6. Quattro esempi di spazi vettoriali reali.

6.1 I vettori liberi.

Siano $\wp$ ed $\Re$ rispettivamente l'insieme dei punti e quello delle rette dello spazio euclideo.

6.1.1. Definizione. Siano r, s$\in\Re$ due rette complanari. Diremo che r è *parallela* ad s, e scriveremo r // s, se r ed s coincidono (r $\equiv$ s) o non hanno alcun punto in comune (r$\cap$s=$\emptyset$), in quest'ultimo caso diremo anche che le rette r ed s sono parallele in *senso stretto*.

Consideriamo la *relazione* in $\Re$ (detta di *parallelismo*) così definita // = {(r, s)$\in\Re\times\Re$ | r // s}.

6.1.2. Osservazione. E' facile verificare che quella di parallelismo è una relazione di equivalenza.

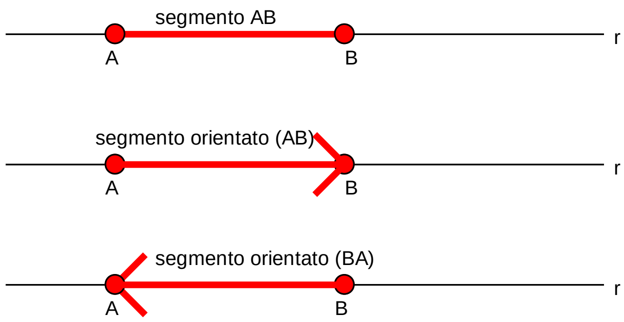
6.1.3. Definizione. Chiamiamo *direzione di una retta* r la classe di equivalenza $[r]_{//}$ = {s$\in\Re$ | s // r}.

6.1.4. Osservazione. Tenendo conto della proprietà (CE2) (vedere Lemma 3.7) delle relazioni di equivalenza si ha che **due rette hanno la stessa direzione se e solo se sono parallele**.

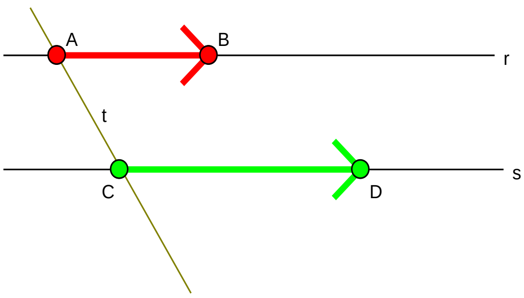
6.1.5. Definizione. Dati due punti distinti A e B diremo *direzione del segmento* AB la direzione della (unica) retta r passante per A e B. Inoltre, stabiliamo che il segmento nullo AA abbia la stessa direzione di ogni altro segmento (cioè sia parallelo ad ogni altro segmento).

6.1.6. Osservazione. Due segmenti non nulli hanno la stessa direzione se e solo se si trovano su due rette parallele.

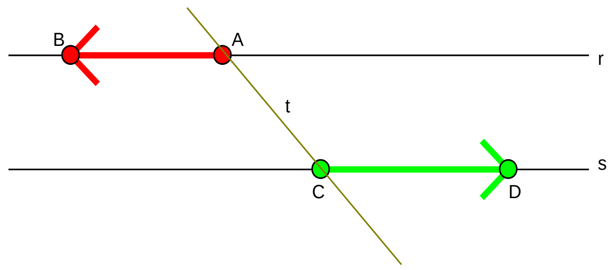
6.1.7. Definizione. Dato un segmento AB di estremi A e B distinti (A ≠ B), esistono due e solo due coppie ordinate distinte (A, B) e (B, A), che chiameremo *versi del segmento*. Indicheremo con (AB) il segmento di verso (A, B) e con (BA) il segmento di verso (B, A).



6.1.8. Definizione. Siano r ed s <u>due rette parallele in senso stretto</u>. Siano A e B due punti distinti di r e C e D due punti distinti di s. Sia π il piano individuato da r ed s e sia t la retta di π passante per A e C. La retta t divide il piano π in due semipiani. Se i punti B e D appartengono allo stesso semipiano, allora diremo che (AB) e (CD) hanno lo *stesso verso*. Altrimenti, diremo che hanno *verso opposto*.

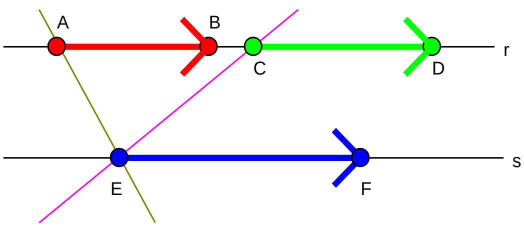


(A,B) e (C,D) hanno lo stesso verso

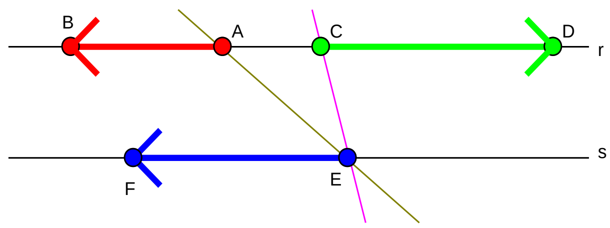


(A,B) e (C,D) hanno verso opposto

6.1.9. Definizione. Sulla <u>stessa retta</u> r siano A, B, C e D quattro punti tali che A ≠ B e C≠ D. Sia s una retta parallela in senso stretto a r e siano E ed F due punti distinti di s tali che (AB) ed (EF) abbiano lo stesso verso. Se (CD) e (EF) hanno lo stesso verso, allora diremo che anche (AB) e (CD) hanno lo *stesso verso*. Altrimenti, diremo che hanno *verso opposto*.



(A,B) e (C,D) hanno lo stesso verso



(A,B) e (C,D) hanno verso opposto

Se (AB) e (CD) hanno la <u>stessa direzione</u> (cioè sono paralleli), allora scriveremo:

- vers(AB) = vers(CD) se hanno lo stesso verso
- vers(AB) = - vers(CD) se hanno verso opposto

6.1.10 Definizione. Stabiliamo che il segmento nullo abbia lo stesso verso di ogni altro segmento.

Indichiamo con Σ l'insieme $\{(AB) \mid A,B\in \wp\}$ e lo chiamiamo *insieme dei segmenti orientati*.

6.1.11. Definizione. Comunque presi due segmenti orientati (AB) e (CD) di Σ, diremo che (AB) è *equipollente* a (CD), e scriveremo $(AB) \approx (CD)$, se (AB) e (CD) hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso. Il sottoinsieme $\{((AB), (CD))\in\Sigma\times\Sigma \mid (AB)$ è equipollente a $(CD)\}$ è una relazione in Σ che chiamiamo *relazione di equipollenza* e indichiamo col simbolo $\approx$.

