B$ un sistema lineare **non** omogeneo in n incognite avente almeno una soluzione e sia Y_p una **qulunque** di esse, ovvero $AY_p = B$ è un'identità.

Una n-upla $Z \in R^n$ è una soluzione del sistema $AX = B$

se e solo se

Esiste una n-upla $X_0 \in R^n$ soluzione del sistema omogeneo associato $AX = \mathbf{0}$ tale che $Z = Y_p + X_0$.

Dimostrazione. ($\Downarrow$) Supponiamo che la n-upla $Z \in R^n$ sia una soluzione del sistema $AX = B$. Per cui $AZ = B$ è un identità. Sottraendo membro a membro da tale identità l'identità $AY_p = B$ otteniamo l'identità $AZ–AY_p = B–B$ da cui l'identità $A(Z–Y_p) = \mathbf{0}$. Quindi, la n-upla $(Z–Y_p)$ è una soluzione del sistema omogeneo associato $AX = \mathbf{0}$. Ponendo $X_0 = (Z–Y_p)$, abbiamo che esiste una n-upla X_0 soluzione del sistema lineare omogeneo associato tale che $Z = Y_p + X_0$.

($\Uparrow$) Supponiamo ora che esista una n-upla di R^n del tipo $Z = Y_p + X_0$ dove X_0 è una soluzione del sistema omogeneo associato $AX = 0$. Per cui $AX_0 = \mathbf{0}$ è un'identità. Sommando membro a membro a tale identità l'identità $AY_p = B$ otteniamo l'identità $AX_0+AY_p = \mathbf{0}+B$ da cui l'identità $A(Y_p+X_0) = B$. Quindi, la n-upla $Z = (Y_p+X_0)$ è una soluzione del sistema $AX = B$. ■

19. Autovalori e autovettori di una matrice quadrata.

19.1 Osservazione. Se A è una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n e H è una matrice (colonna) ad elementi reali di tipo n×1 (cioè una n-upla ordinata di numeri reali), allora la matrice AH è una matrice (colonna) ad elementi reali di tipo n×1, cioè AH è dello **stesso tipo** di H.

19.2 Esempio. Se A è quadrata di ordine 3 e H è di tipo 3×1 allora AH è di tipo 3×1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad AH = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad AK = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

<u>Si osservi</u> che non esiste un numero reale β tale che AH = βH, mentre AK = 7K.

19.3 Osservazione. Se A è una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n e se **0** è la matrice (colonna) <u>nulla</u> di tipo n×1 allora **per ogni numero** reale β si ha che A**0** = **0** = β**0**.

19.4. Definizione. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n. Se esistono un <u>numero reale</u> β e una matrice (<u>colonna</u>) ad elementi reali <u>non</u> <u>nulla</u> H di tipo n×1 tali che AH = βH allora diremo che β è un ***autovalore*** di A e che H è un ***autovettore*** di A relativo all'autovalore β.
Quindi, H ≠ **0** è un autovettore di A se e solo se AH è un multiplo di H.

19.5 Esempio. Consideriamo ancora la matrice dell'Esempio 19.2 e i seguenti vettori colonna

$$K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad H_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che AK = 7K. Inoltre, è facile verificare che $AH_2 = 0H_2$ e $AH_3 = H_3$. Quindi,

- K è un autovettore di A relativo all'autovalore $\beta_1 = 7$;
- H_2 è un autovettore di A relativo all'autovalore $\beta_2 = 0$;
- H_3 è un autovettore di A relativo all'autovalore $\beta_3 = 1$.

La colonna H dell'Esempio 19.2 non è un autovettore di A poiché AH non è un multiplo di H.

19.6. Osservazione. Si noti che, per definizione, un autovettore è un vettore **<u>non</u>** **<u>nullo</u>** mentre, come abbiamo visto nell'Esempio 19.5, un autovalore può anche essere uguale a zero.

19.7. Lemma. Se A è una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n, allora $\det(A - \lambda I_n)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado n nella indeterminata λ.

Inoltre, il suo termine di **grado n** è $(-1)^n\lambda^n$ mentre quello di **grado zero** è detA.

Dimostrazione. (*per induzione sull'ordine n della matrice A*). Se n = 1 allora $A = [a_{11}]$ e

$$\det(A - \lambda I_1) = (a_{11} - \lambda) = -\lambda + a_{11} = (-1)^1 \lambda^1 + \det A$$

Quindi, per n = 1 (base induttiva) la tesi è vera.

Ora, (ipotesi induttiva) supponiamo che la tesi sia vera per (n – 1) proviamo la tesi per n.

Osserviamo che se $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots, a_{1n}$ sono gli elementi della prima riga di A allora gli elementi della prima riga di $(A - \lambda I_n)$ sono $(a_{11} - \lambda), a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots, a_{1n}$

Sviluppando il determinante di $(A - \lambda I_n)$ secondo la sua prima riga si ottiene

$$\det(A - \lambda I_n) := (a_{11} - \lambda)\det(A - \lambda I_n)_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$$

$$\det(A - \lambda I_n) := -\lambda\det(A - \lambda I_n)_{11} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$$

Poichè per ogni j = 1, 2, 3, 4, …, n la matrice $(A - \lambda I_n)_{1j}$ è quadrata di ordine (n – 1), per l'ipotesi induttiva, $\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ è un polinomio di grado (n – 1). Quindi, per ogni j = 1, 2, 3, …, n, il polinomio $a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ ha grado minore o uguale a (n – 1). Per cui $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ è un polinomio di grado minore o uguale a (n – 1). Invece, $(-\lambda)\det(A - \lambda I_n)_{11}$ è un polinomio di grado n avente $(-\lambda)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} = (-1)^n\lambda^n$ come suo termine di grado n. Quindi, il polinomio $\det(A - \lambda I_n) = (-\lambda)\det(A - \lambda I_n)_{11} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ è un polinomio di grado n avente $(-1)^n\lambda^n$ come suo termine di grado n. Il termine di grado zero del polinomio $\det(A - \lambda I_n)$ è uguale al valore detA assunto da tale polinomio quando $\lambda = 0$. ■

Tenendo conto del Lemma 19.7 diamo la seguente

19.8 Definizione. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n. Il determinante della matrice $(A - \lambda I_n)$ viene detto ***polinomio caratteristico*** di A e viene indicato con il simbolo $p_A(\lambda)$.

