

13. Determinante di una matrice quadrata

13.1. Definizione. Dati n numeri reali $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{(n-2)}, x_{(n-1)}, x_n$ col simbolo

$\sum_{i=1}^n x_i$ indicheremo la loro somma $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n)$. Quindi,

$$\sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n$$

13.2. Esempio.

- $\sum_{i=1}^n \alpha y_i = \alpha y_1 + \alpha y_2 + \alpha y_3 + \alpha y_4 + \dots + \alpha y_{(n-2)} + \alpha y_{(n-1)} + \alpha y_n$
- $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \dots + (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n)$
- $\sum_{i=1}^n x_{ih} = x_{1h} + x_{2h} + x_{3h} + x_{4h} + \dots + x_{(n-1),h} + x_{nh}$
- $\sum_{i=1}^n (\alpha y_i + z_{ih}) = (\alpha y_1 + z_{1h}) + (\alpha y_2 + z_{2h}) + (\alpha y_3 + z_{3h}) + \dots + (\alpha y_{(n-1)} + z_{(n-1),h}) + (\alpha y_n + z_{nh})$
- $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{h=1}^m x_{hi} \right) = \left(\sum_{h=1}^m x_{h1} \right) + \left(\sum_{h=1}^m x_{h2} \right) + \left(\sum_{h=1}^m x_{h3} \right) + \dots + \left(\sum_{h=1}^m x_{h,(n-1)} \right) + \left(\sum_{h=1}^m x_{hn} \right)$

13.3. Lemma. Valgono le seguenti proprietà:

$$(0) \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_{(n-2)} = x_{(n-1)} = x_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i = n\alpha$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) = \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \left(\sum_{h=1}^m x_{hi} \right) = \sum_{h=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{hi} \right)$$

Dimostrazione.

$$(0) \quad \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{(n-1)} + x_n = \alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha + \alpha = n\alpha$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \dots + (x_{(n-1)} + y_{(n-1)}) + (x_n + y_n) =$$

[per le proprietà associative e commutativa della somma]

$$= (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{(n-1)} + x_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{(n-1)} + y_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) = (\alpha x_1) + (\alpha x_2) + (\alpha x_3) + \dots + (\alpha x_{(n-1)}) + (\alpha x_n) =$$

[per le proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma]

$$= \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{(n-2)} + x_{(n-1)} + x_n) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

(3) Sia X la matrice di tipo $m \times n$ avente come elementi proprio i numeri reali x_{hi} .

$$\mathbf{X} = \begin{array}{cccccc}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdot & x_{1,(n-1)} & x_{1,n} \\
 x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdot & x_{2,(n-1)} & x_{2,n} \\
 x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdot & x_{3,(n-1)} & x_{3,n} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_{(m-1),1} & x_{(m-1),2} & x_{(m-1),3} & \cdot & x_{(m-1),(n-1)} & x_{(m-1),n} \\
 x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdot & x_{m,(n-1)} & x_{m,n}
 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \rightarrow r_1 \\ \rightarrow r_2 \\ \rightarrow r_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \rightarrow r_{(m-1)} \\ \rightarrow r_m \end{array} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 s_1 & s_2 & s_3 & & s_{(n-1)} & s_n & \rightarrow S
 \end{array}$$

Per ogni indice di riga $h \in \{1, 2, 3, \dots, (m-1), m\}$ indichiamo con r_h il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della h-esima riga. Quindi,

$$r_h = x_{h1} + x_{h2} + x_{h3} + x_{h4} + \dots + x_{h,(n-2)} + x_{h,(n-1)} + x_{hn} = \sum_{i=1}^n x_{hi}$$

Per ogni indice di colonna $i \in \{1, 2, 3, \dots, (n-1), n\}$ indichiamo con s_i il numero reale che si ottiene sommando tutti gli elementi della i-esima colonna. Quindi,

$$s_i = x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} + \dots + x_{(m-2),i} + x_{(m-1),i} + x_{mi} = \sum_{h=1}^m x_{hi}$$

Se indichiamo con S la somma di tutti gli elementi della matrice X, è facile convincersi che

$$\sum_{i=1}^n s_i = S = \sum_{h=1}^m r_h$$

Quindi, $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{h=1}^m x_{hi}\right) = \sum_{i=1}^n s_i = S = \sum_{h=1}^m r_h = \sum_{h=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{hi}\right)$. ■

13.4. Definizione. Sia A una matrice quadrata di tipo $m \times n$ ad elementi reali. Se $h < m$ e $k < n$ con il simbolo $A_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h\}, \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}}$ indicheremo la matrice A' di tipo $(m-h) \times (n-k)$ ottenuta “cancellando” da A le righe di indici $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_h\}$, le colonne di indici $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}$ e “eliminando gli spazi vuoti”. Diremo anche che A' è una **sottomatrice** di A .
 Se $h = k = 1$ invece di $A_{\{\alpha\}, \{\beta\}}$ scriveremo brevemente $A_{\alpha, \beta}$ e, talvolta, anche solamente $A_{\alpha\beta}$.

