24. La sfera e la circonferenza nello spazio.

24.1. Definizione. Diremo *sfera* l'insieme di tutti e soli i (*il luogo dei*) punti dello spazio che hanno la stessa **distanza R > 0** (detta *raggio* della sfera) da un **fissato punto** (detto *centro* della sfera).

24.2. Lemma. Sia RC(O, **i**, **j**, **k**) un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio.

Se Σ è una sfera di centro $C(x_C, y_C, z_C)$ e raggio $R > 0$, allora un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dello spazio appartiene alla sfera se e solo se la terna delle sue coordinate è una soluzione dell'equazione

$$(\heartsuit)\quad (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = R^2$$

Dimostrazione. $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma \iff d(P_0, C) = R > 0 \iff [d(P_0, C)]^2 = R^2 \iff$

$\iff (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2 + (z_0 - z_C)^2 = R^2 \iff (x_0, y_0, z_0)$ è una soluzione di $(\heartsuit)$. ■

24.3. Teorema. Sia RC(O, **i**, **j**, **k**) un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio.

Il luogo Σ dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$(\clubsuit)\quad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

è una sfera se e solo se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$.

Inoltre, tale sfera ha il centro nel punto $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ e raggio $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$.

Dimostrazione. L'equazione $(\clubsuit)$ è equivalente ad ognuna delle equazioni seguenti

$$x^2 + ax + y^2 + by + z^2 + cz + d = 0$$

$$[x + (a/2)]^2 - (a/2)^2 + [y + (b/2)]^2 - (b/2)^2 + [z + (c/2)]^2 - (c/2)^2 + d = 0$$

$$[x - (-a/2)]^2 + [y - (-b/2)]^2 + [z - (-c/2)]^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - 4d)/4$$

Quest'ultima, postoo $x_C := -a/2$, $y_C := -b/2$, $z_C := -c/2$ e $\delta = (a^2 + b^2 + c^2 - 4d)/4$ si riscrive così

$$(\spadesuit)\quad (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = \delta$$

Ora, si osservi che per ogni terna (x, y, z) di numeri reali il primo membro dell'equazione $(\spadesuit)$ è sempre maggiore o uguale a zero. Quindi, l'equazione $(\spadesuit)$ ha infinite soluzioni se e solo se $\delta > 0$.

Per cui, l'equazione $(\spadesuit)$ rappresenta una sfera se e solo se $\delta > 0$ ovvero $(a^2 + b^2 + c^2 - 4d) > 0$.

Essendo $\delta > 0$, possiamo porre $R := \sqrt{\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$ e l'equazione $(\spadesuit)$ si riscrive così

$$(\heartsuit)\quad (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = R^2$$

che è l'equazione della sfera di centro $C(-a/2, -b/2, -c/2)$ e raggio $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$. ■

24.4. Osservazione. Per ogni numero reale α **non nullo**, l'equazione

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + (\alpha a)x + (\alpha b)y + (\alpha c)z + (\alpha d) = 0$$

è equivalente (cioè ha le stesse soluzioni) all'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Tenendo conto del Teorema 24.3 e dell'Osservazione 24.4 è ben posta la seguente

24.5. Definizione. Sia RC(O, **i**, **j**, **k**) un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio.

Se Σ è una sfera i cui punti hanno coordinate che sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$(\clubsuit)\quad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con } a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$$

allora diremo che ($\clubsuit$) è l'*equazione cartesiana della sfera* Σ.