6.1.12. Osservazione. E' facile verificare che quella di equipollenza è una relazione di equivalenza.

6.1.13. Definizione. Chiamiamo *insieme dei vettori liberi* , e lo indichiamo con V, l'insieme quoziente $\Sigma_{/\approx}$. Quindi, un *vettore libero* è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza (talvolta anche detta classe di equipollenza).

6.1.14 Osservazione. Due segmenti orientati (AA) e (BC) sono equipollenti se e solo se B = C.

6.1.15. Definizione. Chiameremo *vettore libero nullo*, e lo indicheremo col simbolo $\vec{0}$, la classe di equivalenza individuata da un qualsiasi segmento nullo. Quindi, $\vec{0} = \{(AA) \mid A\in \wp\}$.

6.1.16. Definizione. Se $\vec{u} = [(OA)]_{\approx}$, allora il segmento orientato (OA) viene detto *rappresentante* di $\vec{u}$ *applicato in O*.

(OA) è un rappresentante del vettore libero u

Tenendo conto di come è definita la relazione $\approx$ di equipollenza è ben posta la seguente

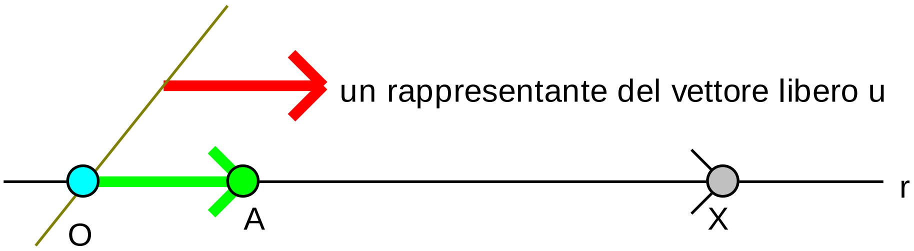
6.1.17. Definizione. Diremo *lunghezza, direzione e verso di un vettore libero* rispettivamente la lunghezza, la direzione e il verso di un suo qualunque rappresentante.

Indicheremo con $\|\vec{u}\|$ la lunghezza del vettore libero $\vec{u}$. Ovviamente, $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

6.1.18. Teorema. (**esistenza ed unicità del rappresentante applicato in un fissato punto**)

Per ogni punto $O \in \wp$ e per ogni vettore libero $\vec{u} \in V$ <u>esiste</u>, ed è <u>unico</u>, un punto $A \in \wp$ tale che $(OA) \in \vec{u}$, ovvero $[(OA)]_{\approx} = \vec{u}$. In altre parole, per ogni punto O dello spazio e per ogni vettore libero $\vec{u}$ esiste un unico rappresentante di $\vec{u}$ applicato in O.

Dimostrazione. Se $\vec{u} = \vec{0}$ allora A coincide con O. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ allora sia r l'<u>unica</u> retta passante per O e avente la stessa direzione di $\vec{u}$ (cioè la stessa direzione di un suo rappresentante). Sia X un punto di r distinto da O tale che il segmento orientato non nullo (OX) abbia lo stesso verso di $\vec{u}$ (cioè lo stesso verso di un suo rappresentante). Sull'<u>unica</u> semiretta per O e X chiamiamo A l'<u>**unico**</u> punto tale che la lunghezza del segmento OA è uguale alla proprio alla lunghezza del vettore $\vec{u}$ (cioè alla lunghezza di un suo rappresentante).



Il segmento orientato (OA) ha la stessa lunghezza, direzione e verso di $\vec{u}$. Quindi, $(OA) \in \vec{u}$.

Il segmento orientato (OA) è l'unico rappresentante del vettore libero $\vec{u}$ applicato nel punto O. ■

Dal precedente teorema segue subito il

6.1.19. Corollario. Dati tre punti $O, A, B \in \wp$ si ha che $[(OA)]_{\approx} = [(OB)]_{\approx} \Leftrightarrow A = B$.

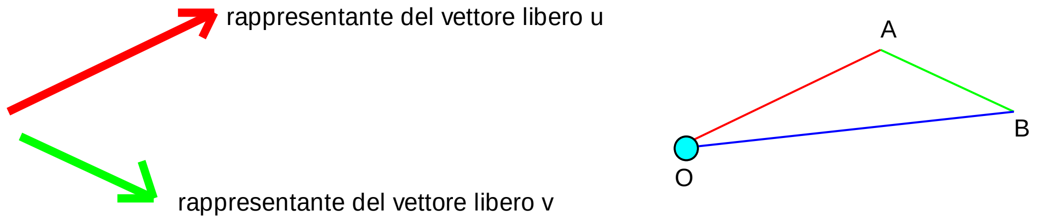
6.1.20. Algoritmo "*S*". Comunque presi due vettori liberi $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si effettuino i seguenti passi:

(1) si scelga, <u>a piacere</u>, un punto $O \in \wp$;

(2) sia $A \in \wp$ l'unico (per il teorema 6.2.18) punto dello spazio tale che $[(OA)]_{\approx} = \vec{u}$;

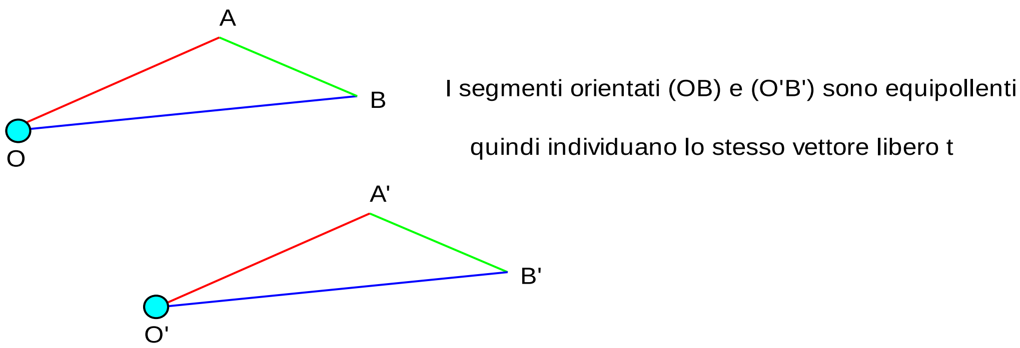
(3) sia $B \in \wp$ l'unico (per il teorema 6.2.18) punto dello spazio tale che $[(AB)]_{\approx} = \vec{v}$;

(4) sia $\vec{t}$ il vettore libero individuato dal segmento orientato (OB), cioè $\vec{t} := [(OB)]_{\approx}$



6.1.21. Osservazione. L'algoritmo precedente determina <u>univocamente</u> il vettore libero $\vec{t}$.

Infatti, anche se al passo (1) scegliessimo un punto O'≠O (e quindi si avrebbe, in generale, A'≠A e B'≠B) è facile rendersi conto che sarebbe (O'B')≈(OB), per cui alla fine $[(O'B')]_{\approx} = [(OB)]_{\approx}$.