13.5. Esempio. Sia A la matrice di tipo 5×8 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 & 1 & -7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 2^a \\ \\ \\ \leftarrow 5^a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^a & 2^a & 4^a & 7^a \end{array}$$

Cancellando da A le righe di indici $\{2, 5\}$ e le colonne di indici $\{1, 2, 4, 7\}$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Eliminando gli spazi vuoti otteniamo la seguente matrice di tipo 3×4

$$A' = A_{\{2,5\}, \{1,2,4,7\}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

13.6. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Si ha che

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

13.7. Definizione. Sia A una matrice **quadrata** di ordine n ad elementi reali.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{(n-1),(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definiamo *determinante di A* , e lo indichiamo con $\det A$, il **numero reale** seguente:

- se $n = 1$, cioè $A = [a_{11}]$, allora $\det A := a_{11}$
- se $n \geq 2$ allora $\det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$

13.8. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 2.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = \\ &= (-1)^2 a_{11} \det [a_{11}] + (-1)^3 a_{12} \det [a_{12}] = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \\ &= \mathbf{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{aligned}$$

13.9. Esempio. Utilizzando quanto visto nell'osservazione precedente abbiamo che:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 15 = -3 \quad \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = (-7) - (-12) = 5 \quad \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = 12 - (-12) = 0$$

13.10. Esempio. Considerando le sottomatrici di ordine 2 dell'esempio 13.6 si ha che:

$$\begin{aligned} \det A_{11} &= \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27 & \det A_{12} &= \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2 & \det A_{13} &= \det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5 \\ \det A_{21} &= \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12 & \det A_{22} &= \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21 & \det A_{23} &= \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38 \\ \det A_{31} &= \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8 & \det A_{32} &= \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14 & \det A_{33} &= \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35. \end{aligned}$$

13.11. Osservazione. Calcoliamo il determinante per una generica matrice di ordine 3.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} = \\ &= (-1)^2 a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^3 a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^4 a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = \\ &= \mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}}. \end{aligned}$$

13.12. Osservazione. Lo sviluppo del determinante di ordine 3 si può ricordare utilizzando la “*regola di Sarrus*”. Nella riga precedente si osserva che si hanno sei addendi ognuno prodotto di tre fattori. Costruiamo ora una matrice C aggiungendo alla matrice A le prime due colonne di A

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Si può notare che i primi tre addendi corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali discendenti verso destra mentre i secondi tre addendi (quelli preceduti dal segno negativo) corrispondono al prodotto degli elementi sulle tre diagonali ascendenti verso destra.

13.13. Esempio. Si calcoli il determinante delle matrici A e B quadrate di ordine 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-48) + (-11) + (-105) - (220) - (14) - (-18) = -380$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det B = (-30) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -30$$

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

13.14. Lemma. Scambiando due righe il determinante cambia di segno.

13.15. Teorema (O.E.1). Effettuando s scambi di righe il determinante viene moltiplicato per $(-1)^s$.

13.16. Corollario. Se una matrice quadrata ha due righe uguali, allora il suo determinante vale zero.

Dimostrazione. Sia A una matrice avente la i -esima riga uguale alla h -esima riga con $i \neq h$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando la i -esima riga con la h -esima riga. Per il Lemma 13.14 è $\det B = -\det A$. D'altronde, è $B = A$ per cui $\det B = \det A$. Quindi, si ha che $\det A = 0$. ■

13.17. Teorema (1° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni indice

di riga $h = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ si ha che $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}$

Dimostrazione. Per $h = 1$ la tesi è vera per definizione. Sia ora $2 \leq h \leq n$.

Sia B la matrice quadrata di ordine n costruita nel modo seguente:

- $B_1 = A_h$
- $B_i = A_{i-1}$ per ogni indice i di riga con $i \neq 1$ e $i \leq h$
- $B_i = A_i$ per ogni indice i di riga con $i \geq h+1$

È facile vedere che:

- (1) B si ottiene da A mediante $(h-1)$ scambi di righe, quindi, $\det A = (-1)^{h-1} \det B$;
- (2) $b_{1j} = a_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$
- (3) $B_{1j} = A_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$