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

19.9 Esempio. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda I_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\quad (A - \lambda I_2) = \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 6)$

19.10 Esempio. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda I_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\quad (A - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} (3-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 6 & 0 & (4-\lambda) \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 1)(7 - \lambda)$

19.11 Esempio. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda I_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\quad (A - \lambda I_4) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 3)$

19.12. Teorema. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n. Un numero reale β è un autovalore di A se e solo se esso è una radice del polinomio caratteristico di A, cioè $p_A(\beta) = 0$.

Inoltre, gli autovettori di A relativi all'autovalore β sono tutte e sole le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo quadrato $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Un numero reale β è un autovalore di A $\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \ : \ AH = \beta H$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \ : \ AH = \beta(I_n H)$ $\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \ : \ AH = (\beta I_n)H$ $\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \ : \ AH - (\beta I_n)H = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \ : \ (A - \beta I_n)H = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ H è un'autosoluzione del sistema $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ il sistema lineare omogeneo **quadrato** $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$ ha autosluzioni $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\det(A - \beta I_n) = 0$ $\Leftrightarrow$ $p_A(\beta) = 0$ $\Leftrightarrow$ β è una radice del polinomio caratteristico di A. ■

19.13 Esempio. Gli autovalori di $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$.

19.14 Esempio. Gli autovalori di $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$.

19.15 Esempio. Gli autovalori di $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = 3$.

19.16 Esercizi Trovare i polinomi caratteristici e gli autovalori delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad p_C(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = (7 - \lambda)(\lambda - 1)^2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad p_D(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_E(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_F(\lambda) = (\lambda - 3)^4$$

19.17 Esercizi Trovare gli autovettori delle matrici precedenti.

$$A \rightarrow \lambda_1 = 3\,,\ H_1 = h\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 1\,,\ H_2 = h\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = -1\,,\ H_3 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \forall h \in R-\{0\}$$

$$B \rightarrow \lambda_1 = 2\,,\ H_1 = h\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 4\,,\ H_2 = h\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall h \in R-\{0\}$$

$$C \rightarrow \lambda_1 = 7\,,\ H_1 = h\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \ \forall h \in R-\{0\} \quad \lambda_2 = 1\,,\ H_2 = h\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ \forall h,k \in R^2-\{(0,0)\}$$

$$D \rightarrow \lambda_1 = 0\,,\ H_1 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 2\,,\ H_2 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall h \in R-\{0\}$$

$$E \rightarrow \lambda_1 = 0\,,\ H_1 = h\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 2\,,\ H_2 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall h,k \in R^2-\{(0,0)\}$$

$$F \rightarrow \lambda_1 = 3\,,\ H_1 = h\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall h,k \in R^2-\{(0,0)\}$$

RICORDIAMO CHE se $p(x) \in R[x]$ è un polinomio in x a coefficienti reali di grado n, allora

- un numero reale α è una sua radice (cioè $p(\alpha) = 0$) se e solo se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$;
- α è una sua *radice di molteplicità h* $\le n$ se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^h$ ma non per $(x - \alpha)^{h+1}$;
- la somma delle molteplicità delle radici **reali** a due a due distinte tra loro è minore o uguale a n;
- se n è dispari allora $p(x)$ ha almeno una radice reale.

19.18 Esempio. Si considerino i seguenti polinomi di R[x]

- $p(x) = (x - 2)(x + 1)^2(x + 4)^5(x - 3)^7$
- $q(x) = (x + 1)^3(x - 5)^4(x - 4)^6(x^2 + 1)$
- $r(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 3x + 3)(x^2 + x - 1)$
- Le radici **reali** di p(x) a due a due distinte tra loro sono 2, −1, −4 e 3. Le loro molteplicità sono rispettivamente 1, 2, 5, e 7. La somma delle loro molteplicità è 15 che è uguale al grado 15 di p(x).
- Le radici **reali** di q(x) a due a due distinte tra loro sono −1, 5 e 4. Le loro molteplicità sono rispettivamente 3, 4, e 6. La somma delle loro molteplicità è 13 che è minore del grado 15 di q(x).
- Il polinomio r(x) **non** ha radici reali.

Tenendo conto di quanto appena ricordato diamo la seguente

19.19 Definizione. Diremo ***molteplicità algebrica di un autovalore*** β, e la indicheremo col simbolo $m_a(\beta)$, di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n la molteplicità di β come radice del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ della matrice A.

19.20 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.16

$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$	$m_a(3) = m_a(1) = m_a(-1) = 1$	
$p_B(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$	$m_a(4) = 1$	$m_a(2) = 2$
$p_C(\lambda) = (7 - \lambda)(\lambda - 1)^2$	$m_a(7) = 1$	$m_a(1) = 2$
$p_D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$	$m_a(0) = m_a(2) = 2$	
$p_E(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$	$m_a(0) = m_a(2) = 2$	
$p_F(\lambda) = (\lambda - 3)^4$	$m_a(3) = 4$	

19.21 Osservazione. Se A è una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente s autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ a due a due distinti tra loro (cioè $i \neq j \iff \lambda_i \neq \lambda_j$), allora $p_A(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - \lambda_1)^{m_a(\lambda_1)}(\lambda - \lambda_2)^{m_a(\lambda_2)}(\lambda - \lambda_3)^{m_a(\lambda_3)}\ldots..(\lambda - \lambda_s)^{m_a(\lambda_s)}$. Quindi,

$$m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + m_a(\lambda_3) + \ldots.. + m_a(\lambda_s) \leq n$$

valendo il segno di **uguaglianza** se e solo se le radici di $p_A(\lambda)$ sono **<u>tutte</u>** reali.

