

## 7. Dipendenza ed indipendenza lineare.

**7.1. Osservazione.** In generale,  $(\alpha * \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} \neq \alpha * (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})$ . Infatti

$$(\alpha * \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = \alpha * (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \Leftrightarrow (\alpha * \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = (\alpha * \mathbf{u}) \oplus (\alpha * \mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathbf{v} = \alpha * \mathbf{v} \Leftrightarrow 1 * \mathbf{v} = \alpha * \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ vel } \alpha = 1$$

**7.2. Esempio.** Si ha che  $2 \otimes [(1, 0, -2, 5) \oplus (2, -1, 0, 12)] = 2 \otimes (3, -1, -2, 17) = (6, -2, -4, 34)$

Mentre  $[2 \otimes (1, 0, -2, 5)] \oplus (2, -1, 0, 12) = (2, 0, -4, 10) \oplus (2, -1, 0, 12) = (4, -1, -4, 22)$

Tenendo conto dell'osservazione 7.1 diamo la seguente

**7.3. Definizione.** Stabiliamo che, in mancanza di parentesi, l'operazione  $*$  sia prioritaria rispetto all'operazione  $\oplus$  (in mancanza di parentesi si esegue prima il prodotto e poi la somma).

Ovvero, stabiliamo che  $\alpha * \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} := (\alpha * \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v}$ .

**7.4. Definizione.** Indicato brevemente con  $V_{\mathbb{R}}$  uno spazio vettoriale reale  $(V, \oplus, *)$ , chiameremo *espressione vettoriale* in  $V_{\mathbb{R}}$  una qualunque scrittura, che abbia senso, nella quale possono apparire:

- elementi di  $V$  (che si dicono vettori) e numeri reali (che si dicono scalari);
- operazioni  $\oplus$  tra vettori;
- operazioni  $*$  tra scalari e vettori;
- operazioni di somma  $+$  e prodotto  $\cdot$  tra numeri reali;
- parentesi ( [ { } ] ) e il segno  $=$  di uguaglianza.

**7.5. Osservazione.** Le proprietà (G1), (G2), ..., (G12) e (PS1), (PS2), ..., (PS12) di uno spazio vettoriale reale ci permettono di “manipolare” un'espressione vettoriale in modo “analogo” ad un'espressione coi numeri reali, tenendo però conto che rispetto all'operazione  $*$  (prodotto di uno scalare per un vettore) non abbiamo il concetto di simmetrico di un vettore.

**7.6. Definizione.** Da ora scriveremo:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  invece di  $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$
- $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  invece di  $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{v})$  e parleremo di *differenza di due vettori*;
- $\alpha \mathbf{u}$  invece di  $\alpha * \mathbf{u}$
- $\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}$  invece di  $\alpha * \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$  ricordando che  $\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v} := (\alpha \mathbf{u}) + \mathbf{v}$

**7.7. Osservazione.** Alcune delle proprietà viste possono essere riscritte così:

- $-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$
- $(-\alpha)\mathbf{u} = -(\alpha\mathbf{u})$
- $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ vel } \mathbf{u} = \mathbf{0}$  (legge di annullamento del prodotto)
- $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$  (cancellabilità rispetto alla somma di vettori)
- $\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} \text{ et } \alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$  (cancellabilità, rispetto al prodotto, di uno scalare non nullo)
- $\alpha\mathbf{u} = \beta\mathbf{u} \text{ et } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$  (cancellabilità, rispetto al prodotto, di un vettore non nullo)
- $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$  (spostabilità rispetto alla somma di vettori)
- $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ et } \alpha \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \alpha^{-1}\mathbf{v}$  (spostabilità di uno scalare non nullo rispetto al prodotto)

**ATTENZIONE:** poiché rispetto all'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore non esiste l'inverso di un vettore, non è possibile "*dividere*" per un vettore ovvero se abbiamo la seguente espressione  $\alpha\mathbf{u} = \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$  non ha senso scrivere che  $\alpha = (\beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w})/\mathbf{u}$ .

**7.8. Definizione.** Siano  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$ . Diremo *combinazione lineare* (brevemente C.L.) dei vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  a coefficienti rispettivamente  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  l'espressione vettoriale seguente

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbf{u}_i$$

Se indichiamo con  $\mathbf{v}$  il vettore di  $V_R$  risultato finale (**UNICO**) di tutte le operazioni precedenti, cioè

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \alpha_4\mathbf{u}_4 + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

diremo che *il vettore  $\mathbf{v}$  è una combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ .*

Se  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$  diremo anche che  $\mathbf{v}$  è *multiplo* di  $\mathbf{u}$  o, anche, che  $\mathbf{v}$  è *proporzionale* a  $\mathbf{u}$ .

**7.9. Esempio.** L'espressione vettoriale in  $R^4$

$$2\otimes(1, 0, -2, 5) \oplus 0\otimes(2, -1, 0, 12) \oplus (-1)\otimes(4, -3, 4, 2)$$

è una combinazione lineare delle quaterne ordinate  $(1, 0, -2, 5)$ ,  $(2, -1, 0, 12)$  e  $(4, -3, 4, 2)$ . Poiché

$$2\otimes(1, 0, -2, 5) \oplus 0\otimes(2, -1, 0, 12) \oplus (-1)\otimes(4, -3, 4, 2) = (-2, 3, -8, 8)$$

la quaterna  $(-2, 3, -8, 8)$  è combinazione lineare delle quaterne  $(1, 0, -2, 5)$ ,  $(2, -1, 0, 12)$  e  $(4, -3, 4, 2)$ .

**7.10 Osservazione.** Per la legge di annullamento del prodotto ( $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ vel } \mathbf{u}=\mathbf{0}$ ) si ha che:

- il vettore nullo è multiplo di qualunque altro vettore, infatti  $\forall \mathbf{u} \in V_R$  si ha che  $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;
- l'unico multiplo del vettore nullo è il vettore nullo stesso, infatti  $\forall \alpha \in R$  si ha che  $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

**7.11. Osservazione.** Se  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4 = \dots = \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ , cioè gli  $n$  vettori sono tutti nulli, allora **ogni** loro combinazione lineare ha come risultato **sempre** il vettore nullo.

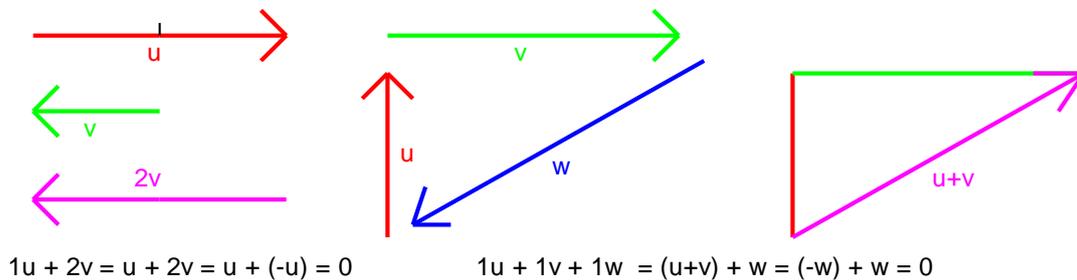
**7.12. Osservazione.** Comunque si scelgano  $n$  vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_{\mathbb{R}}$  si ha che

$$0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \dots + 0\mathbf{u}_{n-1} + 0\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Ovvero, comunque si scelgano  $n$  vettori, è sempre possibile esprimere il vettore nullo come una loro combinazione lineare in almeno un modo, infatti è sufficiente prendere i coefficienti tutti nulli.