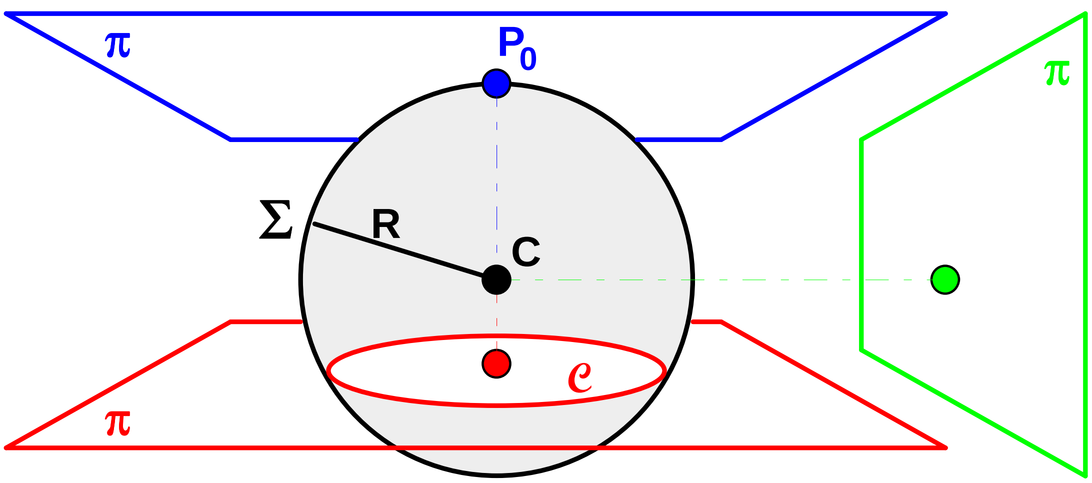
24.6. Osservazione. (*mutua posizione di un piano e una sfera*).

Sia RC(O, **i**, **j**, **k**) un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio. Siano π un piano e Σ una sfera di centro $C(x_C, y_C, z_C)$ e raggio $R > 0$. Si ha che:

(1) $d(C, \pi) > R \quad \Leftrightarrow \quad \pi \cap \Sigma = \emptyset$ il piano è esterno alla sfera;

(2) $d(C, \pi) = R \quad \Leftrightarrow \quad \pi \cap \Sigma = \{P_0\}$ il piano è tangente alla sfera in un punto P_0;

(3) $d(C, \pi) < R \quad \Leftrightarrow \quad \pi \cap \Sigma = \mathcal{C}$ il piano incide la sfera in una circonferenza $\mathcal{C}$.



24.7. Corollario. (*piano tangente ad una sfera in un suo punto*)

Il piano tangente nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ad una sfera di centro $C(x_C, y_C, z_C)$ ha equazione

$$(x_C - x_0)(x - x_0) + (y_C - y_0)(y - y_0) + (z_C - z_0)(z - z_0) = 0$$

Dimostrazione. Il piano appartiene alla stella $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ di piani per P_0.

Poiché il vettore $[P_0C]$ è perpendicolare al piano, scegliamo $(a, b, c) = (x_C - x_0, y_C - y_0, z_C - z_0)$. ■

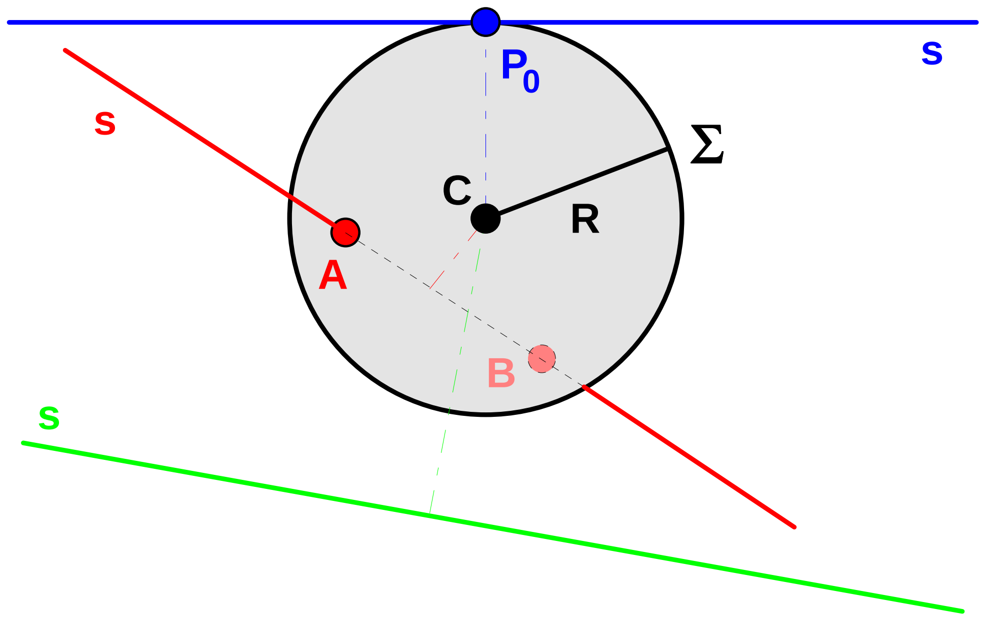
24.8. Osservazione. (*mutua posizione di un retta e una sfera*).