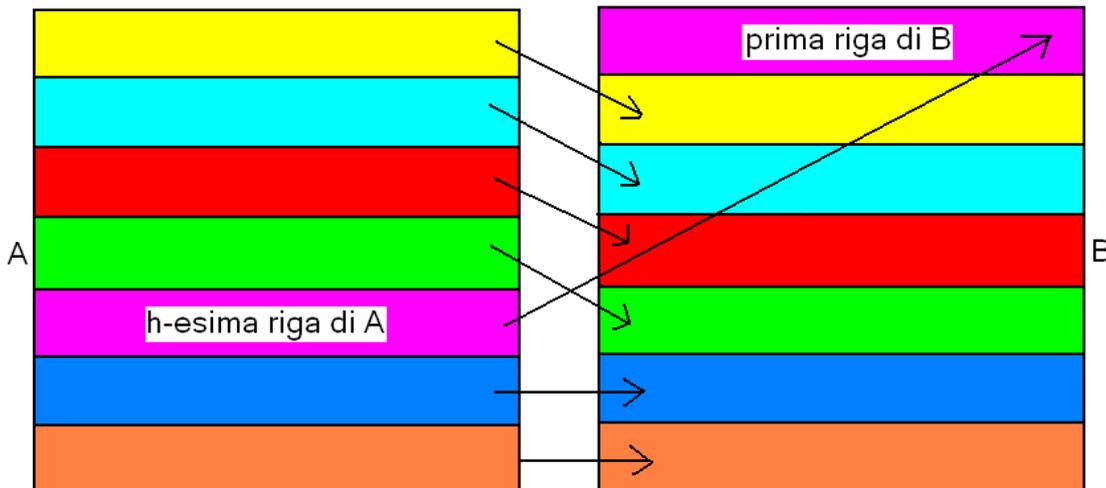
Tenendo conto di tali osservazioni si ha:

$$\det A = (-1)^{h-1} \det B = (-1)^{h-1} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j} \right] = (-1)^{h-1} \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} \right] =$$

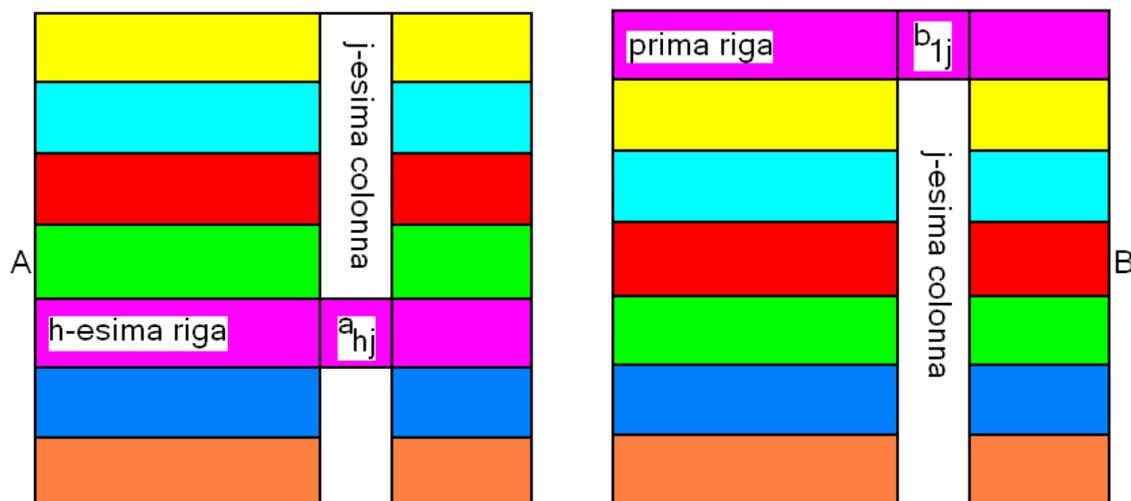
$(-1)^{h-1}$ non dipende dall'indice di sommatoria, quindi per la proprietà (2) del Lemma 13.3 ↑

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{h-1} (-1)^{1+j} a_{hj} \det A_{hj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj} \quad \blacksquare$$

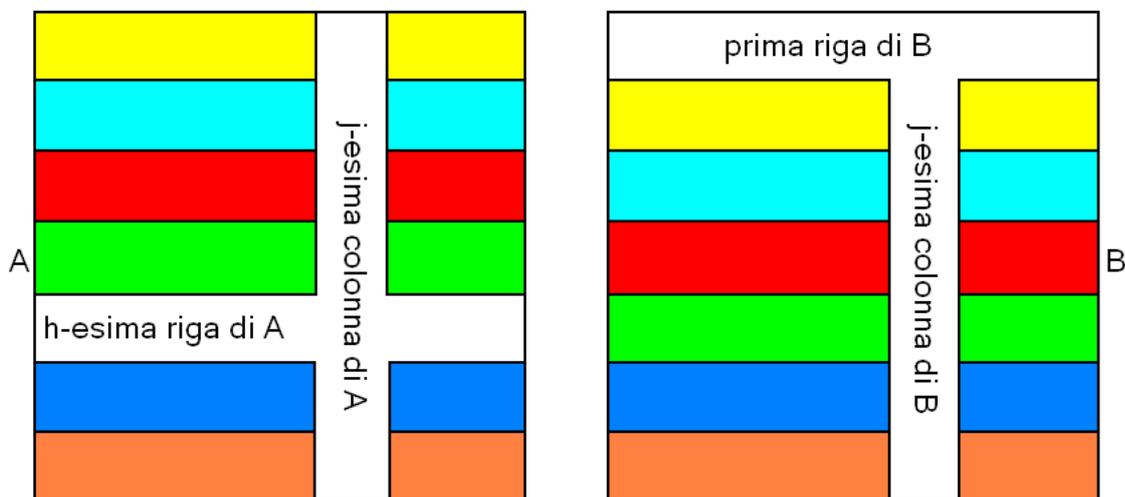
Alcune figure per “visualizzare” meglio la dimostrazione del Teorema 13.17. Si vede che:



(1) B si ottiene da A mediante $(h-1)$ scambi di righe, quindi $\det A = (-1)^{h-1} \det B$;



(2) per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n$ è $b_{1j} = a_{hj}$



(3) per ogni $j = 1, 2, 3, \dots, n$ è $B_{1j} = A_{hj}$

13.18. Teorema (O.E.2). Se si moltiplicano tutti gli elementi di una riga per uno scalare allora il determinante risulta anch'esso moltiplicato per quello scalare.

Dimostrazione. Sia A una matrice quadrata di ordine n .

Sia B la matrice ottenuta moltiplicando per il numero reale α la h -esima riga di A , cioè

$$- B_h = \alpha A_h$$

$$- B_i = A_i \quad \text{per ogni indice } i \text{ di riga con } i \neq h$$

Proviamo che $\det B = \alpha \det A$.

E' facile vedere che:

$$(1) b_{hj} = \alpha a_{hj} \quad \text{per ogni indice di colonna } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$(2) B_{hj} = A_{hj} \quad \text{per ogni indice di colonna } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ora, usando il 1° teorema di Laplace, calcoliamo il determinante di B lungo la sua h -esima riga

$$\det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj} = \text{tenendo conto di (1) e (2)}$$

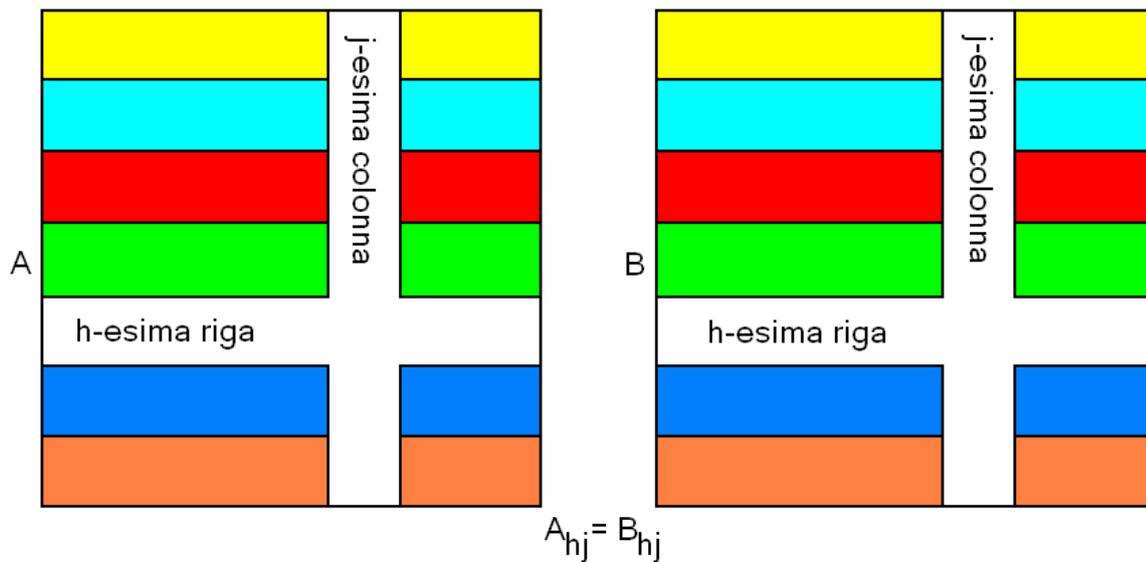
$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} (\alpha a_{hj}) \det A_{hj} = \alpha \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj} \right] = \alpha (\det A). \quad \blacksquare$$