Tenendo conto dell'osservazione precedente è ben posta la seguente

6.1.22. Definizione. Sia $[+] : V \times V \to V$ l'operazione binaria ovunque definita ed interna a V così definita:

$$\vec{u}\ [+]\ \vec{v} := \vec{t}$$

dove $\vec{t}$ è il vettore libero ottenuto con l'***algoritmo "S"*** applicato ai vettori liberi $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

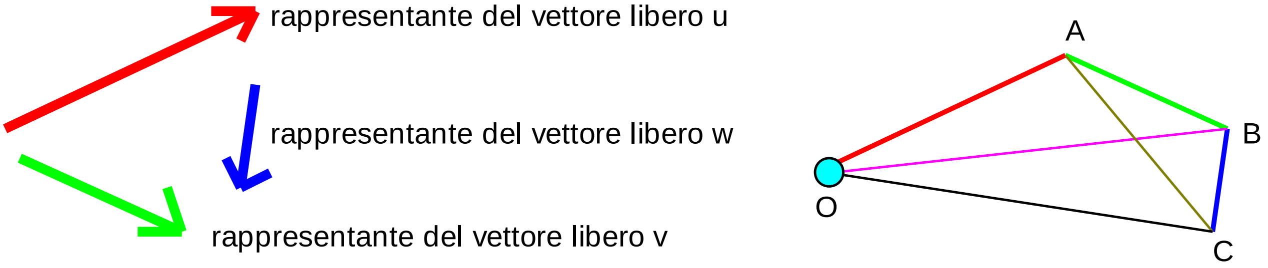
Quindi, si ha che $[(OA)]_{\approx}\ [+]\ [(AB)]_{\approx} := [(OB)]_{\approx}$.

6.1.23. Lemma. La coppia (V, [+]) è un gruppo abeliano.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che valgono (G1), (G2), (G3) e (G4).

(G1) $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad (\vec{u} [+] \vec{v})[+]\vec{w} = \vec{u} [+](\vec{v} [+] \vec{w})$

Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$. Si scelga, a piacere, $O \in \wp$. Sia $A \in \wp$ l'unico punto tale che $[(OA)]_\approx = \vec{u}$. Sia $B \in \wp$ l'unico punto tale che $[(AB)]_\approx = \vec{v}$. Sia $C \in \wp$ l'unico punto tale che $[(BC)]_\approx = \vec{w}$.



$(\vec{u} [+] \vec{v})[+]\vec{w} = ([(OA)]_\approx [+] [(AB)]_\approx) [+] [(BC)]_\approx = [(OB)]_\approx [+] [(BC)]_\approx = [(OC)]_\approx$

$\vec{u} [+](\vec{v} [+] \vec{w}) = [(OA)]_\approx [+] ([(AB)]_\approx [+] [(BC)]_\approx) = [(OA)]_\approx [+] [(AC)]_\approx = [(OC)]_\approx$.

(G2) $\exists\, \vec{0} \in V : \forall\, \vec{u} \in V \quad \vec{u} [+] \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} [+] \vec{u}$

Sia $\vec{u} \in V$. Si scelga, a piacere, $O \in \wp$. Sia $A \in \wp$ l'unico punto tale che $[(OA)]_\approx = \vec{u}$. Si ha che

$\vec{u} [+] \vec{0} = [(OA)]_\approx [+] [(AA)]_\approx = [(OA)]_\approx = \vec{u} = [(OA)]_\approx = [(OO)]_\approx [+] [(OA)]_\approx = \vec{0} [+] \vec{u}$

(G3) $\forall\, \vec{u} \in V \;\; \exists\, \vec{u}' \in V : \; \vec{u} [+] \vec{u}' = \vec{0} = \vec{u}' [+] \vec{u}$

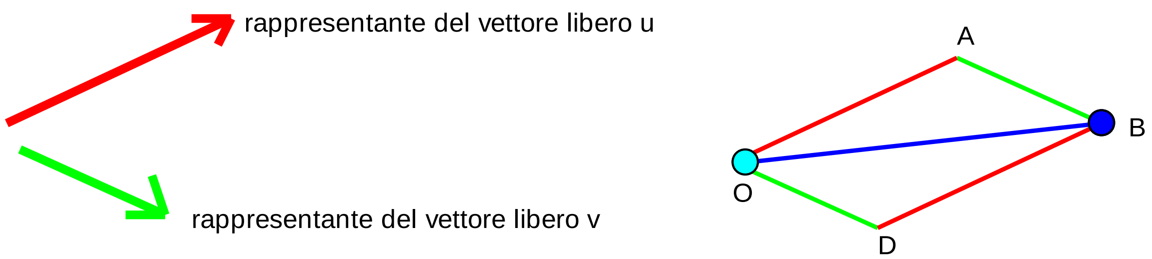
Sia $\vec{u} \in V$. Si scelga, a piacere, $O \in \wp$. Sia $A \in \wp$ l'unico punto tale che $[(OA)]_\approx = \vec{u}$.

Sia $\vec{u}' \in V$ il vettore libero rappresentato dal segmento orientato (AO), cioè $\vec{u}' := [(AO)]_\approx$. Si ha che

$\vec{u} [+] \vec{u}' = [(OA)]_\approx [+] [(AO)]_\approx = [(OO)]_\approx = \vec{0} = [(AA)]_\approx = [(AO)]_\approx [+] [(OA)]_\approx = \vec{u}' [+] \vec{u}$

(G4) $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} [+] \vec{v} = \vec{v} [+] \vec{u}$ ([+] è commutativa)

Siano $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Si scelga, a piacere, $O \in \wp$. Sia $A, B \in \wp$ gli unici punti tali che $[(OA)]_\approx = \vec{u}$ e che $[(AB)]_\approx = \vec{v}$. Sia $D \in \wp$ l'unico punto tale che la figura OABD è un parallelogrammo.