Sia RC(O, **i**, **j**, **k**) un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio. Siano s una retta e Σ una sfera di centro $C(x_C, y_C, z_C)$ e raggio $R > 0$. Si ha che:

(1) $d(C, s) > R \iff s \cap \Sigma = \varnothing$ la retta è esterna alla sfera;

(2) $d(C, s) = R \iff s \cap \Sigma = \{P_0\}$ la retta è tangente alla sfera in un punto P_0;

(3) $d(C, s) < R \iff s \cap \Sigma = \{A, B\}$ la retta incide la sfera in due punti A e B.



24.9. Osservazione. (*mutua posizione di due sfere aventi lo stesso raggio*).

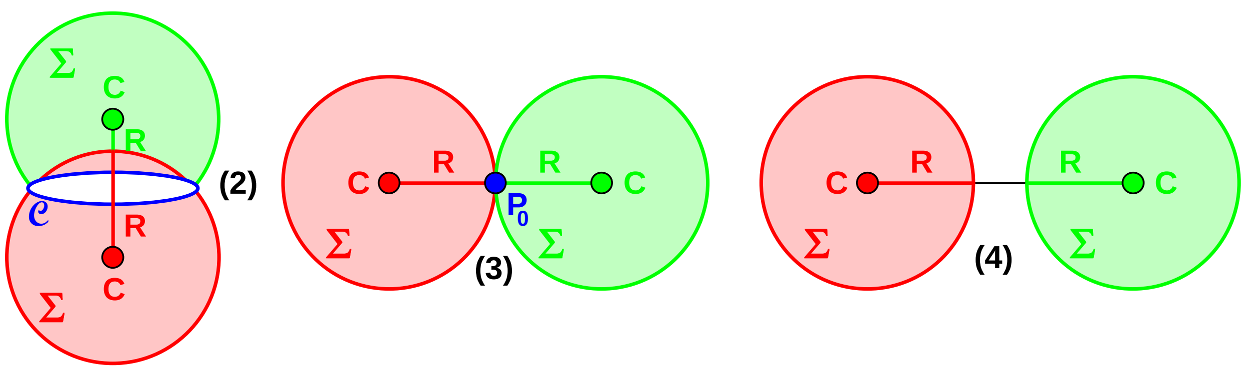
Sia RC(O, **i**, **j**, **k**) un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio. Siano Σ e Σ' due sfere aventi lo <u>stesso</u> raggio $R > 0$. Indicati con $C(x_C, y_C, z_C)$ e $C'(x_{C'}, y_{C'}, z_{C'})$ i loro centri, si ha che:

(1) $d(C, C') = 0 \iff$ le due sfere coincidono;

(2) $0 < d(C, C') < 2R \iff$ l'intersezione delle due sfere è una circonferenza $\mathcal{C}$;

(3) $d(C, C') = 2R \iff$ le sfere sono tangenti esternamente in un punto P_0;

(4) $d(C, C') > 2R \iff$ le sfere sono esterne fra loro.



24.10. Osservazione. (*mutua posizione di due sfere aventi due raggi diversi*).

Sia RC(O, **i**, **j**, **k**) un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio. Siano Σ e Σ' due sfere aventi raggi R e R' tali che R > R' > 0. Indicati con $C(x_C, y_C, z_C)$ e $C'(x_{C'}, y_{C'}, z_{C'})$ i loro centri, si ha che:

(1) $d(C, C') = 0$ ⇔ la sfera Σ' è interna e concentrica alla sfera Σ;

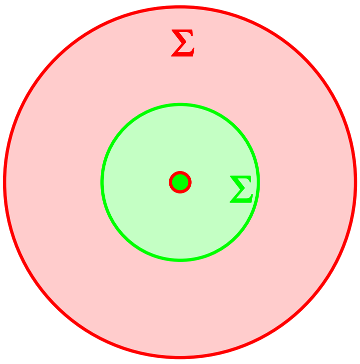
(2) $0 < d(C, C') < R - R'$ ⇔ la sfera Σ' è interna alla sfera Σ;