**SI NOTI CHE** la precedente condizione sufficiente non è, in generale, necessaria. Ovvero, esistono combinazioni lineari a coefficienti non tutti nulli che hanno come risultato il vettore nullo.

**7.13. Esempio.**



**7.14. Esempio.** Date le seguenti terne ordinate di numeri reali  $(1, 0, -2)$ ,  $(2, -1, 0)$  e  $(4, -3, 4)$  è facile verificare che  $(-2) \otimes (1, 0, -2) \oplus 3 \otimes (2, -1, 0) \oplus (-1) \otimes (4, -3, 4) = (0, 0, 0)$ .

Tenendo conto dell'osservazione ~~7.11~~ possiamo dare la seguente

7.12

**7.15. Definizione.** Diremo che  $n$  vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_{\mathbb{R}}$  sono *linearmente dipendenti* (L. D.), se è possibile esprimere il vettore nullo  $\mathbf{0}$  come una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli. Altrimenti diremo che sono *linearmente indipendenti* (L. I.).

Tenendo conto dell'Osservazione 7.12 si ha subito che

**7.16. Osservazione.**  $n$  vettori sono linearmente indipendenti se e **solo se** l'unico modo per esprimere il vettore nullo come loro combinazione lineare è quello a coefficienti tutti nulli.

**7.17. Osservazione.** Per la legge di annullamento del prodotto ( $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha=0$  vel  $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ ) si ha che

- il vettore nullo è linearmente dipendente, infatti  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  si ha che  $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$

- ogni vettore non nullo è linearmente indipendente, infatti  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  et  $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$  se solo se  $\alpha = 0$ .

**7.18. Teorema.** Se i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  di  $V_R$  sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano altri  $p$  vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p$  di  $V_R$  si ha che gli  $(n + p)$  vettori sono ancora linearmente dipendenti.

**Dimostrazione.** Per ipotesi esistono  $n$  scalari  $\alpha_j$  non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

La combinazione lineare seguente:

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n + 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \dots + 0\mathbf{v}_{p-1} + 0\mathbf{v}_p$$

è una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli (almeno uno degli  $\alpha_j$  è non nullo) il cui risultato è sicuramente il vettore nullo  $\mathbf{0}$ . Quindi, gli  $(n + p)$  vettori sono linearmente dipendenti. ■

**7.19. Corollario.** Se  $A$  è un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora ogni sottoinsieme  $B$  di  $A$  è a sua volta un insieme di vettori linearmente indipendenti.

**Dimostrazione** (per assurdo). Se  $B$  fosse un insieme di vettori dipendenti, allora (per il Teorema 7.18) anche  $A$  sarebbe un insieme di vettori dipendenti, contro l'ipotesi. ■

**7.20. TEOREMA** (*caratterizzazione della lineare dipendenza*). I vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono linearmente dipendenti se e solo se (almeno) uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$ ) Se  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L. Dip., allora esiste una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli che è uguale al vettore nullo, cioè  $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ . Senza perdere di generalità, possiamo supporre che sia  $\alpha_1 \neq 0$ . Si ha  $\mathbf{u}_1 = \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$  con  $\beta_i = (-\alpha_i / \alpha_1) \forall i \in [2, n]$ . Quindi,  $\mathbf{u}_1$  è combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ .

$\Leftarrow$ ) Se uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti allora supponiamo che questo sia  $\mathbf{u}_1$ .

Da  $\mathbf{u}_1 = \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$  si ha che  $(-1)\mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ .

Poichè, esiste una C.L. a coefficienti non tutti nulli ( $-1 \neq 0$ ) degli  $n$  vettori che ha come risultato il vettore nullo si ha che essi sono L. Dip. ■

**7.21. Corollario.** Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno dei due si può scrivere come multiplo dell'altro (ovvero almeno uno dei due è proporzionale all'altro).

## 8. Dipendenza ed indipendenza lineare: il caso dei vettori liberi.

Dall'osservazione 7.17 si ha che:

- il vettore libero nullo è linearmente dipendente;
- ogni vettore libero diverso dal vettore libero nullo è linearmente indipendente.

**8.1. Definizione.** Diremo che due *vettori liberi*  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono *paralleli*, e scriveremo  $\vec{u} // \vec{v}$ , se sono paralleli tra loro un rappresentante di  $\vec{u}$  e un rappresentante di  $\vec{v}$ .

**8.2. Lemma.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono due vettori liberi non nulli e paralleli tra loro, allora **ognuno** dei due si può scrivere come multiplo dell'altro.

**Dimostrazione.** Se  $\vec{u} \neq 0$  et  $\vec{v} \neq 0$  allora  $\|\vec{u}\| \neq 0$  et  $\|\vec{v}\| \neq 0$ . Sia  $\alpha := \|\vec{u}\|/\|\vec{v}\| \neq 0$ . Tenendo conto di come è stata definita l'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore libero si ha che:

$$\begin{aligned} \vec{u} = \alpha * \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v} = (\alpha^{-1}) * \vec{u} & \quad \text{se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ hanno lo stesso verso;} \\ \vec{u} = (-\alpha) * \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v} = (-\alpha^{-1}) * \vec{u} & \quad \text{se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ hanno verso opposto. } \blacksquare \end{aligned}$$

**8.3. Lemma.** Due vettori liberi sono paralleli se e solo se almeno uno dei due si può scrivere come multiplo dell'altro.

**Dimostrazione.** ( $\Leftarrow$ ) Ovvvia, tenendo conto di come è stata definita l'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore libero.

( $\Rightarrow$ ) Se almeno uno dei due vettori è il vettore nullo allora la tesi è vera per l'osservazione 7.10. Se i due vettori sono non nulli la tesi è conseguenza del lemma 8.2.  $\blacksquare$

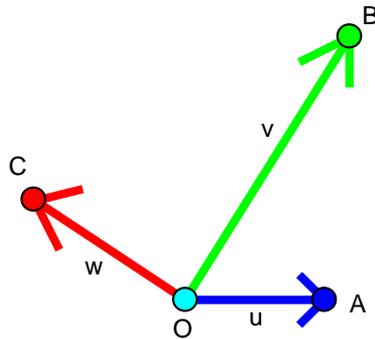
Dal Lemma 8.3 e dal Corollario 7.21 segue subito il seguente:

**8.4. Teorema.** Due vettori liberi sono linearmente **dipendenti** se e solo se sono **paralleli**.

**8.5. Definizione.** Diremo che tre *vettori liberi* sono *complanari* se sono complanari tre loro rappresentanti applicati in uno stesso punto.