19.22 Esempio. Si considerino i polinomi dell'Esempio 19.20

$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$	$m_a(3) + m_a(1) + m_a(-1) = 3$ = ordine di A
$p_B(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$	$m_a(4) + m_a(2) = 3$ = ordine di B
$p_C(\lambda) = (7 - \lambda)(\lambda - 1)^2$	$m_a(7) + m_a(1) = 3$ = ordine di C
$p_D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$	$m_a(0) + m_a(2) = 4$ = ordine di D
$p_E(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$	$m_a(0) + m_a(2) = 4$ = ordine di E
$p_F(\lambda) = (\lambda - 3)^4$	$m_a(3) = 4$ = ordine di F

Si noti che in tutti i precedenti casi vale il segno di uguaglianza, in quanto ognuno dei polinomi caratteristici ha <u>solo</u> radici reali.

Nel Teorema 19.12 abbiamo visto che gli autovettori relativi ad un autovalore β di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n sono tutte e sole le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$. Tenendo conto del fatto l'insieme delle soluzioni di tale sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale (sottospazio di R^n) diamo la seguente

19.23 Definizione. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n e sia β un suo autovalore. Lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$ viene detto ***autospazio*** relativo all'autovalore β e viene indicato col simbolo $E(\beta)$.

19.24 Osservazione. Se $E(\beta)$ è un autospazio della matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora un vettore X di R^n appartiene ad $E(\beta)$ se e solo se X è il vettore nullo **<u>aut</u>** X è un autovettore di A relativo all'autovalore β.

Ricordando il Teorema 18.16 si ha subito la seguente

19.25 Osservazione. Se $E(\beta)$ è un autospazio della matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora $\dim E(\beta) = n - rg(A - \beta I_n)$. Inoltre, poiché $\det(A - \beta I_n) = 0$ si ha che $rg(A - \beta I_n) < n$. Quindi

$$\dim E(\beta) = n - rg(A - \beta I_n) \geq 1$$

Tenendo conto dell'Osservazione 19.25 precedente diamo la seguente

19.26 Definizione. Se β è un autovalore di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora la dimensione dell'autospazio $E(\beta)$ viene detta ***molteplicità geometrica dell'autovalore*** β e viene indicata col simbolo $m_g(\beta)$. Quindi,

$$m_g(\beta) := \dim E(\beta) = n - rg(A - \beta I_n) \geq 1$$

Omettiamo la dimostrazione del seguente

19.27. Teorema. Se β è un autovalore della matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora la sua molteplicità geometrica è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica, cioè

$$1 \leq m_g(\beta) \leq m_a(\beta)$$

Conseguenza immediata del Teorema 19.27 è il seguente

19.28 Corollario. Sia β un autovalore di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n. Se $m_a(\beta) = 1$ allora $m_g(\beta) = 1$.

19.29 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.17.

Matrice A	$m_a(3) = m_a(1) = m_a(-1) = 1 \;\Rightarrow\; m_g(3) = m_g(1) = m_g(-1) = 1$	
Matrice B	$m_a(4) = 1 \;\Rightarrow\; m_g(4) = 1$	$m_g(2) = 1 < 2 = m_a(2)$
Matrice C	$m_a(7) = 1 \;\Rightarrow\; m_g(7) = 1$	$m_g(1) = 2 = m_a(1)$
Matrice D	$m_g(0) = 1 < 2 = m_a(0)$	$m_g(2) = 1 < 2 = m_a(2)$
Matrice E	$m_g(0) = 2 = m_a(0)$	$m_g(2) = 2 = m_a(2)$
Matrice F	$m_g(3) = 2 < 4 = m_a(3)$	

Tenendo conto del Teorema 19.27 e dell'Osservazione 19.21 si ha subito il seguente

19.30 Corollario. Se A è una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente s autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ a due a due distinti tra loro (cioè $i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$), allora

$$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + m_g(\lambda_3) + \ldots.. + m_g(\lambda_s) \leq n$$

19.31 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.17.

Tenendo conto anche di quanto già visto nell'Esempio 19.22 si ha che

Matrice A $\quad m_g(3) + m_g(1) + m_g(-1) = 1 + 1 + 1 = 3 =$ ordine di A

Matrice B $\quad m_g(4) + m_g(2) = 1 + 1 = 2 < 3 =$ ordine di B

Matrice C $\quad m_g(7) + m_g(1) = 1 + 2 = 3 =$ ordine di C

Matrice D $\quad m_g(0) + m_g(2) = 2 < 4 =$ ordine di D

Matrice E $\quad m_g(0) + m_g(2) = 2 + 2 = 4 =$ ordine di E

Matrice F $\quad m_g(3) = 2 < 4 =$ ordine di F

Relativamente all'intersezione di due autospazi si ha il seguente

19.32. Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n.

Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori distinti ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) di A, allora $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. Ovviamente, $\mathbf{0} \in E(\lambda_1)$ e $\mathbf{0} \in E(\lambda_2)$, da cui $\mathbf{0} \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$.