↑ per la proprietà (2) del Lemma 13.3

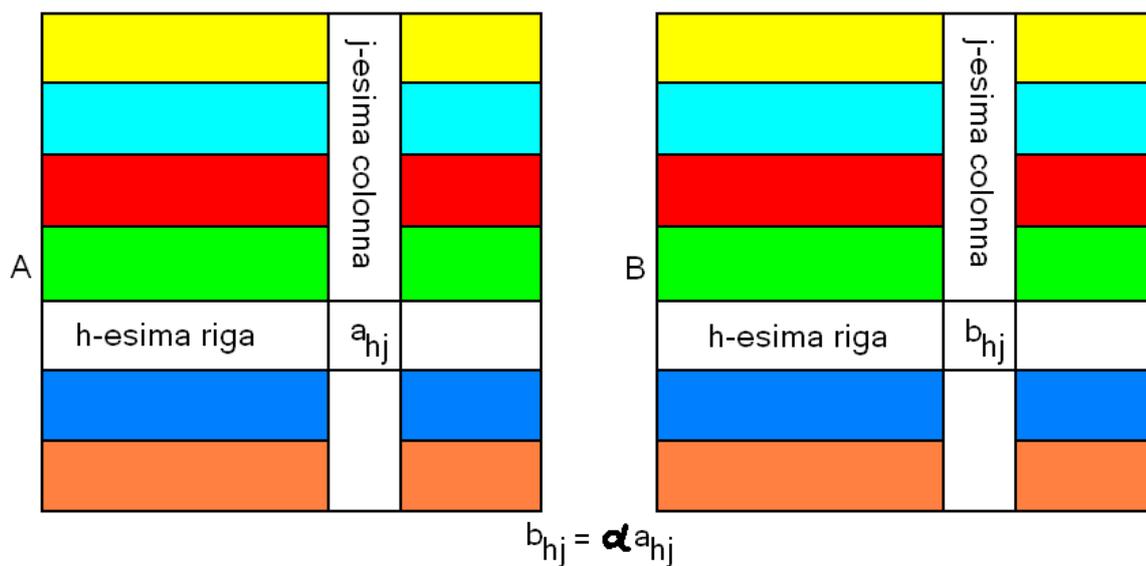
13.19. Corollario. Se una matrice ha una riga nulla, allora il suo determinante vale zero.

Dimostrazione. Avere una riga nulla è come avere tutti gli elementi di quella riga moltiplicati per zero. \blacksquare

Alcune figure per “visualizzare” meglio la dimostrazione del Teorema 13.18. Si vede che:



(1) per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$ si ha che $A_{hj} = B_{hj}$



(2) per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$ si ha che $b_{hj} = \alpha a_{hj}$

13.20. Lemma. Se A , B e C sono tre matrici quadrate di ordine n tali che:

- $C_h = A_h + B_h$ (la h -esima riga di C è la somma delle h -esime righe di A e di B)

- $A_i = B_i = C_i$ per ogni $i \neq h$ (le altre righe di A , B e C sono tutte uguali)

allora $\det C = \det A + \det B$.

Si osservi che, in generale, è la matrice C **NON** è la somma delle matrici A e B , cioè $C \neq A + B$.

Dimostrazione. Per la condizione $C_h = A_h + B_h$ si ha che

(1) $c_{hj} = a_{hj} + b_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Per la condizione $A_i = B_i = C_i$ per ogni $i \neq h$ si ha che

(2) $C_{hj} = B_{hj} = A_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Ora, usando il 1° teorema di Laplace, calcoliamo il determinante di C lungo la sua h -esima riga

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} c_{hj} \det C_{hj} = \text{tenendo conto di (2)} = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} (a_{hj} + b_{hj}) \det C_{hj} = \sum_{j=1}^n [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj} + (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj}] = \\ & \hspace{15em} \text{per la proprietà (1) del Lemma 13.3} \uparrow \\ &= \left[\sum_{j=1}^n [(-1)^{h+j} a_{hj} \det C_{hj}] \right] + \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} b_{hj} \det C_{hj} \right] = \\ &= \text{tenendo conto di (1)} = \\ &= \left[\sum_{j=1}^n [(-1)^{h+j} a_{hj} \det A_{hj}] \right] + \left[\sum_{j=1}^n (-1)^{h+j} b_{hj} \det B_{hj} \right] = \det A + \det B \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13.21. Osservazione. Precisiamo ancora una volta che il Lemma precedente **NON** afferma che il determinante di una somma di due matrici è uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

13.22. Esempio. Per le seguenti matrici A e B si ha che $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

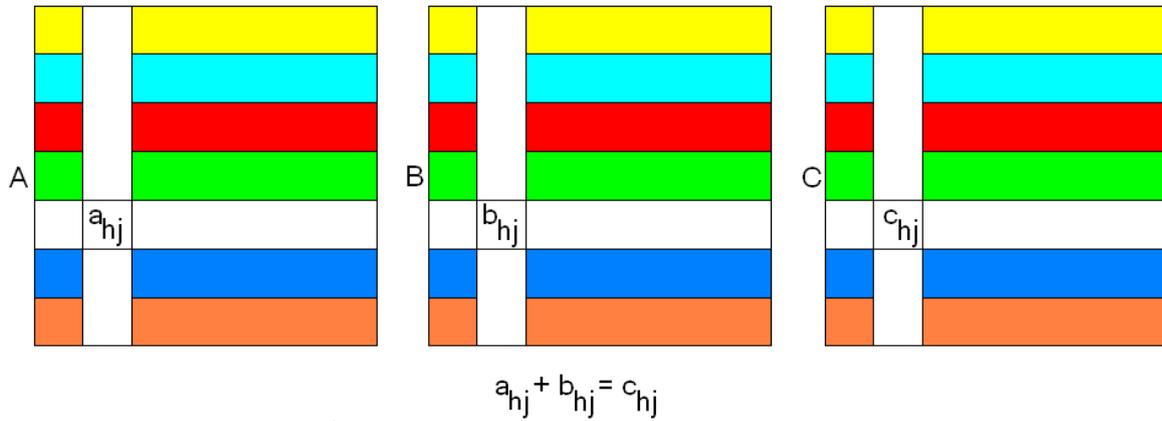
Se $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, allora $(A + B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$.