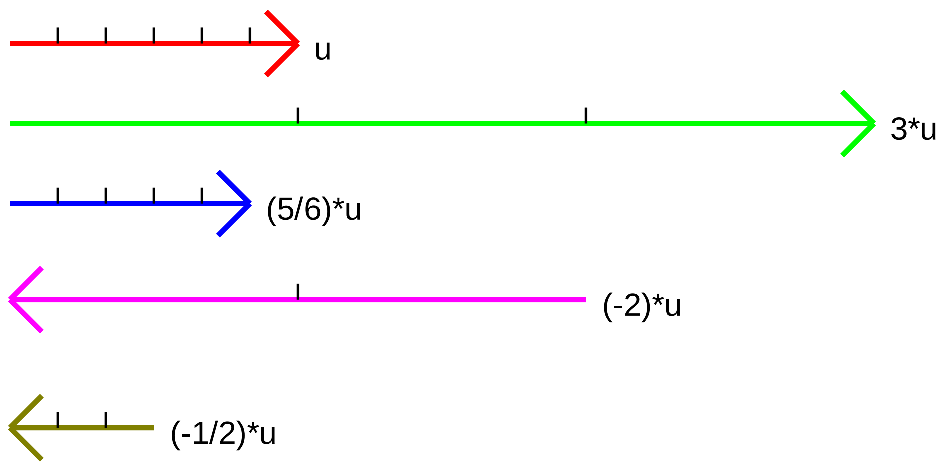


Poiché $(DB) \approx (OA)$ e $(OD) \approx (AB)$ si ha che $[(DB)]_\approx = [(OA)]_\approx = \vec{u}$ e $[(OD)]_\approx = [(AB)]_\approx = \vec{v}$. Quindi,

$\vec{u} [+] \vec{v} = [(OA)]_\approx [+] [(AB)]_\approx = [(OB)]_\approx = [(OD)]_\approx [+] [(DB)]_\approx = \vec{v} [+] \vec{u}$. ■

6.1.24. Definizione. Sia $*: R\times V \rightarrow V$ l'operazione binaria ovunque definita in $R\times V$ a valori in V definita nel modo seguente: $\forall \alpha \in R$, $\forall \vec{u} \in V$

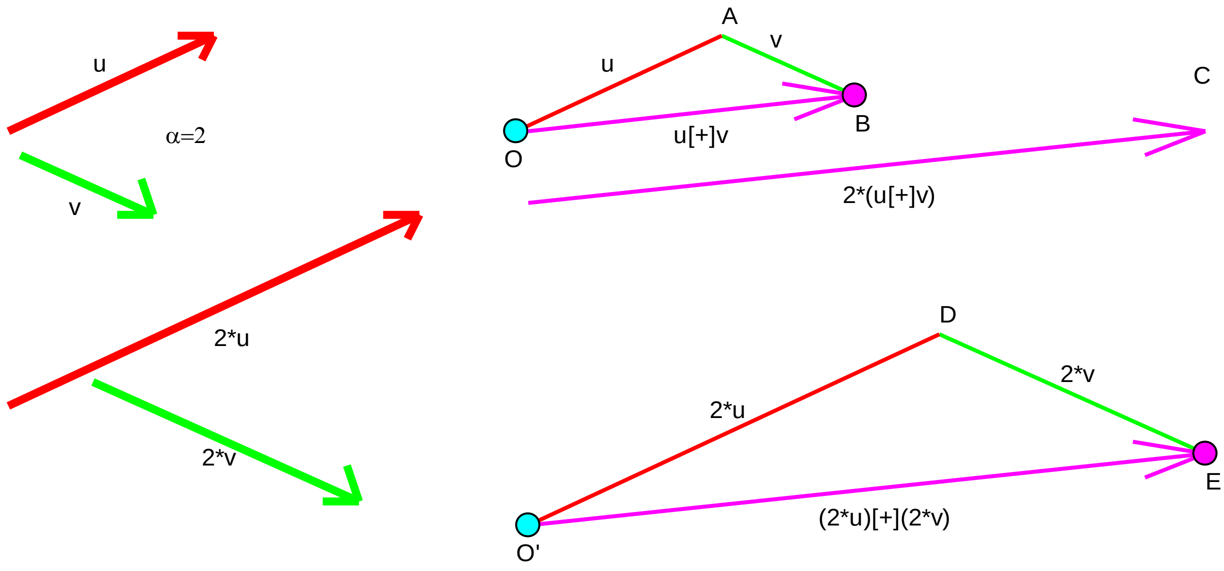
- se $\alpha = 0$ vel $\vec{u} = \vec{0}$ allora $\alpha * \vec{u} := \vec{0}$;
- se $\alpha \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ allora $\alpha * \vec{u}$ è il vettore libero avente lunghezza $\|\alpha * \vec{u}\| := (|\alpha|)\|\vec{u}\|$, la stessa direzione di $\vec{u}$ e verso uguale a quello di $\vec{u}$ se $\alpha > 0$ aut opposto a quello di $\vec{u}$ se $\alpha < 0$.



Si può provare (noi faremo <u>solo</u> degli <u>esempi</u>) che valgono le seguenti proprietà:

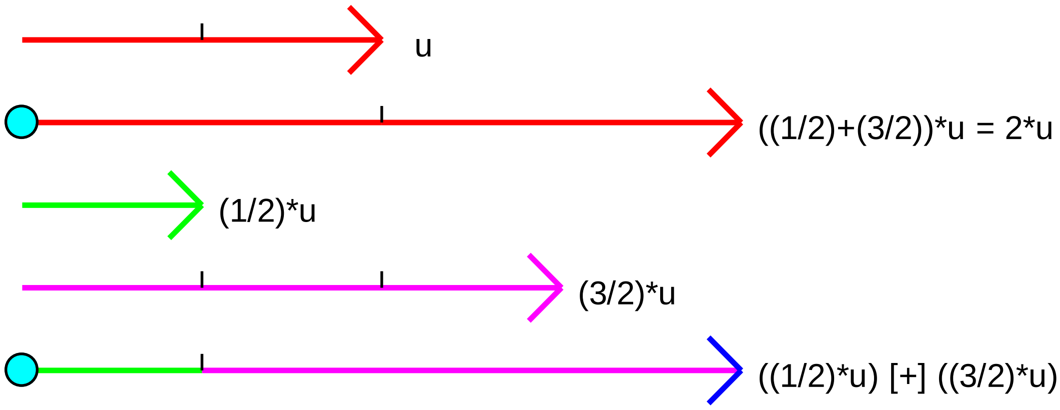
(PS1) $\forall \alpha \in R$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ $\qquad \alpha*(\vec{u} \,[+]\, \vec{v}) = (\alpha * \vec{u}) \,[+]\, (\alpha * \vec{v})$

6.1.25. Esempio. Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ i vettori liberi rappresentati dai segmenti orientati rosso e verde e sia $\alpha = 2$. Si vede che il vettore libero $2*(\vec{u} \,[+]\, \vec{v})$ è uguale al vettore libero $(2*\vec{u}) \,[+]\, (2*\vec{v})$.