(3) $d(C, C') = R - R'$ ⇔ la sfera Σ' è interna e tangente in P_0 alla sfera Σ;

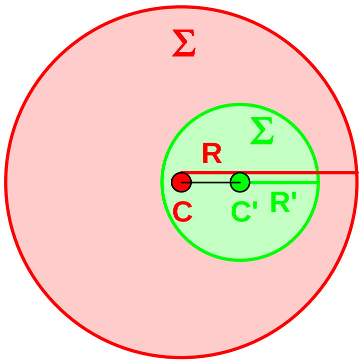
(4) $R - R' < d(C, C') < R + R'$ ⇔ l'intersezione delle due sfere è una circonferenza $\mathcal{C}$;

(5) $d(C, C') = R + R'$ ⇔ le sfere sono tangenti esternamente in un punto P_0;

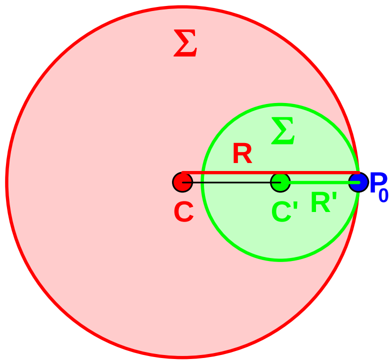
(6) $d(C, C') > R + R'$ ⇔ le sfere sono esterne fra loro.



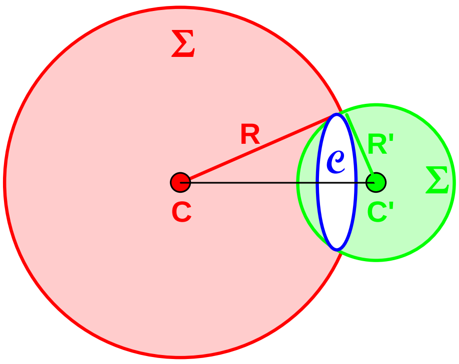
(1)



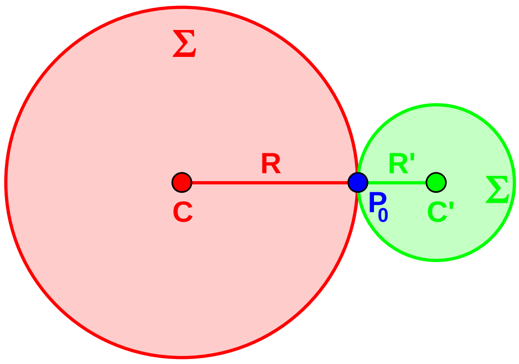
(2)



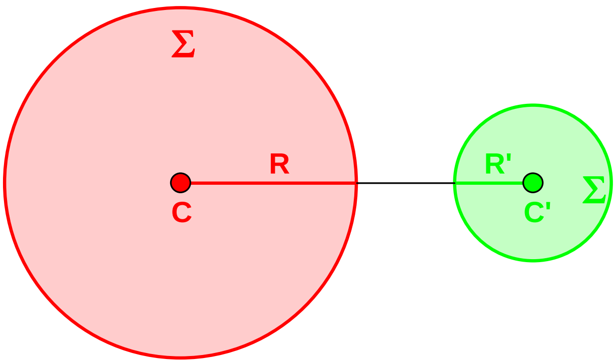
(3)



(4)



(5)



(6)

24.11. Osservazione. (*equazioni cartesiane di una circonferenza nello spazio*).

Nell'Osservazione 24.6 abbiamo visto che l'intersezione di una sfera Σ di centro C e raggio $R > 0$ ed un piano π tale che $d(C, \pi) < R$ è una circonferenza $\mathcal{C}$. Per cui se $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ è l'equazione del piano π e $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ è l'equazione della sfera Σ allora i punti della circonferenza $\mathcal{C}$ sono tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano il sistema

$$(\heartsuit) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Le equazioni (♥) vengono dette *equazioni cartesiane di una circonferenza* nello spazio.