Se esistesse un autovettore $H \neq \mathbf{0}$ tale che $H \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$ allora si avrebbero le due identità $AH = \lambda_1 H$ et $AH = \lambda_2 H$. Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda si otterrebbe l'identità $(\lambda_2 - \lambda_1)H = \mathbf{0}$. Poiché $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$, per la legge di annullamento del prodotto di uno scalare per un vettore si avrebbe che $H = \mathbf{0}$. Ma ciò è assurdo. Quindi, $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{\mathbf{0}\}$. ■

19.33. Lemma. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ s autovalori di A a due a due distinti tra loro, cioè $i \neq j \iff \lambda_i \neq \lambda_j$.

Se $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}, H_s$ sono s autovettori di A relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ rispettivamente, allora gli autovettori $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}, H_s$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (per induzione sul numero s di autovalori a due a due distinti tra loro)

Se s = 1 allora l'autovettore H_1 è certamente linearmente indipendente in quanto diverso dal vettore nullo. Quindi, per s = 1 la tesi è vera (base induttiva). Ora, nell'ipotesi (induttiva) che la tesi sia vera per (s – 1) proviamo la tesi per s. A tal fine dobbiamo provare che se

$$(\heartsuit) \qquad \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \ldots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s = \mathbf{0}$$

allora deve necessariamente essere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{s-1} = \alpha_s = 0$.

Moltiplicando entrambe i membri dell'identità (♥) a sinistra per la matrice A otteniamo le identità

$$A(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \ldots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s) = A\mathbf{0}$$

$$A(\alpha_1 H_1) + A(\alpha_2 H_2) + A(\alpha_3 H_3) + \ldots + A(\alpha_{s-1} H_{s-1}) + A(\alpha_s H_s) = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1(AH_1) + \alpha_2(AH_2) + \alpha_3(AH_3) + \ldots + \alpha_{s-1}(AH_{s-1}) + \alpha_s(AH_s) = \mathbf{0}$$

Poiché $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}, H_s$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ si ha

$$\alpha_1(\lambda_1 H_1) + \alpha_2(\lambda_2 H_2) + \alpha_3(\lambda_3 H_3) + \ldots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} H_{s-1}) + \alpha_s(\lambda_s H_s) = \mathbf{0}$$

$$(\clubsuit) \qquad (\alpha_1\lambda_1)H_1 + (\alpha_2\lambda_2)H_2 + (\alpha_3\lambda_3)H_3 + \ldots + (\alpha_{s-1}\lambda_{s-1})H_{s-1} + (\alpha_s\lambda_s)H_s = \mathbf{0}$$

Moltiplicando entrambe i membri dell'identità (♥) per lo scalare λ_s otteniamo l'identità

$$\lambda_s(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \ldots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s) = \lambda_s \mathbf{0}$$

$$\lambda_s(\alpha_1 H_1) + \lambda_s(\alpha_2 H_2) + \lambda_s(\alpha_3 H_3) + \ldots + \lambda_s(\alpha_{s-1} H_{s-1}) + \lambda_s(\alpha_s H_s) = \mathbf{0}$$

$$(\spadesuit) \qquad (\alpha_1\lambda_s)H_1 + (\alpha_2\lambda_s)H_2 + (\alpha_3\lambda_s)H_3 + \ldots + (\alpha_{s-1}\lambda_s)H_{s-1} + (\alpha_s\lambda_s)H_s = \mathbf{0}$$

Sottraendo membro a membro l'identità (♠) dall'identità (♣) otteniamo l'identità

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s)H_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_s)H_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_s)H_3 + \ldots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)H_{s-1} = \mathbf{0}$$

Poiché, per ipotesi, gli (s – 1) autovettori $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}$, sono linearmente indipendenti si ha

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_s) = \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_s) = \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0$$

Ma, per ogni $h \neq s$ è $(\lambda_h - \lambda_s) \neq 0$, quindi ciò accade (se e) solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$.

Sostituendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$ nella (♥) si ottiene l'identità $\alpha_s H_s = \mathbf{0}$. Essendo $H_s \neq \mathbf{0}$ (poiché H_s è un autovettore), per la legge di annullamento del prodotto di uno scalare per un vettore si ha che deve necessariamente essere $\alpha_s = 0$. ■

Come **immediata** conseguenza del Lemma 19.33 si ha il seguente

19.34 Corollario. Se A è una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente n autovalori a due a due distinti tra loro, allora esistono n autovettori di A linearmente indipendenti. Quindi, in tal caso esiste sicuramente una **base di** R^n formata da **autovettori** della matrice A.

Tenendo conto del Lemma 19.33 si prova il seguente

19.35 Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n.
Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ s autovalori di A a due a due distinti tra loro, cioè $i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.
Se per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ $H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}, \ldots, H_{im_i}$ sono m_i autovettori relativi all'autovalore λ_i tra loro linearmente indipendenti, allora gli autovettori
$H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{1m_1}, H_{21}, H_{22}, \ldots, H_{2m_2}, H_{31}, H_{32}, \ldots, H_{3m_3}, \ldots.., H_{s1}, H_{s2}, \ldots, H_{sm_s}$
sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Considerata una combinazione lineare di tutti gli autovettori
$H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{1m_1}, H_{21}, H_{22}, \ldots, H_{2m_2}, H_{31}, H_{32}, \ldots, H_{3m_3}, \ldots.., H_{s1}, H_{s2}, \ldots, H_{sm_s}$
si provi che **se** essa ha come risultato il vettore nullo, **allora** tutti i suoi coefficienti sono nulli.

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{i=1}^{s} (\alpha_{i1}H_{i1} + \alpha_{i2}H_{i2} + \alpha_{i3}H_{i3} + \ldots.. + \alpha_{im_i}H_{im_i}) = \mathbf{0}$$

Per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ poniamo $K_i = (\alpha_{i1}H_{i1} + \alpha_{i2}H_{i2} + \alpha_{i3}H_{i3} + \ldots.. + \alpha_{im_i}H_{im_i})$.