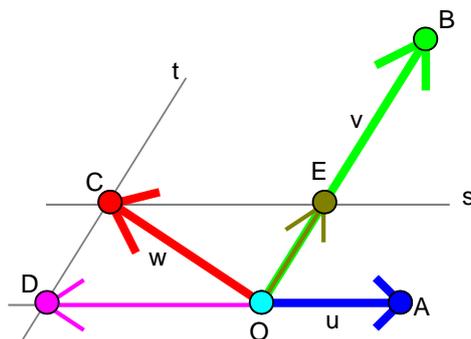
**8.6. Lemma.** Comunque scelti tre vettori liberi complanari a due a due non paralleli, ognuno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti (e quindi i tre vettori sono L.Dip.).

**Dimostrazione.** (Indichiamo con  $r_{AB}$  la retta passante per due punti distinti A e B). Si scelga, a piacere, un punto O dello spazio. Siano  $(OA)$ ,  $(OB)$  e  $(OC)$  gli unici rappresentanti applicati in O dei vettori liberi di  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  rispettivamente. Poichè, per ipotesi, i tre vettori liberi sono complanari esiste un unico piano  $\pi$  contenente i quattro punti O, A, B e C. Inoltre, siccome i tre vettori sono a due a due non paralleli, si ha che mai sono allineati tre dei quattro punti O, A, B e C.



Sia  $t$  la retta di  $\pi$  per C parallela a  $(OB)$  e sia  $D = t \cap r_{OA}$ . Ovviamente,  $D \neq O$  (se fosse  $D = O$  si avrebbe  $t = r_{OB}$  e, quindi,  $C \in r_{OB}$  contro l'ipotesi "mai tre allineati").  $D \in r_{OA}$  implica  $(OD) \parallel (OA)$  e, quindi,  $[(OD)] \approx [(OA)]$ . Essendo entrambi non nulli esiste  $\alpha \neq 0$  tale che  $[(OD)] \approx \alpha [(OA)]$ .

Sia  $s$  la retta di  $\pi$  per C parallela a  $r_{OA}$  e sia  $E = s \cap r_{OB}$ . Ovviamente,  $E \neq O$  (se fosse  $E = O$  si avrebbe  $s = r_{OA}$  e, quindi,  $C \in r_{OA}$  contro l'ipotesi "mai tre allineati").  $E \in r_{OB}$  implica  $(OE) \parallel (OB)$  e, quindi,  $[(OE)] \approx [(OB)]$ . Essendo entrambi non nulli esiste  $\beta \neq 0$  tale che  $[(OE)] \approx \beta [(OB)]$ .



La figura ODCE è un parallelogrammo. Quindi,  $(OE) \approx (DC)$  da cui  $[(OE)] \approx [(DC)]$ . Si ha

$$(\alpha * \vec{u}) [+ ] (\beta * \vec{v}) = (\alpha * [(OA)] \approx) [+ ] (\beta * [(OB)] \approx) = [(OD)] \approx [+ ] [(OE)] \approx = [(OD)] \approx [+ ] [(DC)] \approx = [(OC)] \approx = \vec{w}$$

Poiché  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$  è anche  $\vec{u} = ((\alpha^{-1}) * \vec{w}) [+ ] ((-\beta \alpha^{-1}) * \vec{v})$  et  $\vec{v} = ((\beta^{-1}) * \vec{w}) [+ ] ((-\alpha \beta^{-1}) * \vec{u})$ . ■

**8.7. Teorema. Tre vettori liberi sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.**

**Dimostrazione.** (Indichiamo con  $r_{AB}$  la retta passante per due punti distinti A e B).

Se due dei tre vettori sono L.D., allora quei due vettori sono paralleli e, quindi, i tre vettori sono complanari. Viceversa, se due dei tre vettori sono paralleli, allora quei due vettori sono L.D. e, quindi, i tre vettori sono L.D..

Supponiamo, ora, che mai due di essi siano L.D., ovvero che mai due di essi siano paralleli.

$\Leftarrow$ ) è la dimostrazione del Lemma 8.6.

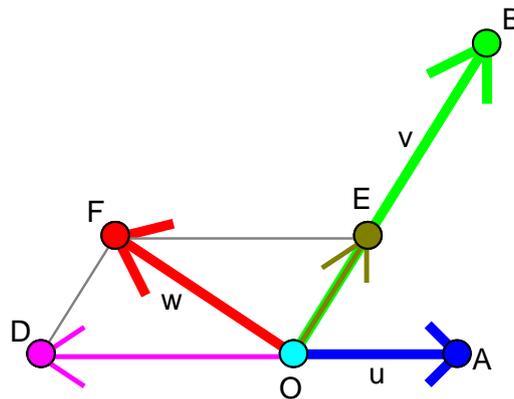
$\Rightarrow$ ) Si scelga, a piacere, un punto O dello spazio. Siano (OA), (OB) e (OC) gli unici rappresentanti applicati in O dei vettori liberi di  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  rispettivamente. Poiché, per ipotesi, i tre vettori sono L.D., almeno uno di essi si può scrivere come C.L. degli altri due. Se supponiamo che sia

$\vec{w} = (\alpha^* \vec{u}) [+](\beta^* \vec{v})$  allora chiamiamo  $\pi$  il piano individuato dai tre punti non allineati O, A e B.

Per avere la tesi dobbiamo provare che  $C \in \pi$ .

Nello spazio esiste ed è unico un punto D tale che il segmento (OD) sia il rappresentante di  $\alpha^* \vec{u}$  applicato in O. Quindi,  $\alpha^* \vec{u} = [(OD)]_{\approx}$ . Poiché  $(\alpha^* \vec{u}) // \vec{u}$  si ha che  $D \in r_{OA}$  e, quindi,  $D \in \pi$ .

Nello spazio esiste ed è unico un punto E tale che il segmento (OE) sia il rappresentante di  $\beta^* \vec{v}$  applicato in O. Quindi,  $\beta^* \vec{v} = [(OE)]_{\approx}$ . Poiché  $(\beta^* \vec{v}) // \vec{v}$  si ha che  $E \in r_{OB}$  e, quindi,  $E \in \pi$ .



Sia  $F \in \pi$  tale che ODFE è un parallelogrammo. Ovviamente,  $(OE)_{\approx} \approx (DF)_{\approx}$  per cui  $[(OE)]_{\approx} = [(DF)]_{\approx}$ .

Da  $[(OC)]_{\approx} = \vec{w} = (\alpha^* \vec{u}) [+](\beta^* \vec{v}) = [(OD)]_{\approx} [+][(OE)]_{\approx} = [(OD)]_{\approx} [+][(DF)]_{\approx} = [(OF)]_{\approx}$  si ha che  $[(OC)]_{\approx} = [(OF)]_{\approx}$  da cui  $C = F$ . Quindi,  $C \in \pi$ . ■

**8.8. Lemma.** Comunque scelti quattro vettori liberi a tre a tre non complanari, ognuno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti.