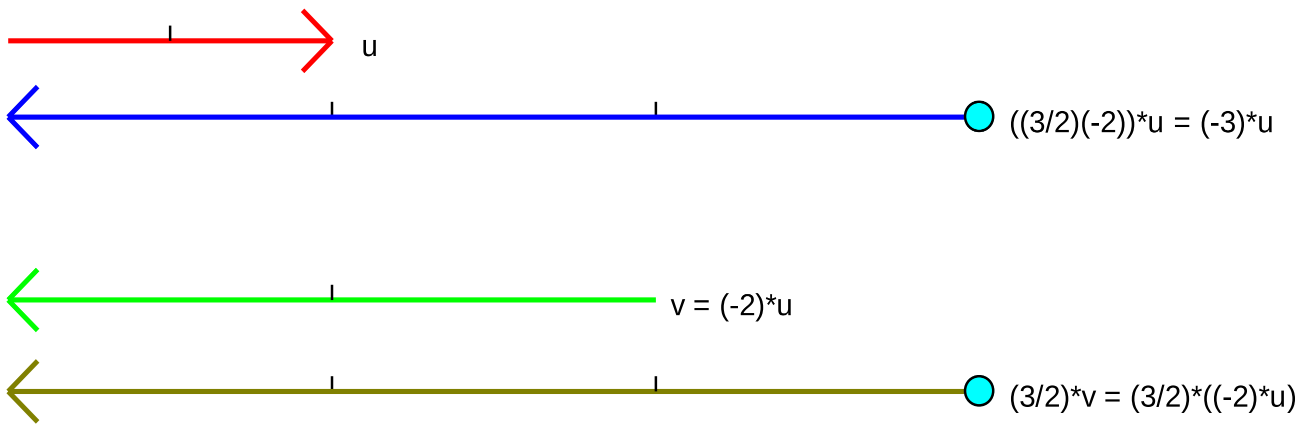
(PS2) $\forall \alpha,\beta \in R$, $\forall \vec{u} \in V$ $\qquad (\alpha+\beta)*\vec{u} = (\alpha*\vec{u})\ [+]\ (\beta*\vec{u})$

6.1.26. Esempio. Sia $\vec{u}$ il vettore libero rappresentato dal segmento orientato rosso. Siano $\alpha=1/2$ e $\beta=3/2$. Si vede che il vettore libero $(1/2+3/2)*\vec{u}$ è uguale al vettore libero $((1/2)*\vec{u})[+]((3/2)*\vec{u})$



(PS3) $\forall \alpha,\beta \in R$, $\forall \vec{u} \in V$ $\qquad (\alpha\beta)*\vec{u} = \alpha*(\beta*\vec{u})$

6.1.27. Esempio. Sia $\vec{u}$ il vettore libero rappresentato dal segmento orientato rosso. Siano $\alpha=3/2$ e $\beta=-2$. Si vede che il vettore libero $((3/2)(-2))*\vec{u}$ è uguale al vettore libero $(3/2)*((-2)*\vec{u})$



Inoltre, è immediato verificare che

(PS4) $\forall \vec{u} \in V$ $\qquad 1*\vec{u} = \vec{u}$

Ricordando (Lemma 6.2.23) che (V, [+]) è un gruppo abeliano, abbiamo provato il seguente:

6.1.28 TEOREMA. La terna (V, [+], *) è uno spazio vettoriale reale.

6. Quattro esempi di spazi vettoriali reali.

6.2 Le n-uple ordinate di numeri reali.

Siano R il campo dei numeri reali e R^n l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali.

Ricordiamo che *due n-uple ordinate di numeri reali*

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) \quad e \quad (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n)$$

sono uguali se e solo se

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3, \qquad , a_{n-1} = b_{n-1},\ a_n = b_n$$

ovvero, se e solo se hanno gli stessi elementi negli stessi "posti".

6.2.1. Osservazione. Date due n-uple ordinate di numeri reali

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) \quad e \quad (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n)$$

per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, (n-1), n\}$ è univocamente determinato il risultato dell'operazione $a_i + b_i$.

Quindi, è anche <u>univocamente</u> determinata la n-upla ordinata di numeri reali seguente:

$$(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots, a_{n-1}+b_{n-1}, a_n+b_n).$$

Tenendo conto dell'osservazione precedente è ben posta la seguente:

6.2.2. Definizione. Sia $\oplus : R^n \times R^n \to R^n$ l'operazione binaria ovunque definita ed interna a R^n definita nel modo seguente: $\forall (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n), (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n) \in R^n$

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) \oplus (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n) := (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots, a_{n-1}+b_{n-1}, a_n+b_n)$$

6.2.3. Esempio. In R^4 si ha che $(2, 4,-7, ½) \oplus (5,-6, 3,-1) = (7, -2, -4,-½)$

6.2.4. Lemma.La coppia (R^n, $\oplus$) è un gruppo abeliano.

Dimostrazione. Tenendo conto delle proprietà del campo R si prova facilmente che:

$\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), (c_1, c_2, \ldots, c_n)\in R^n$

(G1) $\oplus$ è associativa, cioè

$((a_1, a_2, \ldots, a_n)\oplus(b_1, b_2, \ldots, b_n))\oplus(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\oplus((b_1, b_2, \ldots, b_n)\oplus(c_1, c_2, \ldots, c_n))$

(G2) la n-upla ordinata nulla (0, 0, 0, …, 0, 0) è l'elemento neutro rispetto a [+]

(G3) la n-upla $(-a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -a_{n-1}, -a_n)$ è il simmetrico della n-upla $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$

(G4) $\oplus$ è commutativa, cioè $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\oplus(b_1, b_2, \ldots, b_n)) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\oplus(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ■

6.2.5. Osservazione. Data una n-upla ordinata di numeri reali $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ e un numero reale α per ogni i = 1, 2, 3, …, (n-1), n è univocamente determinato il risultato dell'operazione αa_i . Quindi, è anche <u>univocamente</u> determinata la n-upla ordinata di numeri reali seguente:

$$(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \ldots, \alpha a_{n-1}, \alpha a_n).$$

Tenendo conto dell'osservazione precedente è ben posta la seguente:

6.2.6. Definizione. Sia $\otimes : R\times R^n \to R^n$ l'operazione binaria ovunque definita tra uno scalare e una n-upla ordinata di numeri reali a valori in R^n definita nel modo seguente:

$\forall\alpha\in R$, $\forall(a_1, a_2, a_3, \quad, a_{n-1}, a_n)\in R^n$ $\alpha\otimes(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) := (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \ldots, \alpha a_{n-1}, \alpha a_n)$

6.2.7. Esempio. $2\otimes(2, 4,-7, ½) = (4, 8,-14, 1)$; $(-¾)\otimes(8,0, 12,-40) = (-6, 0, -9, 30)$

Tenendo conto che R è un campo, si prova che: $\forall\alpha,\beta\in R$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)\in R^n$

(PS1) $\alpha\otimes((a_1, a_2, \ldots, a_n) \oplus (b_1, b_2, \ldots, b_n)) = (\alpha\otimes(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \oplus (\alpha\otimes(b_1, b_2, \ldots, b_n))$

(PS2) $(\alpha + \beta)\otimes(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha\otimes(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \oplus (\beta\otimes(a_1, a_2, \ldots, a_n))$

(PS3) $(\alpha\beta)\otimes(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \alpha\otimes(\beta\otimes(a_1, a_2, \ldots, a_n))$

(PS4) $1\otimes(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Ricordando (Lemma 6.3.4) che (R^n, $\oplus$) è un gruppo abeliano, abbiamo provato il seguente:

6.2.8. <u>TEOREMA</u>. La terna (R^n, $\oplus$, $\otimes$) è uno spazio vettoriale reale.