Poiché $H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}, \ldots, H_{im_i} \in E(\lambda_i)$ si ha che $K_i \in E(\lambda_i)$ e, dalla ($\heartsuit$), che

$$(\clubsuit) \qquad \sum_{i=1}^{s} K_i = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots.. + K_s = \mathbf{0}$$

Sia $J = \{j \in \{1, 2, 3, \ldots, s\} \mid K_j \neq \mathbf{0}\}$. **Se fosse** $J \neq \varnothing$ allora per ogni $j \in J$ (per l'Osservazione 19.24 K_j sarebbe un autovettore relativo all'autovalore λ_j. Da ($\clubsuit$) si avrebbe $\sum_{j \in J} K_j = \mathbf{0}$. Quest'ultima sarebbe una combinazione lineare (con tutti i coefficienti uguali a uno) di autovettori linearmente indipendenti (per il Lemma 19.33) avente come risultato il vettore nullo. Essendo ciò un **assurdo**, si ha che $J = \varnothing$, cioè per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ è $K_i = \mathbf{0}$.

Quindi, per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ è

$$\alpha_{i1}H_{i1} + \alpha_{i2}H_{i2} + \alpha_{i3}H_{i3} + \ldots.. + \alpha_{im_i}H_{im_i} = \mathbf{0}$$

Poiché tali autovettori sono, per ipotesi, linearmente indipendenti, si ha che

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\} \qquad \alpha_{i1} = \alpha_{i2} = \alpha_{i3} = \ldots.. = \alpha_{im_i} = 0. \quad \blacksquare$$

Tenendo conto del Corollario 19.30 dal Teorema 19.35 si ha subito il seguente

19.36 Corollario. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n. Esiste una base di R^n formata da autovettori di A se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale al suo ordine n.

Tenendo conto del Teorema 19.27 e dell'Osservazione 19.21 si ha il seguente

19.37 Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n. Esiste una **base di** R^n formata da **autovettori** di A se e solo se sono soddisfatte entrambe le condizioni seguenti:
(1) le radici del polinomio caratteristico di A sono **tutte** reali (cioè non ci sono radici complesse);
(2) per ogni autovalore la sua molteplicità algebrica è **uguale** alla sua molteplicità geometrica.

19.38 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.17.
Tenendo conto di quanto già visto nell'Esempio 19.31 si ha che

- ((2, 3, –1), (1, –1, 0), (0, 1, –1)) è una base di R^3 formata da autovettori di A;
- **NON** esiste una base di R^3 formata da autovettori di B;
- ((1, 2, 3), (1, 0, –1), (0, 1, –1)) è una base di R^3 formata da autovettori di C;
- **NON** esiste una base di R^4 formata da autovettori di D;
- ((–2, 1, 0, 0), (–3, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, –1, 0, 1)) è una base di R^4 formata da autovettori di E;
- **NON** esiste una base di R^4 formata da autovettori di F;

Relativamente ad una matrice avente un solo autovalore reale (come la matrice F dell'Esempio 19.38) possiamo provare il seguente

19.39 Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente **un solo** autovalore β. Esiste una base di R^n formata da autovettori di A se e solo se $A = \beta I_n$.

Dimostrazione. Esiste una base di R^n formata da autovettori di A $\Leftrightarrow$ se $m_g(\beta) = n$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $n - rg(A - \beta I_n) = n$ $\Leftrightarrow$ $rg(A - \beta I_n) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(A - \beta I_n) =$ matrice nulla $\Leftrightarrow$ $A = \beta I_n$ ■

20. Diagonalizzazione di una matrice quadrata.

20.1 Definizione. Siano A e B due matrici ad elementi reali quadrate dello stesso ordine n. Diremo che la matrice A è *simile* alla matrice B se esiste una matrice P ad elementi reali quadrata di ordine n invertibile (cioè $\det P \neq 0$) tale che $A = PBP^{-1}$, ovvero $AP = PB$.

20.2 Osservazione. Si prova subito che

20.2.1 ogni matrice è simile a se stessa;

20.2.3 se A è simile a B allora B è simile ad A;

20.2.3 se A è simile a B e B è simile a C allora A è simile a C.

Dimostrazione.

(1) $\exists I : A = IAI = IAI^{-1}$;

(2) $\exists P : A = PBP^{-1} \Rightarrow \exists P^{-1} : B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$;

(3) $\exists P : A = PBP^{-1}$, $\exists Q : B = QCQ^{-1} \Rightarrow \exists PQ : A = P(QCQ^{-1})P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$.

20.3 Osservazione. Se A e B sono simili allora hanno lo stesso determinante.

$AP = PB \Rightarrow \det(AP) = \det(PB) \Rightarrow (\det A)(\det P) = (\det P)(\det B) \Rightarrow \det A = \det B$

Ricordiamo che una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ si dice diagonale se sono nulli tutti gli elementi che non si trovano sulla sua diagonale principale, cioè $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Con il simbolo $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ indicheremo una matrice ad elementi reali diagonale di ordine n avente i numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ sulla sua diagonale principale.

20.4 Definizione. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n. Diremo che la matrice A è *diagonalizzabile* se A è simile ad una matrice diagonale. Cioè, A è diagonalizzabile se esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ tali che

$$A = P\Lambda P^{-1}. \text{ ovvero } AP = P\Lambda$$

In tal caso si dice anche che le matrici P e Λ *diagonalizzano* la matrice A.

20.5 Osservazione. Per l'Osservazione 20.2.2 si ha che una matrice diagonale è diagonalizzabile

20.6 Osservazione. Siano A e P due matrici ad elementi reali quadrate aventi lo stesso ordine n e sia $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots.., \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ una matrice ad elementi reali diagonale di ordine n.