**Dimostrazione.** Si scelga, a piacere, un punto O dello spazio. Siano (OA), (OB), (OC) e (OD) gli unici rappresentanti applicati in O dei vettori liberi di  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{z}$  rispettivamente. Sia  $\pi_1$  il piano individuato dai tre punti non allineati O, A e B. Sia  $\pi_2$  il piano individuato dai tre punti non allineati O, C e D. I piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  hanno in comune il punto O ma sono distinti (se fossero lo stesso piano si avrebbe che i cinque punti O, A, B, C e D sarebbero complanari e, quindi, anche i quattro vettori liberi sarebbero complanari). Sia s la retta per O tale che  $s = \pi_1 \cap \pi_2$ . Sulla retta s si scelga, a piacere, un punto E diverso da O. Sia  $\vec{t}$  il vettore libero individuato da (OE), cioè  $\vec{t} = [(OE)]_{\approx}$ .

I tre vettori  $\vec{w}$ ,  $\vec{z}$  e  $\vec{t}$  sono complanari e a due a due non paralleli. Quindi, esistono due scalari  $\alpha$  e  $\beta$  non nulli tali che  $\vec{z} = (\alpha * \vec{t}) [+](\beta * \vec{w})$ . I tre vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{t}$  sono complanari e a due a due non

paralleli. Quindi, esistono due scalari  $\gamma$  e  $\delta$  non nulli tali che  $\vec{t} = (\gamma * \vec{u}) [+](\delta * \vec{v})$ . Si ha

$$\vec{z} = (\alpha * \vec{t}) [+](\beta * \vec{w}) = \alpha * ((\gamma * \vec{u}) [+](\delta * \vec{v})) [+](\beta * \vec{w}) = ((\alpha\gamma) * \vec{u}) [+](\alpha\delta * \vec{v}) [+](\beta * \vec{w}).$$

Poiché nell'ultima espressione i coefficienti sono tutti non nulli si può esprimere ognuno dei quattro vettori come combinazione lineare dei rimanenti. ■

**8.9. Teorema. Quattro, o più, vettori liberi sono sempre linearmente dipendenti.**

**Dimostrazione.** Se tre dei quattro vettori sono L.D., allora i quattro vettori sono L.D.. Se i quattro vettori sono a tre a tre linearmente indipendenti, allora i quattro vettori sono a tre a tre non complanari. Per il lemma precedente ognuno di essi si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti. Quindi, i quattro vettori sono linearmente dipendenti. Dati  $n \geq 5$  vettori liberi, allora comunque se ne prendano quattro essi sono L.D.. Quindi, anche gli n vettori sono L.D.. ■

**8.10. Osservazione.** Il teorema precedente è conseguenza, oltre che del fatto che  $(V, [+], *)$  è uno spazio vettoriale reale, anche delle “peculiarità” geometriche dei vettori liberi. Per cui una proprietà analoga non vale per ogni spazio vettoriale reale.

**8.11. Esempio.** Le quaterne  $(1,0,0,0)$ ,  $(0,1,0,0)$ ,  $(0,0,1,0)$  e  $(0,0,0,1)$  sono linearmente indipendenti. Infatti, si ha che  $\alpha * (1,0,0,0) [+]\beta * (0,1,0,0) [+]\gamma * (0,0,1,0) [+]\delta * (0,0,0,1) = (0,0,0,0)$  se e solo se  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0,0,0,0)$  ovvero se e solo se  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ .

## 9. Sottospazi.

**9.1. Osservazione.** Sia  $\perp$  un'operazione binaria ovunque definita ed interna ad un insieme  $G$ . Se  $H$  è un sottoinsieme di  $G$ , allora  $\perp$  è anche un'operazione binaria ovunque definita in  $H$  a valori in  $G$ .

**9.2. Definizione.** Sia  $\perp$  un'operazione binaria ovunque definita ed interna ad un insieme  $G$  e sia  $H$  un sottoinsieme di  $G$ . Se  $\perp$  è un'operazione binaria ovunque definita ed interna ad  $H$  (cioè per ogni  $x$  e  $y$  elementi di  $H$  si ha che il risultato dell'operazione  $x \perp y$  è ancora un elemento di  $H$ ) allora diremo che il sottoinsieme  $H$  è *chiuso* rispetto all'operazione  $\perp$ .

**9.3. Esempio.** Sia  $N$  l'insieme dei numeri naturali e siano  $+$  e  $\cdot$  rispettivamente le operazioni di somma e di prodotto di due numeri naturali (entrambe binarie interne e ovunque definite in  $N$ ). Siano  $P$  e  $D$  rispettivamente il sottoinsieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari. Si ha che  $P$  è chiuso rispetto a  $+$  mentre  $D$  non lo è. Infatti, la somma di due numeri pari è ancora un numero pari, mentre la somma di due numeri dispari non è un numero dispari. Invece, sia  $P$  che  $D$  sono chiusi rispetto all'operazione  $\cdot$  di prodotto di due numeri naturali.

**9.4. Esempio.** Sia  $R$  l'insieme dei numeri naturali e siano  $+$  e  $\cdot$  rispettivamente le operazioni di somma e di prodotto di due numeri naturali (entrambe binarie interne e ovunque definite in  $R$ ). Sia  $I = [0, 1] = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$ . Comunque presi  $x_1$  e  $x_2$  in  $I$  si ha che  $0 \leq x_1 \cdot x_2 \leq 1$  e, quindi, l'insieme  $I$  è chiuso rispetto al prodotto di due numeri reali. Invece, l'insieme  $I$  non è chiuso rispetto alla somma di due numeri reali. Infatti, se  $x_1 = 0,6$  e  $x_2 = 0,7$  allora  $x_1 + x_2 = 1,3 \notin I$ .

**9.5. Osservazione.** Sia  $*$  un'operazione binaria ovunque definita nell'insieme  $R \times V$  a valori in  $V$ . Se  $U$  è un sottoinsieme di  $V$  allora  $*$  è anche un'operazione binaria ovunque definita nell'insieme  $R \times U$  a valori in  $V$ .

**9.6. Definizione.** Sia  $*$  un'operazione binaria ovunque definita nell'insieme  $R \times V$  a valori in  $V$  e sia  $U$  un sottoinsieme di  $V$ . Se  $*$  è un'operazione binaria ovunque definita nell'insieme  $R \times U$  a valori in  $U$  (cioè comunque preso un elemento  $\alpha$  di  $R$  e un elemento  $u$  di  $U$  si ha che il risultato dell'operazione  $\alpha * u$  ancora un elemento di  $U$ ) allora diremo che il sottoinsieme  $U$  è *chiuso* rispetto all'operazione  $*$ .