Si ha che $\det(A + B) = -2 \neq -13 = -27 + 14 = \det A + \det B$.

Alcune figure per “visualizzare” meglio la dimostrazione del Teorema 13.20. Si vede che:

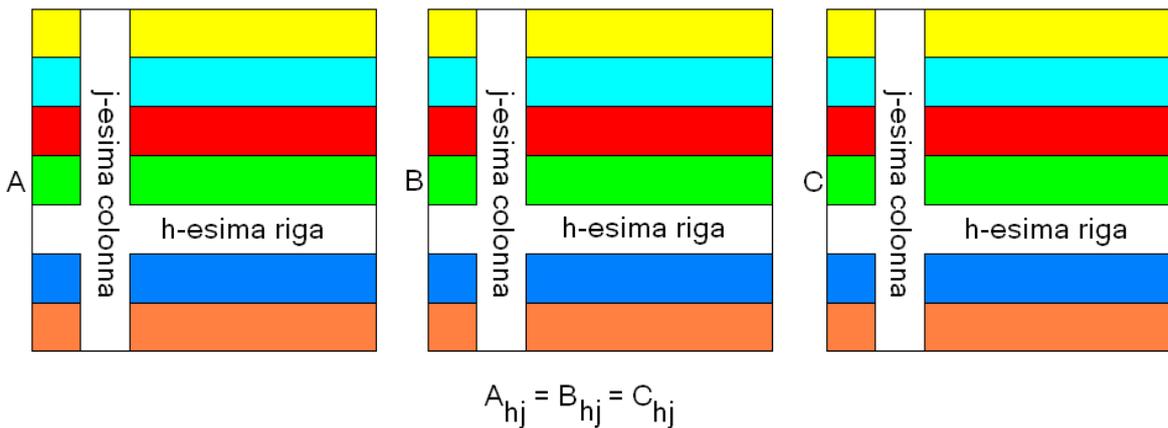
La condizione $C_h = A_h + B_h$ implica che

(1) $c_{hj} = a_{hj} + b_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$



La condizione $A_i = B_i = C_i$ per ogni $i \neq h$ implica che

(2) $A_{hj} = B_{hj} = C_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$



Dal Lemma 13.20 e dal Corollario 13.16 segue subito il seguente:

13.23. Teorema (O.E.3). Se ad una riga si aggiunge un'altra (diversa) riga moltiplicata per uno scalare qualsiasi allora il determinante **non** cambia.

Dimostrazione. Sia B la matrice ottenuta dalla matrice A aggiungendo alla sua k-esima riga la sua h-esima riga moltiplicata per α . Cioè,

$$- B_k = A_k + \alpha A_h \quad \text{con } h \neq k$$

$$- B_i = A_i \quad \text{per ogni } i \neq k$$

$$\det B = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ A_k + \alpha A_h \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ A_k \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ \alpha A_h \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} = \det A + \alpha 0 = \det A \quad \blacksquare$$

Dal teorema 13.23 e dal corollario 13.16 seguono subito i seguenti corollari.

13.24. Corollario. Se ad una riga aggiungiamo una combinazione lineare di altre (diverse) righe, allora il determinante non cambia.

13.25. Corollario. Se una riga è combinazione lineare di altre righe, allora il determinante è nullo.

Tenendo conto dei Teoremi 13.15, 13.18 e 13.23 si prova subito il seguente:

13.26. TEOREMA. Sia A una matrice quadrata e sia B la matrice quadrata ottenuta da A tramite un numero finito di operazioni elementari sulle righe di A. Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari **non nulli** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora

$$\det B = (-1)^s (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{(t-1)} \alpha_t) \det A$$

Si osservi che

$$\det B \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

13.27. Teorema. Il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.

Dimostrazione. (per induzione). Si verifica subito per matrici di ordine 1 e di ordine 2. Proviamo, ora, che se l'enunciato è vero per matrici di ordine $(n-1)$, allora è vero anche per matrici di ordine n . Sia A una matrice quadrata di ordine n triangolare superiore. Per il 1° teorema di Laplace applicato alla sua (ultima) n -esima riga si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