Tenendo conto di come è stato definito il prodotto riga per colonna si ha subito che:

20.6.1. per ogni indice di colonna $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ si ha che la j-esima colonna della matrice prodotto (AP) è uguale al prodotto della matrice A per la j-esima colonna della matrice P. Cioè,

$$(AP)^j = A(P^j)$$

20.6.2. per ogni indice di colonna $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ si ha che la j-esima colonna della matrice prodotto $(P\Lambda)$ è uguale al prodotto dello scalare λ_j per la j-esima colonna della matrice P. Cioè,

$$(P\Lambda)^j = \lambda_j P^j$$

Tenendo conto dell'Osservazione 20.6 si prova subito il seguente

20.7 Teorema. Una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di R^n formata da autovettori di A.

Dimostrazione. A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che $A = P\Lambda P^{-1}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che $AP = P\Lambda$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che per ogni $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ la j-esima colonna di AP è uguale alla j-esima colonna di $P\Lambda$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che per ogni $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ si ha $(AP)^j = (P\Lambda)^j$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono n colonne $P^1, P^2, P^3, \ldots, P^n$ linearmente indipendenti e n numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ tali che $A(P^j) = (AP)^j = (P\Lambda)^j = \lambda_j P^j$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono n autovettori di A linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esiste una base di R^n formata da autovettori di A. ■

20.8 Osservazione. Se esiste una base B di R^n formata da autovettori di A, nella dimostrazione del Teorema 20.7 abbiamo visto un **modo pratico** per trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice invertibile P che diagonalizzano A. La matrice $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots.., \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ è la matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A ognuno ripetuto tante volte quanto è la sua molteplicità algebrica. La matrice P è la matrice che ha come colonna j-esima un autovettore della base B relativo all'autovalore λ_j.

20.9 Esempio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Abbiamo già visto che gli autovettori di A sono

$\lambda_1 = 3 \rightarrow H(\lambda_1) = \alpha(2, 3, -1) \;\; \forall\alpha\in R-\{0\}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow H(\lambda_2) = \beta(1, -1, 0) \;\; \forall\beta\in R-\{0\}$

$\lambda_3 = -1 \rightarrow H(\lambda_3) = \gamma(0, 1, -1) \;\; \forall\gamma\in R-\{0\}$

Scegliendo (a piacere) un autovettore per ogni autovalore, ad esempio $H_1 = (2,3,-1)$, $H_2 = (1,-1,0)$ e $H_3 = (0,1,-1)$, si ottengono 3 autovettori linearmente indipendenti e, quindi, una base di R^3.

Per il Teorema 20.7, la matrice A è diagonalizzabile. Infatti, prendendo le seguenti due matrici

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P := [\, H_1 \mid H_2 \mid H_3 \,] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si ha che $AP = P\Lambda$ ovvero $A = P\Lambda P^{-1}$.

20.10 Esempio. Si consideri la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad p_C(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = (7-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Abbiamo già visto che gli autovettori di C sono

$\lambda_1 = 7 \rightarrow H(\lambda_1) = \alpha(1, 2, 3) \;\; \forall\alpha\in R-\{0\}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow H(\lambda_2) = \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, -1) \;\; \forall\beta,\gamma\in R^2-\{(0,0)\}$

Scegliendo (a piacere) un autovettore per l'autovalore λ_1, ad esempio $H_1 = (1,2,3)$, e (sempre a piacere) due autovettori linearmente indipendenti per l'autovalore λ_2, ad esempio $H_2 = (1,0,-1)$ e $H_3 = (0,1,-1)$, si ottengono 3 autovettori linearmente indipendenti e, quindi, una base di R^3.

Per il Teorema 20.7, la matrice C è diagonalizzabile. Infatti, prendendo le seguenti due matrici

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P := [\, H_1 \mid H_2 \mid H_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

si ha che $CP = P\Lambda$ ovvero $C = P\Lambda P^{-1}$.

20.11 Esempio. Si consideri la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_E(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$$

Abbiamo già visto che gli autovettori di E sono

$\lambda_1 = 0 \to H(\lambda_1) = \alpha(-2, 1, 0, 0) + \beta(-3, 0, 0, 1) \quad \forall\alpha,\beta\in R^2-\{(0,0)\}$

$\lambda_2 = 2 \to H(\lambda_2) = \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(1, -1, 0, 1) \quad \forall\gamma,\delta\in R^2-\{(0,0)\}$

Scegliendo (a piacere) due autovettori linearmente indipendenti per l'autovalore λ_1, ad esempio $H_1 = (-2,1,0,0)$ e $H_2 = (-3,0,0,1)$, e (sempre a piacere) due autovettori linearmente indipendenti per l'autovalore λ_2, ad esempio $H_3 = (0,0,1,0)$ e $H_4 = (1,-1,0,1)$, si ottengono 4 autovettori linearmente indipendenti e, quindi, una base di R^4.

Per il Teorema 20.7, la matrice E è diagonalizzabile. Infatti, prendendo le seguenti due matrici

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P := [\,H_1 \,|\, H_2 \,|\, H_3 \,|\, H_4\,] = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha che $EP = P\Lambda$ ovvero $E = P\Lambda P^{-1}$.

Ricordiamo che (per l'Osservazione 20.5) una matrice diagonale è diagonalizzabile

20.12 Teorema. Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matrice ad elementi reali quadrata di ordine 2 **non diagonale**.

La matrice A è diagonalizzabile se e solo se ha due autovalori distinti, ovvero $[(a-d)^2 + 4bc] > 0$.

Dimostrazione. Si ha che $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$.

Il discriminante del polinomio $p_A(\lambda)$ è $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$.