**9.7. Definizione.** Sia  $(V, +, *)$  uno spazio vettoriale reale e sia  $U$  un sottoinsieme di  $V$ . Diremo che  $U$  è *sottospazio* di  $V$ , e scriveremo  $U \leq V$ , se la terna  $(U, +, *)$  è uno spazio vettoriale reale.

**9.8. Osservazione.** In base alla definizione precedente, per controllare se un sottoinsieme  $U$  è un sottospazio di  $V$  bisogna verificare che siano soddisfatte tutte le condizioni richieste nella definizione di spazio vettoriale. Ma è proprio necessario verificarle proprio tutte? La risposta è data dal seguente

**9.9. Teorema.** (*caratterizzazione di un sottospazio*). Sia  $U$  un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale  $V_{\mathbb{R}}$ .  $U$  è un sottospazio di  $V$  se e solo se valgono le tre condizioni:

- (1)  $U$  è non vuoto;
- (2)  $U$  è chiuso rispetto alla somma  $+$  tra due vettori (cioè  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ );
- (3)  $U$  è chiuso rispetto al prodotto  $*$  di uno scalare per un vettore (cioè  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in U \quad \alpha \mathbf{u} \in U$ ).

**Dimostrazione.** E' ovvio che le tre condizioni siano necessarie. Proviamo che sono sufficienti.

Supponiamo, quindi, che  $U$  sia un sottoinsieme di  $V$  per il quale valgono le proprietà (1), (2) e (3). Per la somma  $+$  di due vettori di  $U$  valgono ovviamente le proprietà associativa (G1) e commutativa (G4). Per la (1) esiste almeno un vettore  $\mathbf{u} \in U$ . Se prendiamo il numero reale zero, per la (3), abbiamo che  $0\mathbf{u} \in U$ . Ma  $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Quindi,  $\mathbf{0} \in U$ . Per cui vale la proprietà dell'esistenza dell'elemento neutro (G2). Inoltre, per ogni  $\mathbf{u} \in U$  preso il numero reale  $(-1)$ , per la (3), abbiamo che  $(-1)\mathbf{u} \in U$ . Ma  $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ . Quindi,  $-\mathbf{u} \in U$ . Per cui vale anche la (G3). Quindi,  $(U, +)$  è un gruppo abeliano.

Per il prodotto di uno scalare per un vettore di  $U$  valgono ovviamente le proprietà (PS1), (PS2), (PS3) e (PS4). Abbiamo così che  $(U, +, *)$  è uno spazio vettoriale reale. ■

**9.10. Esempio.** Consideriamo lo spazio vettoriale  $(\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$  delle funzioni reali di variabile reale definite in tutto  $\mathbb{R}$ . Se con  $\mathbb{R}[x]$  indichiamo l'insieme dei polinomi in  $x$  a coefficienti reali, allora è  $\emptyset \neq \mathbb{R}[x] \subseteq \mathfrak{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ . Poiché la somma  $\oplus$  di due polinomi è ancora un polinomio e il prodotto  $\otimes$  di un numero reale per un polinomio è ancora un polinomio, si ha che  $\mathbb{R}[x]$  è chiuso rispetto alla somma  $\oplus$  e rispetto al prodotto  $\otimes$ . Quindi,  $\mathbb{R}[x] \leq \mathfrak{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ .

**9.11. Esempio.** Sia  $A$  l'insieme dei polinomi in  $x$  a coefficienti reali di grado esattamente uguale a  $n \geq 1$ . Si vede subito che  $A$  non è chiuso rispetto all'operazione di somma di due polinomi. Infatti, presi i polinomi  $p(x) = (2x^n + 1) \in A$  e  $q(x) = (-2x^n + 2) \in A$  si ha che  $p(x) + q(x) = 3 \notin A$ .

**9.12. Esempio.** Con  $R_n[x]$  indichiamo l'insieme dei polinomi in  $x$  a coefficienti reali di grado  $\leq n$ . Si ha che  $\emptyset \neq R_n[x] \subseteq R[x]$ . Poiché sia la somma di due polinomi di grado  $\leq n$  che il prodotto di uno scalare per un polinomio di grado  $\leq n$  sono ancora polinomi di grado  $\leq n$  si ha che  $R_n[x] \leq R[x]$ .

**9.13. Esempio.** Consideriamo lo spazio vettoriale  $(R^3, \oplus, \otimes)$  delle terne ordinate di numeri reali. L'insieme non vuoto  $B = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = 0\} = \{(x, y, 0) \in R^3\}$  è chiuso sia rispetto a  $\oplus$  che a  $\otimes$ . Infatti, si ha che  $(a, b, 0) \oplus (c, d, 0) = (a+c, b+d, 0)$  e che  $\alpha \otimes (a, b, 0) = (\alpha a, \alpha b, 0)$ . Quindi,  $B \leq R^3$ .

**9.14. Esempio.** Consideriamo lo spazio vettoriale  $(R^3, \oplus, \otimes)$  delle terne ordinate di numeri reali. L'insieme non vuoto  $C = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = 1\} = \{(x, y, 1) \in R^3\}$  non è chiuso rispetto a  $\oplus$ . Infatti, prese due terne  $(a, b, 1)$  e  $(c, d, 1)$  si ha che  $(a, b, 1) \oplus (c, d, 1) = (a+c, b+d, 2) \notin C$ .

**9.15. Esempio.** Consideriamo lo spazio vettoriale  $(R^4, \oplus, \otimes)$  delle quaterne ordinate di numeri reali. L'insieme non vuoto  $D = \{(w, x, y, z) \in R^4 \mid w = 3x, z = x+y\} = \{(3x, x, y, x+y) \in R^4\}$  è chiuso sia rispetto a  $\otimes$  che a  $\oplus$ . Infatti, si ha che  $(3a, a, b, a+b) \oplus (3c, c, d, c+d) = (3a+3c, a+c, b+d, a+b+c+d) = (3(a+c), a+c, b+d, (a+c)+(b+d))$  e che  $\alpha \otimes (3a, a, b, a+b) = (\alpha 3a, \alpha a, \alpha b, \alpha(a+b)) = (3(\alpha a), \alpha a, \alpha b, (\alpha a)+(\alpha b))$ . Quindi,  $D \leq R^4$ .

**9.16. Osservazioni.** E' facile verificare che:

**9.16.1.**  $\{\mathbf{0}\} \leq V$  ( $\{\mathbf{0}\}$  viene detto *spazio nullo*)

**9.16.2.**  $V \leq V$

**9.16.3.**  $U \leq T$  et  $T \leq V \Rightarrow U \leq V$

**9.16.4.**  $U \leq V$  et  $T \leq V$  et  $U \subseteq T \Rightarrow U \leq T$

**9.17. Definizione.** Dati  $n \geq 1$  vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  di  $V_R$  col simbolo

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$$

indicheremo l'insieme contenente tutti e soli i vettori di  $V_R$  che si possono esprimere come una combinazione lineare degli  $n$  vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  ovvero l'insieme

$$\{\mathbf{v} \in V_R \mid \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n : \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n\}$$

**9.18. Osservazione.** Se  $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$  allora  $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L.Dip.