6. Quattro esempi di spazi vettoriali reali.

6.3 Le matrici di uno stesso (fissato) ordine ad elementi reali.

Indichiamo con R^n l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali. In 6.3., dopo aver introdotto un'operazione $\oplus$ di "somma" tra due n-uple reali e un'operazione $\otimes$ di "prodotto" tra un numero reale e una n-upla reale, abbiamo visto che la terna $(R^n, \oplus, \otimes)$ è uno spazio vettoriale reale.
Qui indicheremo brevemente con R^n lo spazio vettoriale reale $(R^n, \oplus, \otimes)$.

Siano $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \ldots, \mathbf{a_{(m-1)}}, \mathbf{a_m}$ m elementi di R^n, cioè m n-uple ordinate di numeri reali.

$\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{12}, \ \ , a_{1n})$

$\mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{22}, \ \ , a_{2n})$

$\mathbf{a_3} = (a_{31}, a_{32}, \ \ , a_{3n})$

…………

…………

$\mathbf{a_{(m-1)}} = (a_{(m-1)1}, a_{(m-1)2}, \ \ , a_{(m-1)n})$

$\mathbf{a_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \ \ , a_{mn})$

Consideriamo una m-upla ordinata che contenga tali n-uple come elementi, cioè

$$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \ldots, \mathbf{a_{(m-1)}}, \mathbf{a_m})$$

ovvero

$$((a_{11}, a_{12}, \ \ , a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ \ , a_{2n}), (a_{31}, a_{32}, \ \ , a_{3n}), \ldots, (a_{(m-1)1}, a_{(m-1)2}, \ \ , a_{(m-1)n}), (a_{m1}, a_{m2}, \ \ , a_{mn}))$$

6.3.1. Definizione. Diremo *matrice di tipo m×n ad elementi reali* ogni m-upla ordinata avente come elementi n-uple ordinate di numeri reali.

6.3.2. Esempio.

	A = ((2,3,0), (1,-7,4))	è una matrice di tipo 2×3.
	B = ((4,5,1), (1,1,1), (0,0,-2))	è una matrice di tipo 3×3.
	C = ((1,2,3,4), (11,-4,-4,9), (-6,0,8,0))	è una matrice di tipo 3×4.

6.3.3. Osservazione. Ovviamente, una matrice è una (mn)-upla. Ma è anche "qualcosa di più".

Di solito una matrice di tipo m×n viene **rappresentata** con una tabella rettangolare di m righe e n colonne in modo tale che gli n elementi della i-esima riga siano proprio gli n elementi della i-esima n-upla ordinata $\mathbf{a_i}$.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \\ \\ \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \mathbf{a_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & a_{(m-1)3} & a_{(m-1)4} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{(m-1),(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

In tal modo si ha che il numero reale a_{ij} che si trova nella i-esima riga e j-esima colonna della matrice (che diremo *elemento di posto ij*) è il j-esimo elemento della i-esima n-upla ordinata.

6.3.4. Esempio. Usando questa nuova rappresentazione scriveremo

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ invece di A = ((2,3,0), (1,-7,4))

$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ invece di B = ((4,5,1), (1,1,1), (0,0,-2))

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -4 & 9 \\ -6 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ invece di C = ((1,2,3,4), (11,-4,-4,9), (-6,0,8,0))

Per brevità, spesso scriveremo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ per indicare una tabella rettangolare di m righe ed n colonne contenente come elementi dei numeri reali.

6.3.5. Definizione. Col simbolo M(m, n, R) indicheremo l'insieme contenente tutte e sole le matrici di tipo m×n ad elementi reali. In pratica $M(m, n, R) = (R^n)^m$.

6.3.6. Osservazione. Siano $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \\ \\ \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \mathbf{a_m} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \\ \\ \mathbf{b_{(m-1)}} \\ \mathbf{b_m} \end{bmatrix}$ due matrici ad elementi reali dello stesso tipo m×n. Per ogni indice $i \in \{1, 2, 3, \dots, (m\text{-}1), m\}$ di riga è <u>univocamente</u> determinata in R^n la n-upla ordinata $\mathbf{a_i} \oplus \mathbf{b_i}$ risultato dell'operazione $\oplus$ tra le due n-uple ordinate $\mathbf{a_i}$ e $\mathbf{b_i}$ .Quindi, è anche <u>univocamente</u> determinata la matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \oplus \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} \oplus \mathbf{b_2} \\ \mathbf{a}3 \oplus \mathbf{b_3} \\ \\ \mathbf{a_{m\text{-}1}} \oplus \mathbf{b_{m\text{-}1}} \\ \mathbf{a_m} \oplus \mathbf{b_m} \end{bmatrix}$ ad elementi reali di tipo m×n.

Tenendo conto dell'osservazione precedente è ben posta la seguente

6.3.7. Definizione. Sia $[\oplus] : M(m, n, R) \times M(m, n, R) \to M(m, n, R)$ l'operazione binaria ovunque definita ed interna a M(m, n, R) definita nel modo seguente:

$$\forall \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \\ \\ \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \mathbf{a_m} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \\ \\ \mathbf{b_{(m-1)}} \\ \mathbf{b_m} \end{bmatrix} \in M(m, n, R) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \\ \\ \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \mathbf{a_m} \end{bmatrix} [\oplus] \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \\ \\ \mathbf{b_{(m-1)}} \\ \mathbf{b_m} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \oplus \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} \oplus \mathbf{b_2} \\ \mathbf{a_3} \oplus \mathbf{b_3} \\ \\ \mathbf{a_{m\text{-}1}} \oplus \mathbf{b_{m\text{-}1}} \\ \mathbf{a_m} \oplus \mathbf{b_m} \end{bmatrix}$$

Tale operazione (fra due matrici dello <u>**stesso**</u> **tipo**) viene detta *somma di due matrici*.

6.3.8. Esempio.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix} [\oplus] \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -7 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -8 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} [\oplus] \begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

6.3.9. Definizione. Una *matrice* ad elementi reali di tipo $m\times n$ la diremo *nulla*, e la indicheremo col simbolo $\mathbf{O}_{m\times n}$ (o anche, quando il tipo $m\times n$ è chiaro dal contesto, più brevemente con $\mathbf{O}$) se **tutte** le sue righe sono uguali alla n-upla nulla (0, 0, 0, …,0, 0). Quindi, tutti gli elementi di $\mathbf{O}_{m\times n}$ sono nulli.