Poiché A è triangolare superiore si ha che per ogni $j \leq (n-1)$ è $a_{nj} = 0$. Quindi,

$$\det A = (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn} = (-1)^{2n} a_{nn} \det A_{nn} = a_{nn} \det A_{nn}$$

Poiché A_{nn} è una matrice di ordine $(n-1)$ triangolare superiore, per l'ipotesi induttiva, si ha che il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale

$$\det A_{nn} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \dots a_{(n-2),(n-2)} a_{(n-1),(n-1)}$$

Quindi, $\det A = a_{nn} \det A_{nn} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \dots a_{(n-2),(n-2)} a_{(n-1),(n-1)} a_{nn}$ ■

13.28. Osservazione. I Teoremi 13.26 e 13.27 ci forniscono un modo comodo per calcolare il determinante di una matrice di ordine "grande". Infatti, se dobbiamo calcolare il determinante di una matrice A possiamo procedere nel modo seguente:

- (1) troviamo (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B a scalino; ovviamente, la matrice B è anche triangolare superiore;
- (2) calcoliamo il determinante di B che è uguale al prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale;
- (3) Se abbiamo effettuato s scambi di righe e abbiamo moltiplicato le righe per gli scalari non nulli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{(t-1)}, \alpha_t$ allora

$$\det A = (-1)^s (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{(t-1)} \alpha_t)^{-1} \det B$$

13.29. Esempio. $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 38 & -21 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow D = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 190 & -105 \end{bmatrix} \rightarrow E = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -181 \end{bmatrix}$$

$$905 = \det E = \det D = 5 \det C = 5 \det B = 5(-\det A) \Rightarrow \det A = -905/5 = -181.$$

Dai teoremi 12.16 e 13.27 si ha subito il seguente:

13.30. Lemma. Una matrice quadrata A a scalino ha rango massimo se e solo se $\det A \neq 0$.

13.31. Teorema. Una matrice quadrata A (qualsiasi) ha rango massimo se e solo se $\det A \neq 0$. 11.27 a scalino

Dimostrazione. Sia A una matrice quadrata. Per il Teorema 11.27 è possibile trovare (tramite un numero finito di opportune operazioni elementari applicate alle righe di A) una matrice B che abbia lo stesso rango di A. Quindi, il rango di A è massimo se e solo se il rango di B è massimo, ovvero (per il Lemma 13.30) se e solo se il determinante di B è diverso da zero e, quindi, (per il Teorema 13.26) se e solo se il determinante di A è diverso da zero. ■

13.32. Osservazione. Per una matrice quadrata A si ha che:

- le righe sono linearmente **indipendenti** se e solo se $\det A \neq 0$;
- nessuna riga è combinazione lineare di altre righe se e solo se $\det A \neq 0$;
- le righe sono linearmente **dipendenti** se e solo se $\det A = 0$;
- almeno una riga è combinazione lineare delle altre righe se e solo se $\det A = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix} \quad \det A = -380$$

Le righe di A sono linearmente indipendenti.

Nessuna delle righe di A è combinazione lineare delle rimanenti righe.

$$B = \begin{bmatrix} 65 & 0 & -31 \\ -3 & 4 & 1 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix} \quad \det B = 0$$

Le righe di B sono linearmente **indipendenti**. DIPENDENTI

Almeno una riga di B è combinazione lineare delle rimanenti righe.

Ad esempio si può facilmente verificare che $B_1 = (-7)B_2 + 4B_3$.

13.33. Esempio. Sia V_R uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ una sua base.

Consideriamo i seguenti quattro vettori

$$\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{u}_1 + 16\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3$$

Stabilire se le seguenti terne $C = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sono basi di V_R .

Lo spazio V_R è isomorfo allo spazio \mathbb{R}^3 .

Ai vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 corrispondono rispettivamente le terne

$$\mathbf{a}_0 = (5, 0, 16), \mathbf{a}_1 = (2, -1, 5), \mathbf{a}_2 = (-1, 3, 1) \text{ e } \mathbf{a}_3 = (1, -4, -7).$$

Indichiamo con M la matrice avente come colonne (o righe) le terne $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ e \mathbf{a}_2

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Con semplici calcoli si ha che $\det M = 0$. Per il teorema 13.31 la matrice M non ha rango massimo ovvero non ha rango uguale a 3. Per cui le tre terne $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ e \mathbf{a}_2 non sono linearmente indipendenti.

Quindi anche i tre vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ e \mathbf{v}_2 non sono linearmente indipendenti.

Infine possiamo dire che la terna $C = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ **NON** è una base di V_R .

Indichiamo con N la matrice avente come colonne (o righe) le terne $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ e \mathbf{a}_3

$$N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Con semplici calcoli si ha che $\det N = -23 \neq 0$. Per il teorema 13.31 la matrice N ha rango massimo ovvero ha rango uguale a 3. Per cui le tre terne $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ e \mathbf{a}_3 sono linearmente indipendenti.