**9.19. Teorema.** Comunque presi  $n \geq 1$  vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  di  $V_R$ , l'insieme

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$$

è un sottospazio di  $V_R$ .

**Dimostrazione.**

(1) Ovviamente,  $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \neq \emptyset$ .

(2) Proviamo che  $U$  è chiuso rispetto a  $+$ , cioè che  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$  si ha che  $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in U$ .

$$\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{w} \in U \Rightarrow \mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n) + (\beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \beta_1 \mathbf{u}_1) + (\alpha_2 \mathbf{u}_2 + \beta_2 \mathbf{u}_2) + (\alpha_3 \mathbf{u}_3 + \beta_3 \mathbf{u}_3) + \dots + (\alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}) + (\alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_n \mathbf{u}_n)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{u}_2 + \gamma_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \gamma_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \gamma_n \mathbf{u}_n \Rightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in U.$$

(3) Proviamo che  $U$  è chiuso rispetto a  $*$ , cioè che  $\forall \mathbf{v} \in U$  e  $\forall \delta \in \mathbb{R}$  si ha che  $(\delta \mathbf{v}) \in U$ .

$$\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

$$\delta \mathbf{v} = \delta(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n) = (\delta \alpha_1) \mathbf{u}_1 + (\delta \alpha_2) \mathbf{u}_2 + (\delta \alpha_3) \mathbf{u}_3 + \dots + (\delta \alpha_{n-1}) \mathbf{u}_{n-1} + (\delta \alpha_n) \mathbf{u}_n$$

$$\delta \mathbf{v} = \omega_1 \mathbf{u}_1 + \omega_2 \mathbf{u}_2 + \omega_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \omega_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \omega_n \mathbf{u}_n \Rightarrow (\delta \mathbf{v}) \in U. \blacksquare$$

**9.20. Definizione.** Dati  $n \geq 1$  vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  di  $V_R$ , il sottospazio

$$U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$$

si dice (*sotto*) *spazio generato* dai vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  (che sono detti *generatori* di  $U$ ).

**9.21. Definizione.** Diremo che uno spazio vettoriale reale  $V_R$  è *finitamente generato* se esiste un insieme finito  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$  di vettori di  $V_R$  tali che  $V_R = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ .

In tal caso diremo anche che l'insieme  $B$  *genera* lo spazio  $V_R$  e scriveremo  $V_R = \langle B \rangle$ .

**9.22. Teorema.** Se  $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \leq V_R$  e  $T = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \leq V_R$ , allora

(1)  $U \subseteq T$  e, quindi,  $U \leq T$  (per l'Osservazione 9.16.4)

(2)  $U = T \Leftrightarrow \mathbf{v} \in U$

**Dimostrazione.**

(1) Preso  $\mathbf{w} \in U$  si ha che  $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$ .

Ovviamente, è anche  $\mathbf{w} = 0\mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$ . Quindi,  $\mathbf{w} \in T$ .

(2 $\Rightarrow$ )  $\mathbf{v} \in T$  et  $T = U \Rightarrow \mathbf{v} \in U$ .

(2 $\Leftarrow$ ) Per ipotesi  $\mathbf{v} \in U$ , cioè  $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$ .

Poiché per la (1) è già  $U \subseteq T$ , resta da provare che  $T \subseteq U$ .

Sia  $\mathbf{w} \in T$ . Quindi,  $\mathbf{w} = \omega \mathbf{v} + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$ .

$\mathbf{w} = \omega(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n) + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n$ .

$\mathbf{w} = (\omega\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{u}_1 + (\omega\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{u}_2 + (\omega\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{u}_3 + \dots + (\omega\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + (\omega\alpha_n + \beta_n)\mathbf{u}_n$

$\mathbf{w} = \delta_1 \mathbf{u}_1 + \delta_2 \mathbf{u}_2 + \delta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \delta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \delta_n \mathbf{u}_n$ . Quindi,  $\mathbf{w} \in U$ . ■

**9.23. Corollario.** Sia  $V_R$  uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se  $B$  è un suo insieme minimale di generatori, allora i vettori di  $B$  sono linearmente indipendenti.

**Dimostrazione.** Sia  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$  un insieme minimale di generatori. Se i vettori di  $B$  fossero linearmente dipendenti allora almeno uno di essi si potrebbe scrivere come combinazione lineare dei rimanenti. Supponendo che sia  $\mathbf{u}_1 = \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$  si avrebbe che  $\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ . Per il Teorema 9.22 si avrebbe che

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V_R$$

Quindi, anche il sottoinsieme  $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$  di  $B$  sarebbe un insieme di generatori di  $V_R$  contro l'ipotesi che  $B$  fosse minimale. ■

**9.24. Teorema.** Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_R$  e  $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ . Si ha che

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L. Indip. et  $\mathbf{v} \notin U \Leftrightarrow \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L. Indip.

**Dimostrazione.**

( $\Leftarrow$ ) Ovvio tenendo conto del corollario 7.19 e dell'osservazione 9.18.

( $\Rightarrow$ ) Dobbiamo provare che l'unica combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  che ha come risultato il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli. Cioè, dobbiamo provare che se si ha

$$\omega \mathbf{v} + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad (\#)$$

allora necessariamente sono nulli sia il coefficiente  $\omega$  che tutti i coefficienti  $\beta_i$ .

Se fosse  $\omega \neq 0$ , allora  $\mathbf{v} = (-\omega^{-1}\beta_1)\mathbf{u}_1 + (-\omega^{-1}\beta_2)\mathbf{u}_2 + (-\omega^{-1}\beta_3)\mathbf{u}_3 + \dots + (-\omega^{-1}\beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + (-\omega^{-1}\beta_n)\mathbf{u}_n$  e, quindi,  $\mathbf{v} \in U$  contro l'ipotesi  $\mathbf{v} \notin U$ . Per cui è  $\omega = 0$ . Sostituendo  $\omega = 0$  in (#) si ottiene

$$\beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \beta_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Essendo, per ipotesi,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  L. Indip. si ha che tutti i coefficienti  $\beta_i$  sono nulli. ■

**9.25. Corollario.** Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in V_{\mathbb{R}}$  e  $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ .

Se  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L. Indip. mentre  $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L. Dip. allora  $\mathbf{v} \in U$ .

**9.26. Corollario.** Sia  $V_{\mathbb{R}}$  uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se  $B$  è un suo insieme massimale di vettori linearmente indipendenti, allora i vettori di  $B$  sono generatori dello spazio.

**Dimostrazione.** Sia  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$  un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti. Essendo  $B$  massimale, per ogni vettore  $\mathbf{v}$  di  $V_{\mathbb{R}}$  si ha che  $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono linearmente dipendenti. Per il Corollario 9.25 è  $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle B \rangle$ . Quindi, i vettori di  $B$  sono generatori dello spazio. ■

**9.27. Definizione.** Sia  $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ .

Diremo *operazioni elementari sui generatori* di  $U$  le seguenti azioni:

(O.E.1) scambiare due generatori  $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{u}_k$  tra loro;

(O.E.2) sostituire un generatore  $\mathbf{u}_j$  con il vettore  $\gamma \mathbf{u}_j \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;

(O.E.3) sostituire un generatore  $\mathbf{u}_j$  con il vettore  $\mathbf{u}_j + \beta \mathbf{u}_k \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$  et  $k \neq j$ .