6.3.10. Esempio. $\mathbf{O}_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6.3.11. Definizione. Sia A una matrice ad elementi reali di tipo $m\times n$. Con $\underline{A}$ indicheremo la matrice ad elementi reali di tipo $m\times n$ definita nel modo seguente: per ogni indice $i\in\{1, 2, 3, \ldots, (m-1), m\}$ di riga se $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{i(n-1)}, a_{in})$ è la i-esima riga di A allora $(-a_{i1}, -a_{i2}, -a_{i3}, \ldots, -a_{i,(n-1)}, -a_{in})$ è la i-esima riga di $\underline{A}$. Ovvero, se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\underline{A} = [b_{ij}]_{m\times n}$ allora per ogni indice $i\in\{1, 2, 3, \ldots, (m-1), m\}$ di riga e ogni indice $j\in\{1, 2, 3, \ldots, (n-1), n\}$ di colonna si ha che e $b_{ij} = - a_{ij}$.

6.3.12. Esempio. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -4 & 9 \\ -6 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ allora $\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -11 & 4 & 4 & -9 \\ 6 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$

Tenendo conto che $(R^n, \oplus)$ è un gruppo abeliano si prova subito che valgono le seguenti proprietà:

(G1) $\forall A,B,C\in M(m, n, R)$ $\qquad (A [\oplus] B) [\oplus] C = A [\oplus] (B [\oplus] C)$

La somma tra matrici gode della proprietà associativa.

(G2) $\exists\ \mathbf{O}_{m\times n}\in M(m, n, R) : \forall A\in M(m, n, R)$ $\qquad A [\oplus] \mathbf{O}_{m\times n} = A = \mathbf{O}_{m\times n} [\oplus] A$

Esiste una particolare matrice, quella nulla, che si comporta da elemento neutro rispetto alla soma.

(G3) $\forall A\in M(m, n, R)\ \exists\in \underline{A}(m, n, R)$: $\qquad A [\oplus] \underline{A} = \mathbf{O}_{m\times n} = \underline{A} [\oplus] A$

Per ogni matrice A ne esiste una $\underline{A}$ che si comporta da simmetrico rispetto alla somma.

(G4) $\forall A,B\in M(m, n, R)$ $\qquad A [\oplus] B = B [\oplus] A$

La somma tra matrici gode della proprietà commutativa.

Abbiamo quindi provato il seguente

6.3.13. Lemma. La coppia $(M(m, n, R), [\oplus])$ è un gruppo abeliano.

6.3.14. Osservazione. Per la proprietà (G6) si ha che la matrice $\underline{A}$ è unica. Tale matrice viene anche detta *matrice opposta* della matrice A e indicata col simbolo (-A).

6.3.15. Osservazione. Siano $\alpha \in R$ e $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \\ \\ \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \mathbf{a_m} \end{bmatrix}$ una matrice ad elementi reali di tipo m×n. Per ogni indice $i \in \{1, 2, 3, \ldots, (m-1), m\}$ di riga è <u>univocamente</u> determinata in R^n la-nupla $\alpha \otimes \mathbf{a_i}$ risultato dell'operazione di prodotto tra il numero reale α e la n-upla $\mathbf{a_i}$. Quindi, è anche <u>univocamente</u> determinata la matrice $\begin{bmatrix} \alpha \otimes \mathbf{a_1} \\ \alpha \otimes \mathbf{a_2} \\ \alpha \otimes \mathbf{a_3} \\ \\ \alpha \otimes \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \alpha \otimes \mathbf{a_m} \end{bmatrix}$ ad elementi reali di tipo m×n .

Tenendo conto dell'osservazione precedente è ben posta la seguente

6.3.16. Definizione. Sia $[\otimes] : R \times M(m, n, R) \to M(m, n, R)$ l'operazione binaria così definita:

$$\forall \alpha \in R \quad \forall \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \\ \\ \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \mathbf{a_m} \end{bmatrix} \in M(m, n, R) \qquad \alpha\, [\otimes] \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \\ \\ \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \mathbf{a_m} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha \otimes \mathbf{a_1} \\ \alpha \otimes \mathbf{a_2} \\ \alpha \otimes \mathbf{a_3} \\ \\ \alpha \otimes \mathbf{a_{(m-1)}} \\ \alpha \otimes \mathbf{a_m} \end{bmatrix}$$

Tale operazione viene detta *prodotto di un numero reale per una matrice*.

6.3.17. Esempio. $(-3)[\otimes]\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 & 0 \\ 3 & 21 & -12 \end{bmatrix}$

$$(1/2)[\otimes]\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$0[\otimes]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -4 & 9 \\ -6 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenendo conto che (R^n, ⊕, ⊗) è uno spazio vettoriale reale si prova subito che valgono le proprietà:

(PS1) $\forall\alpha\in R$, $\forall A, B\in M(m, n, R)$ $\qquad$ $\alpha[\otimes](A\ [\oplus]\ B) = (\alpha[\otimes]A)\ [\oplus]\ (\alpha[\otimes]B)$

(PS2) $\forall\alpha, \beta\in R$, $\forall A\in M(m, n, R)$ $\qquad$ $(\alpha+\beta)[\otimes]A = (\alpha[\otimes]A)\ [\oplus]\ (\beta[\otimes]A)$

(PS3) $\forall\alpha, \beta\in R$, $\forall A\in M(m, n, R)$ $\qquad$ $(\alpha\beta)[\otimes]A = \alpha[\otimes](\beta[\otimes]A)$

(PS4) $\forall A\in M(m, n, R)$ $\qquad$ $1[\otimes]A = A$

Ricordando (Lemma 6.4.13) che (M(m, n, R), [⊕]) è un gruppo abeliano, abbiamo il seguente:

6.3.18. <u>TEOREMA</u>. La terna (M(m, n, R), [⊕], [⊗]) è uno spazio vettoriale reale.

6. Quattro esempi di spazi vettoriali reali.

6.4 Le funzioni reali di variabile reale.

6.4.1. Osservazione. Siano $R \subseteq A\times B$ e $S \subseteq A\times B$ due relazioni tra gli (stessi) insiemi A e B. Ovviamente, le due relazioni R e S (in quanto sottoinsiemi di $A\times B$) sono uguali ($R = S$) se e solo se:

$$R \subseteq S \quad \text{et} \quad S \subseteq R$$

ovvero se e solo se per ogni $(a, b)\in A\times B$

$$((a, b)\in R \Rightarrow (a, b)\in S) \quad \text{et} \quad ((a, b)\in S \Rightarrow (a, b)\in R)$$

ovvero se e solo se per ogni $(a, b)\in A\times B$

$$(aRb \Rightarrow aSb) \quad \text{et} \quad (aSb \Rightarrow aRb)$$

Tenendo conto dell'ultima condizione si ha la seguente

6.4.2. Osservazione. Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : A \to B$ si ha che

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall a\in A \quad f(a) = g(a)$$

Ovvero, ***due funzioni*** f e g definite su di uno stesso insieme A e a valori in uno stesso insieme B ***sono uguali*** se e solo se per ogni elemento a di A si ha che la sua immagine f(a) tramite f è uguale alla sua immagine g(a) tramite g.