Se $\Delta > 0$ allora A ha due autovalori distinti. Per cui, per il Corollario 19.34 esiste una base di R^2 formata da autovettori di A. Quindi, per il Teorema 20.7 la matrice A è diagonalizzabile.

Se $\Delta = 0$ allora la matrice A ha **un solo** autovalore β avente molteplicità algebrica 2. Poiché A non è uguale alla matrice diagonale βI_2 (per il Teorema 19.39) la matrice A **non è** diagonalizzabile.

Se $\Delta < 0$ allora la matrice A **non ha** autovalori. Per cui, non esiste una base di R^2 formata da autovettori di A. Quindi, per il Teorema 20.7 la matrice A **non è** diagonalizzabile. ■

20.13 Esempio. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} t & (t-2) \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Determinare per quali valori del parametro reale t la matrice A è diagonalizzabile.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (t+2)\lambda + 4$ $\qquad\qquad \Delta = t^2 + 4t - 12 = (t+6)(t-2)$

A è diagonalizzabile se e solo se $\Delta > 0$, cioè se e solo se $t < -6$ oppure $t > 2$.

20.14 Esempio. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$

Trovare i valori dei parametri reali h e k per i quali la matrice A è diagonalizzabile.

$p_A(\lambda) = (5-\lambda)(h-\lambda)(3-\lambda)$ $\qquad \lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = h \qquad \lambda_3 = 3$

Per ogni h∈R–{3,5} la matrice A ha tre autovalori a due a due distinti tra loro e, quindi, per il Corollario 19.34 esiste una base di R^3 formata da autovettori di A, ovvero A è diagonalizzabile.

Per h = 3 si ha la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ e i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 3$. La molteplicità geometrica di λ_1 è 1 in quanto la sua molteplicità algebrica è 1. Affinché esista una base di R^3 formata da autovettori di A è necessario e sufficiente che sia uguale a 2 anche la molteplicità geometrica di λ_2. Ricordando che $m_g(\lambda_2) = \dim E(\lambda_2) = 3 - rg(A - \lambda_2 I_3)$ e osservando che

$$rg(A - \lambda_2 I_3) = rg(A - 3I_3) = rg\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & k & 0 \end{bmatrix}$$

si ha che $m_g(\lambda_2) = 2$ se e solo se $rg(A - \lambda_2 I_3) = 1$ ovvero **se e solo se k = –7**.

Per h = 5 si ha la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ e i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 3$. La molteplicità geometrica di λ_2 è 1 in quanto la sua molteplicità algebrica è 1. Osservando che

$$rg(A - \lambda_1 I_3) = rg(A - 5I_3) = rg\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & k & -2 \end{bmatrix}$$

si ha che per ogni valore di k è $rg(A - 5I_3) = 2$ ovvero è $m_g(\lambda_1) = 1$. Per cui non esiste una base di R^3 formata da autovettori di A che, quindi, **non** è diagonalizzabile.

20.15 Definizione. Una matrice C ad elementi reali quadrata C si dice *ortogonale* se $C^T = C^{-1}$.

20.16 Osservazione. Una matrice C ad elementi reali quadrata C è ortogonale se e solo se $C^TC = I$.

Dimostrazione. Se C è ortogonale allora $C^TC = C^{-1}C = I$. Viceversa, se $C^TC = I$ allora $\det C \neq 0$ e, quindi, C è invertibile. Si ha che $C^T = C^TI = C^T(CC^{-1}) = (C^TC)C^{-1} = IC^{-1} = C^{-1}$. ■

20.17 Osservazione. Se a e b sono due numeri reali tali che $a^2 + b^2 = 1$, allora

$$\exists!\alpha\in(-\pi, \pi] : a = \cos\alpha \text{ , } b = \sin\alpha$$

20.18 Teorema. Una matrice C ad elementi reali quadrata di **ordine 2** è ortogonale se e solo se

$$\exists!\theta\in(-\pi, \pi] : \ C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ aut } C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Si osservi che nel primo caso è $\det C = 1$ mentre nel secondo caso è $\det C = -1$.

Si osservi, inoltre, che cambiando il segno della seconda colonna di una matrice del primo tipo si ottiene una matrice del secondo tipo e viceversa.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Si verifica subito che se C è una matrice del tipo

$$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ aut } C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

allora in entrambe i casi si ha $C^T = C^{-1}$. Quindi, C è ortogonale.

($\Rightarrow$) Sia, ora, $C := \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ una generica matrice ad elementi reali quadrata di ordine 2 ortogonale.

Da $C^TC = C^{-1}C = I$ si ha che $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ovvero il sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + w^2 = 1 \\ zx + wy = 0 \end{cases}$

Dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$ si ha che $\exists!\theta\in(-\pi, \pi] : x = \cos\theta \text{ , } y = \sin\theta$.

Dall'equazione $z^2 + w^2 = 1$ si ha che $\exists!\omega\in(-\pi, \pi] : z = \cos\omega \text{ , } w = \sin\omega$.

Dall'ultima equazione $zx + wy = 0$ si ha che $\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta = 0$, da cui $\cos(\omega - \theta) = 0$.

Per cui, $\omega - \theta = \pm \pi/2$ ovvero $\omega = \theta \pm \pi/2$.

Se $\omega = \theta + \pi/2$ allora $\cos\omega = -\sin\theta$ e $\sin\omega = \cos\theta$ e, quindi, $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Se $\omega = \theta - \pi/2$ allora $\cos\omega = \sin\theta$ e $\sin\omega = -\cos\theta$ e, quindi, $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$. ■

20.19 Definizione. Una matrice A ad elementi reali quadrata si dice *simmetrica* se $A^T = A$.

20.20 Teorema. Se $A \neq aI_2$ e una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, allora:

1) la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e <u>distinti</u> e, quindi, A è diagonalizzabile;

2) se $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_1, allora un vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \neq \mathbf{0}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_2 se e solo se $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y = 0$;

3) esiste una matrice ortogonale C tale che detC = 1 e $A = C\Lambda C^T$.