Si può provare il seguente

**9.28. Teorema** Se i vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n$  sono stati ottenuti effettuando un numero finito di operazioni elementari sui generatori dello spazio  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ , allora si ha che

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle.$$

## 10. Basi e dimensione di uno spazio vettoriale.

Si può provare il seguente

**10.1. Lemma.** Sia  $V_R$  uno spazio vettoriale reale finitamente generato.

Se  $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$  è un insieme di generatori di  $V_R$  e  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p\}$  è un insieme di vettori di  $V_R$  linearmente indipendenti, allora  $p \leq n$ .

Ovvero, **la cardinalità di un qualunque insieme di generatori è sempre maggiore o uguale della cardinalità di un qualunque insieme di vettori linearmente indipendenti.**

**10.2. Definizione.** Diremo *base di uno spazio vettoriale reale finitamente generato* un insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti, che vengono anche detti *elementi della base*.

**10.3. Esempio.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  si considerino le seguenti n-uple:  $\mathbf{u}_1 = (1,0,0,0, \dots, 0,0,0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,0, \dots, 0,0,0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0,0,1,0, \dots, 0,0,0)$ , ...,  $\mathbf{u}_{n-1} = (0,0,0,0, \dots, 0,1,0)$ ,  $\mathbf{u}_n = (0,0,0,0, \dots, 0,0,1)$ .

E' facile convincersi che per ogni n-upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  si ha che

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

Da quest'ultima relazione si vede subito che:

(1) ogni n-upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  si può scrivere come combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ ; quindi, i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono dei generatori per  $\mathbb{R}^n$ ;

(2)  $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n \mathbf{u}_n = (0,0,0,0, \dots, 0,0,0)$  se e solo se

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = (0,0,0,0, \dots, 0,0,0)$ .

Quindi, i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono linearmente indipendenti.

Da (1) e (2) si ha che  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  è una base (detta *base canonica*) di  $\mathbb{R}^n$ .

Tenendo conto dei Corollari 9.23 e 9.26 abbiamo la seguente

**10.4. Osservazione.** Sia  $V_R$  uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se  $B$  un insieme ordinato di vettori di  $V_R$  allora

**10.4.1.**  $B$  è una base di  $V_R \Leftrightarrow B$  è un insieme minimale di generatori di  $V_R$

**10.4.2.**  $B$  è una base di  $V_R \Leftrightarrow B$  è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

**10.5. Esempio.** Ogni terna ordinata di vettori liberi non complanari è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti e, quindi, una base dello spazio vettoriale dei vettori liberi.

**10.6. Teorema.** Ogni spazio vettoriale reale  $V_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$  finitamente generato ha almeno una base.

**1<sup>a</sup> Dimostrazione** (algoritmo di decrescita). Sia  $V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ .

Passo 1) Se  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L.I. allora  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  è una base di  $V$ . [STOP]

Altrimenti uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Se supponiamo che sia  $\mathbf{u}_1$ , allora si ha

$$\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \text{ per cui } \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V.$$

Passo 2) Se  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L.I. allora  $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  è una base di  $V$ . [STOP]

Altrimenti uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Se supponiamo che sia  $\mathbf{u}_2$ , allora si ha

$$\mathbf{u}_2 \in \langle \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \text{ per cui } \langle \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V.$$

.....

Passo j) Se  $\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$  sono L.I. allora  $(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  è una base di  $V$ . [STOP]

Altrimenti uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. Se supponiamo che sia  $\mathbf{u}_j$ , allora si ha

$$\mathbf{u}_j \in \langle \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle \text{ per cui } \langle \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle = V.$$

Se l'algoritmo non si fermasse prima (fornendo una base), dopo  $(n-1)$  passi si avrebbe  $\langle \mathbf{u}_n \rangle = V$ .

Essendo  $V \neq \{0\}$ , deve essere  $\mathbf{u}_n \neq \mathbf{0}$ . Per cui  $\mathbf{u}_n$  è L.Indip. e, quindi,  $(\mathbf{u}_n)$  è una base di  $V$ . ■

**2<sup>a</sup> Dimostrazione** (algoritmo di crescita). Sia  $V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \rangle$ .

$$V \neq \{0\} \Rightarrow \exists \mathbf{v}_1 \in V : \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 \text{ è L.I.}$$

Passo 1) Se  $\langle \mathbf{v}_1 \rangle = V$  allora  $(\mathbf{v}_1)$  è una base di  $V$ . [STOP]

Se  $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \neq V$  allora  $\exists \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1 \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  sono L.I.

Passo 2) Se  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = V$  allora  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  è una base di  $V$ . [STOP]

Se  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \neq V$  allora  $\exists \mathbf{v}_3 \in V : \mathbf{v}_3 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  sono L.I.

.....

Passo j) Se  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j \rangle = V$  allora  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j)$  è una base di  $V$ . [STOP]

Se  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j \rangle \neq V$  allora  $\exists \mathbf{v}_{j+1} \in V : \mathbf{v}_{j+1} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j \rangle \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_j$  sono L.I.

Se l'algoritmo non si fermasse prima (fornendo una base), dopo  $n$  passi si avrebbe necessariamente che  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = V$ . Infatti, se esistesse  $\mathbf{v}_{n+1} \in V$  tale che  $\mathbf{v}_{n+1} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$  allora si avrebbe che  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$  sono linearmente indipendenti. Per cui in  $V$  esisterebbe un insieme di vettori linearmente indipendenti  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}\}$  la cui cardinalità  $(n+1)$  è strettamente maggiore della cardinalità  $n$  di un insieme  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$  di generatori. E ciò sarebbe assurdo per il Lemma 10.1. ■

Tenendo conto dell'Osservazione 10.4.2. diamo la seguente

**10.7. Definizione.** Stabiliamo che lo spazio nullo  $\{\mathbf{0}\}$  abbia come base l'insieme vuoto  $\emptyset$ .

**10.8. Teorema.** (*di equicardinalità delle basi*). Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  e  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p)$  sono due basi di  $V$ , allora  $n = p$ .  
Ovvero, tutte le basi di un fissato spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

**Dimostrazione.**

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p)$  L.I. e  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  generatori  $\Rightarrow p \leq n$

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  L.I. e  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_p)$  generatori  $\Rightarrow n \leq p$

$p \leq n$  et  $n \leq p \Rightarrow n = p$ . ■

Tenendo conto del teorema precedente è ben posta la seguente

**10.9. Definizione.** Diremo *dimensione* di uno spazio vettoriale reale  $V_R \neq \{\mathbf{0}\}$  finitamente generato, e la indicheremo con  $\dim(V_R)$ , il numero di elementi di una (qualsiasi) sua base. In accordo con la Definizione 10.7 stabiliamo che la dimensione dello spazio nullo  $\{\mathbf{0}\}$  sia uguale a zero.