6.4.3. Definizione. Se $I \subseteq R$ allora $f : I \to R$ si dice *funzione reale di variabile reale definita in I*.

Col simbolo $\Im_I(R)$ indicheremo l'insieme delle funzioni reali di variabile reale definite in I.

6.4.4. Osservazione. Si noti che se $I \subseteq J\subseteq R$ allora $\Im_R(R) \subseteq \Im_J(R) \subseteq \Im_I(R)$.

6.4.5. Definizione. Col simbolo e indicheremo la funzione di $\Im_I(R)$ così definita:

$$\forall x\in I \quad e(x)=0\in R.$$

6.4.6 Definizione. Per ogni $f\in\Im_I(R)$ col simbolo $(-f)$ indicheremo la funzione $\Im_I(R)$ così definita:

$$\forall x\in I \quad (-f)(x) := -f(x)\in R$$

6.4.7. Osservazione. Siano f, $g \in \Im_I(R)$. Per ogni $x \in I$ è <u>univocamente</u> (poiché la somma di due numeri reali è un'operazione binaria ovunque definita ed interna a R) determinato il numero reale f(x) + g(x). Quindi, possiamo definire <u>univocamente</u> una funzione $h \in \Im_I(R)$ nel modo seguente:

$$\forall x \in I \quad h(x) := f(x) + g(x)$$

Per l'osservazione precedente è ben posta la seguente:

6.4.8. Definizione. Sia ✚ : $\Im_I(R) \times \Im_I(R) \to \Im_I(R)$ l'operazione binaria ovunque definita ed interna a $\Im_I(R)$ definita nel modo seguente:

$$\forall f, g \in \Im_I(R) \qquad f \text{ ✚ } g := h$$

dove per ogni $x \in I$ si ha che $h(x) := f(x) + g(x)$. Quindi, (f ✚ g)(x) = f(x) + g(x).

6.4.9. Osservazione. Siano $\alpha \in R$ e $f \in \Im_I(R)$. Per ogni $x \in I$ è <u>univocamente</u> (poiché il prodotto di due numeri reali è un'operazione binaria ovunque definita ed interna a R) determinato il numero reale $\alpha f(x)$. Quindi, possiamo definire una <u>univocamente</u> una funzione $h \in \Im_I(R)$ nel modo seguente:

$$\forall x \in I \quad g(x) := \alpha f(x)$$

Per l'osservazione precedente possiamo dare la seguente

6.4.10. Definizione. Sia ✖ : $R \times \Im_I(R) \to \Im_I(R)$ l'operazione l'operazione binaria ovunque definita tra uno scalare e una funzione reale di variabile reale definita in I a valori in $\Im_I(R)$ così definita:

$$\forall \alpha \in R,\ \forall f \in \Im_I(R) \qquad \alpha \text{✖} f := g$$

dove per ogni $x \in I$ si ha che $g(x) := \alpha f(x)$. Quindi, $(\alpha$✖$f)(x) = \alpha f(x)$

Possiamo, ora, provare il seguente

6.4.11. <u>TEOREMA</u>. La terna ($\Im_I(R)$, ✚, ✖) è uno spazio vettoriale reale.

Dimostrazione. Tenendo conto delle proprietà del campo R si prova facilmente che:

(G1) $\forall f, g, h \in \Im_I(R)$ $(f \boldsymbol{+} g) \boldsymbol{+} h = f \boldsymbol{+} (g \boldsymbol{+} h)$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$((f \boldsymbol{+} g) \boldsymbol{+} h)(x) = (f \boldsymbol{+} g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) =$

$= f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + (g \boldsymbol{+} h)(x)) = (f \boldsymbol{+} (g \boldsymbol{+} h))(x)$

(G2) $\exists e \in \Im_I(R) \quad \forall f \in \Im_I(R)$ $f \boldsymbol{+} e = f = e \boldsymbol{+} f$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$(f \boldsymbol{+} e)(x) = f(x) + e(x) = f(x) + 0 = f(x) = 0 + f(x) = e(x) + f(x) = (e \boldsymbol{+} f)(x)$

(G3) $\forall f \in \Im_I(R) \quad \exists (-f) \in \Im_I(R)$ $f \boldsymbol{+} (-f) = e = (-f) \boldsymbol{+} f$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$(f \boldsymbol{+} (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = e(x)$

$((-f) \boldsymbol{+} f)(x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 = e(x)$

(G4) $\forall f, g \in \Im_I(R)$ $f \boldsymbol{+} g = g \boldsymbol{+} f$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$(f \boldsymbol{+} g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g \boldsymbol{+} f)(x)$

Quindi, la coppia $(\Im_I(R), \boldsymbol{+})$ è un gruppo abeliano.

Ora, sempre tenendo conto delle proprietà del campo R, si prova facilmente che:

(PS1) $\forall \alpha \in R$, $\forall f,g \in \Im_I(R)$ $\alpha \boldsymbol{\times} (f \boldsymbol{+} g) = (\alpha \boldsymbol{\times} f) \boldsymbol{+} (\alpha \boldsymbol{\times} g)$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$(\alpha \boldsymbol{\times} (f \boldsymbol{+} g))(x) = \alpha(f \boldsymbol{+} g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = (\alpha f(x)) + (\alpha g(x)) =$

$= (\alpha \boldsymbol{\times} f)(x) + (\alpha \boldsymbol{\times} g)(x) =((\alpha \boldsymbol{\times} f) \boldsymbol{+} (\alpha \boldsymbol{\times} g)))(x)$

(PS2) $\forall \alpha,\beta \in R$, $\forall f \in \Im_I(R)$ $(\alpha+\beta) \boldsymbol{\times} f = (\alpha \boldsymbol{\times} f) \boldsymbol{+} (\beta \boldsymbol{\times} f)$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$((\alpha+\beta) \boldsymbol{\times} f)(x) = (\alpha+\beta)(f(x)) = (\alpha f(x)) + (\beta f(x)) =$

$= (\alpha \boldsymbol{\times} f)(x) + (\beta \boldsymbol{\times} f)(x) =((\alpha \boldsymbol{\times} f) \boldsymbol{+} (\beta \boldsymbol{\times} f)))(x)$

(PS3) $\forall \alpha,\beta \in R$, $\forall f \in \Im_I(R)$ $(\alpha\beta) \boldsymbol{\times} f = \alpha \boldsymbol{\times} (\beta \boldsymbol{\times} f)$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$((\alpha\beta) \boldsymbol{\times} f)(x) = (\alpha\beta)(f(x)) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha((\beta \boldsymbol{\times} f)(x))) = (\alpha \boldsymbol{\times} (\beta \boldsymbol{\times} f))(x)$

(PS4) $\forall f \in \Im_I(R)$ $1 \boldsymbol{\times} f = f$

Infatti, per ogni $x \in I$ si ha che

$(1 \boldsymbol{\times} f)(x) = 1f(x) = f(x)$