Dimostrazione. Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Siccome $A \neq aI_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ allora $b \neq 0$ oppure $a \neq c$. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$. Siccome il suo discriminante $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ è strettamente positivo, la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e distinti e, quindi, per il Teorema 20.12 la matrice **A è diagonalizzabile**.

Tenendo conto che $(\lambda_1 + \lambda_2) = (a + c)$ e $\lambda_1\lambda_2 = (ac - b^2)$ si dimostra subito che:

(♣) le soluzioni dell'equazione $bx + (\lambda_1 - a)y = 0$ sono tutte e sole le coppie $t(b, \lambda_2 - a)$ $\forall t \in R$.

Sia ora $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ un autovettore relativo a λ_1. Quindi, (u_x, u_y) è un'autosoluzione del sistema omogeneo $\begin{bmatrix} (a-\lambda_1) & b \\ b & (c-\lambda_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Per cui esiste $m \neq 0$ tale che $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = m(b, \lambda_1 - a)$.

Un vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \neq \mathbf{0}$ è un autovettore relativo a λ_2 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ è un'autosoluzione del sistema omogeneo $\begin{bmatrix} (a-\lambda_2) & b \\ b & (c-\lambda_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ è un'autosoluzione dell'equazione $(a - \lambda_2)x + by = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esiste $n \neq 0$ tale che $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = n(b, \lambda_2 - a)$ $\Leftrightarrow$ tenendo conto di (♣) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (v_x, v_y) è un'autosoluzione dell'equazione $bx + (\lambda_1 - a)y = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $bv_x + (\lambda_1 - a)v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $mbv_x + m(\lambda_1 - a)v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $u_x v_x + u_y v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

Si ha che $\|\mathbf{u}\|^2 = u_x^2 + u_y^2 = m^2[b^2 + (\lambda_1 - a)^2]$ e $\|\mathbf{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 = n^2[b^2 + (\lambda_2 - a)^2]$. Scegliendo $m = [b^2 + (\lambda_1 - a)^2]^{1/2}$ e $n = [b^2 + (\lambda_2 - a)^2]^{1/2}$ si ha $\|\mathbf{u}\|^2 = u_x^2 + u_y^2 = 1$ e $\|\mathbf{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 = 1$.

ORA, quindi, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ sono due auto**<u>versori</u>** relativi a λ_1 e λ_2 rispettivamente.

Sia $D = \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]$ la matrice che ha come colonne gli auto**<u>versori</u>** $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Tenendo conto che $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \mathbf{v}\bullet\mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} = \mathbf{v}\bullet\mathbf{v} = 1$ si ha che $D^TD = I$. Se $\det D = 1$ allora sia $C := \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]$. Se, invece, $\det D = -1$ sia $C := \left[\begin{array}{c|c} u_x & -v_x \\ u_y & -v_y \end{array}\right]$. <u>In ogni caso</u>, **C è ortogonale con $\det C = 1$** e la seconda colonna di C $(-\mathbf{v}) = (-v_x, -v_y)$ è ancora un auto**<u>versore</u>** relativo a λ_2.

Posto $\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ si ha, poiché A è diagonalizzabile, che $A = C\Lambda C^{-1} = C\Lambda C^T$. ■

Se A è una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, il Teorema 20.20 ci fornisce un **metodo pratico e veloce** per diagonalizzare A tramite una matrice ortogonale C con $\det C = 1$.

Passo 1) **<u>Si trovano</u>** i due autovalori distinti λ_1 e λ_2 di A.

Passo 2) **<u>Si sceglie</u>**, a piacere, uno dei due autovalori di A, ad esempio λ_1.

Passo 3) **<u>Si trova</u>** un autovettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$ relativo a λ_1.

Passo 4) **<u>Si calcola</u>** la lunghezza $h = [w_x^{\,2} + w_y^{\,2}]^{1/2}$ dell'autovettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$.

Passo 5) **<u>Si considera</u>** il versore $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = h^{-1}(w_x, w_y)$.

Per il Teorema 20.20 si ha che i due autoversori relativi a λ_2 sono $(v_x, v_y) = \pm(u_y, -u_x)$.

Inoltre, la matrice $\left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]$ è una matrice ortogonale e, quindi, $\det\left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right] = \pm 1$.

Passo 6) **<u>Si sceglie</u>** l'autoversore (v_x, v_y) relativo a λ_2 tale che $\det\left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right] = 1$.

Passo 7) Si ha che $A = \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc} u_x & u_y \\ \hline v_x & v_y \end{array}\right]$.

20.21 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con $\det C = 1$ che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 8$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 3$ sono $\mathbf{w} = \alpha(1, 2)$ $\forall \alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 5\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 3$. Per cui $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = 8$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$, allora per la matrice ortogonale

$C = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ è $\det C = 1$. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ si ha $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

20.22 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con $\det C = 1$ che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -7$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 5$ sono $\mathbf{w} = \alpha(\sqrt{3}, 1)$ $\forall\alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 4\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 5$. Per cui $\pm\frac{1}{2}(1, -\sqrt{3})$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = -7$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$, allora la matrice ortogonale

$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ha $\det C = 1$. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

20.23 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con $\det C = 1$ che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -25$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 0$ sono $\mathbf{w} = \alpha(4, 3)$ $\forall\alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 25\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(4, 3)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 0$. Per cui $\pm\frac{1}{5}(3, -4)$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = -25$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(-3, 4)$, allora la matrice ortogonale

$C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ha $\det C = 1$. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$