**10.10. Esempio.** Lo spazio delle  $n$ -uple ordinate di numeri reali ha dimensione  $n$ .

**10.11. Esempio.** Lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3.

Tenendo conto dell'osservazione 10.4 si ha subito la seguente:

**10.12. Osservazione.** Se  $V_R$  è uno spazio vettoriale reale finitamente generato, allora si ha che

**10.12.1**  $\dim(V_R) =$  numero massimo di vettori linearmente indipendenti in  $V_R$

**10.12.2**  $\dim(V_R) =$  numero minimo di generatori di  $V_R$

**10.13. Osservazione.** Siano  $V_R$  e  $U_R$  due spazi vettoriali reali finitamente generati.

Se  $V_R = U_R$  allora, ovviamente,  $\dim(V_R) = \dim(U_R)$ . La precedente condizione necessaria non è, in generale, anche sufficiente. Ad esempio, lo spazio vettoriale  $V$  dei vettori liberi e lo spazio  $\mathbb{R}^3$  delle terne ordinate di numeri reali hanno la stessa dimensione 3 ma non sono lo stesso spazio.

**10.14. Osservazione.** Siano  $V_R$  e  $U_R$  due spazi vettoriali reali finitamente generati. Si prova che

**10.14.1.**  $V_R \leq U_R \Rightarrow \dim(V_R) \leq \dim(U_R)$

**10.14.2.**  $V_R \leq U_R$  et  $\dim(V_R) = \dim(U_R) \Leftrightarrow V_R = U_R$

Tenendo conto delle Osservazioni 10.4 e 10.12 si ha la seguente

**10.15. Osservazione.** Sia  $V_R$  è uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione  $n$ . Se  $B$  un insieme ordinato di vettori di  $V_R$  allora

**10.15.1.**  $B$  è una base di  $V_R \Leftrightarrow B$  è un insieme di  $n$  generatori

**10.15.2.**  $B$  è una base di  $V_R \Leftrightarrow B$  è un insieme di  $n$  di vettori linearmente indipendenti

**10.16. Teorema.** (*caratterizzazione di una base*) Sia  $V_R$  è uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Un insieme ordinato  $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  è una base di  $V_R$  se e solo se ogni vettore di  $V_R$  si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ .

**Dimostrazione.** Se l'insieme  $B$  è una base di  $V_R$  allora (poiché i suoi elementi sono generatori di  $V_R$ ) per ogni vettore  $\mathbf{v}$  di  $V_R$  si ha che  $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n$ . Ci resta da provare che tale scrittura è unica. Supponiamo che sia anche  $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \beta_n\mathbf{u}_n$ . Da

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 + \dots + \beta_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \beta_n\mathbf{u}_n$$

si ottiene

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{u}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{u}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\mathbf{u}_3 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

Poiché gli elementi di una base sono linearmente indipendenti, si ha che tutti i coefficienti  $(\alpha_i - \beta_i)$  sono nulli, da cui  $\alpha_i = \beta_i$ . Quindi, le due scritture coincidono.

Viceversa, supponiamo che ogni vettore (anche quello nullo) di  $V_R$  si possa scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi di  $B$ . Ovviamente, questo vuol dire che gli elementi di  $B$  sono generatori dello spazio  $V_R$ . Inoltre,  $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \dots + 0\mathbf{u}_{n-1} + 0\mathbf{u}_n$  è un modo di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ . Poiché, per ipotesi, tale modo di scrivere il vettore nullo è unico, abbiamo che i vettori di  $B$  sono linearmente indipendenti. ■

**10.17. Definizione.** Sia  $V_R$  uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione  $n$ .

Se  $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  è una base di  $V_R$  si consideri la funzione  $\Omega_B : V_R \rightarrow \mathbb{R}^n$  così definita

$$\forall \mathbf{v} \in V_R \quad \Omega_B(\mathbf{v}) := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

dove  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$  è l'unica  $n$ -upla ordinata di numeri reali tale

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

La funzione  $\Omega_B : V_R \rightarrow \mathbb{R}^n$  viene detta *coordinatizzazione di  $V_R$  rispetto a  $B$* .

I numeri reali della  $n$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$  vengono detti *componenti* o *coordinate* del vettore  $\mathbf{v}$  rispetto alla base  $B$ .

**10.18. Definizione.** Sia  $\Omega : V \rightarrow U$  una funzione tra due spazi vettoriali reali  $V$  e  $U$ . Diremo che  $\Omega$  è *lineare* se valgono le seguenti proprietà:

$$(L1) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad \Omega(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \Omega(\mathbf{v}) + \Omega(\mathbf{w})$$

$$(L2) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \Omega(\omega \mathbf{v}) = \omega \Omega(\mathbf{v})$$

**10.19. Corollario.** Sia  $\Omega : V \rightarrow U$  una funzione tra due spazi vettoriali reali  $V$  e  $U$ . Se  $f$  è lineare allora valgono anche le seguenti proprietà:

$$(L3) \quad \Omega(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_U$$

$$(L4) \quad \forall \mathbf{v} \in V_R \quad \Omega(-\mathbf{v}) = -\Omega(\mathbf{v})$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $\mathbf{v} \in V_R$  si ha subito che:

$$- \quad \Omega(\mathbf{0}_V) = \Omega(0\mathbf{v}) = 0\Omega(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_U ;$$

$$- \quad \Omega(-\mathbf{v}) = \Omega((-1)\mathbf{v}) = (-1)\Omega(\mathbf{v}) = -\Omega(\mathbf{v}).$$

**10.20. Definizione.** Sia  $\Omega : V \rightarrow U$  una funzione lineare tra due spazi vettoriali reali  $V$  e  $U$ . Se  $\Omega$  è biettiva allora diremo che  $\Omega$  è un *isomorfismo* tra  $V$  e  $U$ . Diremo anche che  $V$  è *isomorfo*  $U$ .

Si può provare il seguente

**10.21. Teorema.** Sia  $V_R$  uno spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione  $n$  e sia  $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$  una sua base. La funzione di coordinatizzazione  $\Omega_B : V_R \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un isomorfismo tra lo spazio vettoriale  $V_R$  e lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ .

Tenendo conto della Definizione 10.20 e del Teorema 10.21 si ha subito la seguente

**10.22. Osservazione.** Ogni spazio vettoriale reale finitamente generato di dimensione  $n$  è isomorfo allo spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^n$  delle  $n$ -uple ordinate di numeri reali.

Tenendo conto dell'Osservazione 10.22 diamo la seguente

**10.23. Definizione.** Diremo che lo spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^n$  delle  $n$ -uple ordinate di numeri reali è un *modello universale* di spazio vettoriale reale di dimensione finita  $n$ .