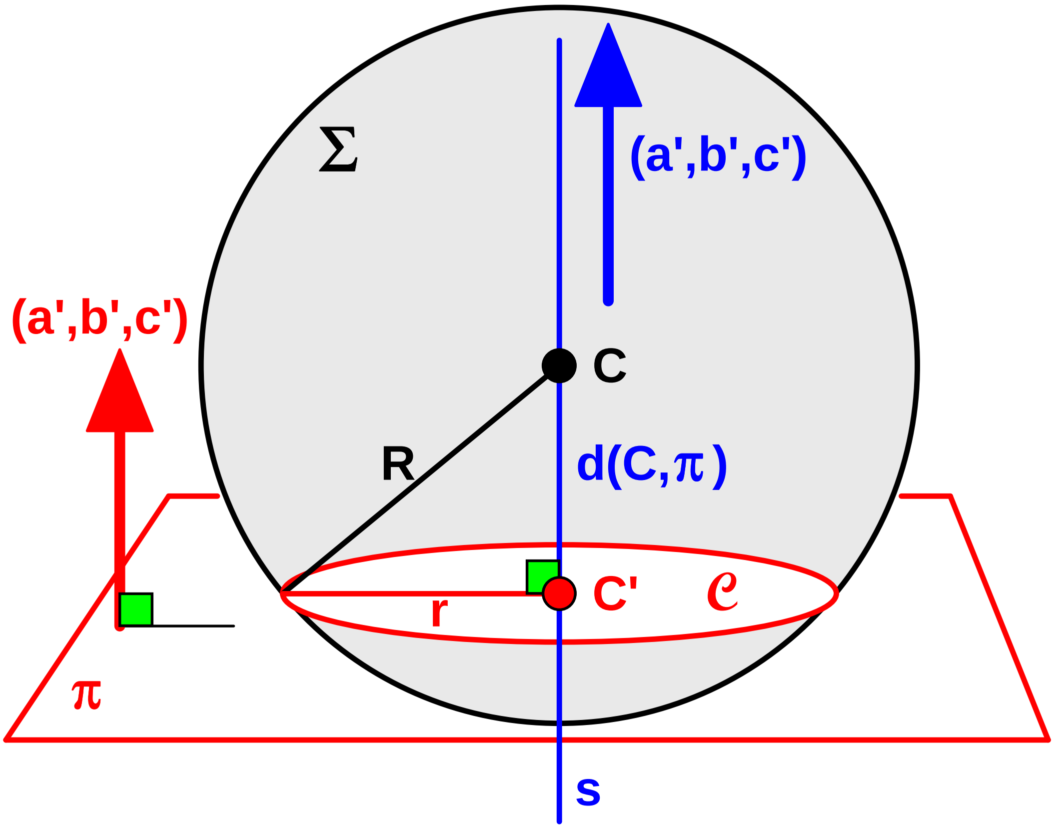
Il *raggio r della circonferenza* $\mathcal{C}$ è $r = \sqrt{R^2 - [d(C,\pi)]^2}$.

La retta s passante per il centro C della sfera Σ e perpendicolare a π ha equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = a't + x_C \\ y = b't + y_C \\ z = c't + z_C \end{cases}.$$

Il *centro C' della circonferenza* è il punto d'intersezione della retta s con il piano π.

$$\{C'\} = s \cap \pi : \begin{cases} x = a't + x_C \\ y = b't + y_C \\ z = c't + z_C \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$



24.12. Osservazione. (*retta tangente ad una circonferenza nello spazio*).

Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza dello spazio avente equazioni cartesiane

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

intersezione della sfera

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

e del piano

$$\pi : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Siano $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto della circonferenza $\mathcal{C}$ e t è la retta tangente in P_0 alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Se $C(x_C, y_C, z_C)$ è il centro della sfera, allora il piano π' tangente in P_0 alla sfera Σ ha equazione

$$\pi' : (x_C - x_0)(x - x_0) + (y_C - y_0)(y - y_0) + (z_C - z_0)(z - z_0) = 0$$

Si vede subito che la retta t si può rappresentare come intersezione del piano π col piano π', per cui la retta t tangente in P_0 alla circonferenza $\mathcal{C}$ ha equazioni cartesiane

$$t : \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ (x_C - x_0)(x - x_0) + (y_C - y_0)(y - y_0) + (z_C - z_0)(z - z_0) = 0 \end{cases}$$