Quindi anche i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 sono linearmente indipendenti.

Infine possiamo dire che la terna $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ **E'** una base di V_R .

13.34 Teorema (2° di Laplace). Se A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, allora per ogni coppia di indici di riga $h, k = 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ con $h \neq k$ si ha che

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0.$$

Dimostrazione. Siano A e B due matrici tali che

- $B_k = A_h$ con $h \neq k$ (la k -esima riga di B è uguale alla h -esima riga di A)
- $B_i = A_i$ per ogni $i \neq k$ (le altre righe di A e B sono uguali)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_h \\ \cdot \\ A_k \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_h = A_h \\ \cdot \\ B_k = A_h \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$$

Si osservi che si ha:

- (1) $b_{kj} = a_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$
- (2) $B_{kj} = A_{kj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$

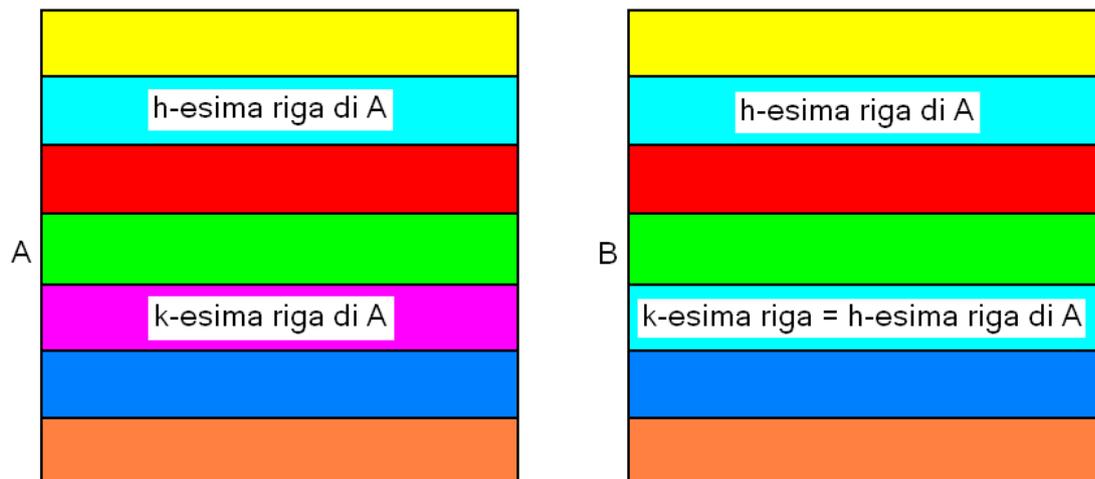
Ora, usando il 1° teorema di Laplace, calcoliamo il determinante di B lungo la sua k -esima riga

$$\det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} = \text{tenendo conto di (1) e (2)} = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj}$$

D'altronde, si ha anche che $\det B = 0$ poiché B ha due righe uguali (la h -esima e la k -esima).

Quindi, $\sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{hj} \det A_{kj} = 0$. ■

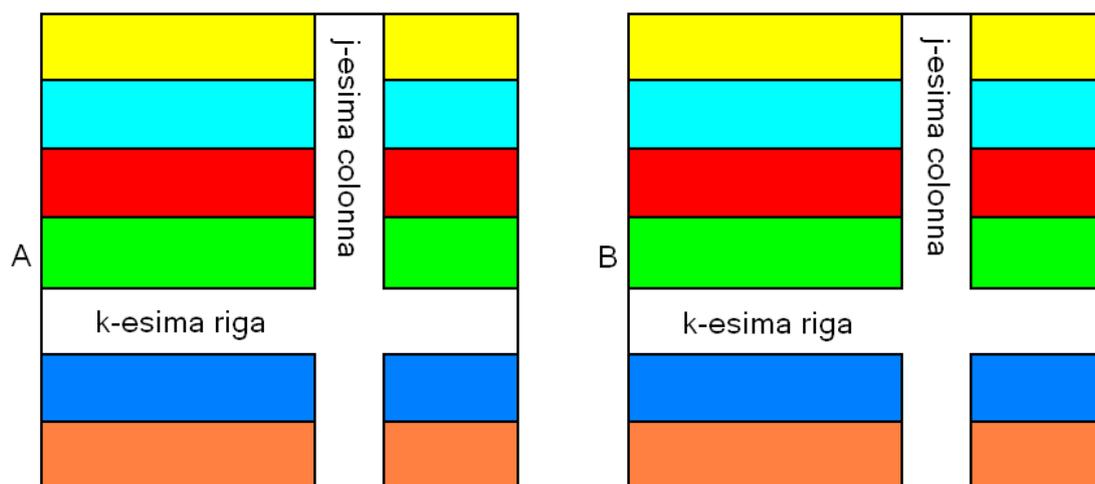
Alcune figure per “visualizzare” meglio la dimostrazione del Teorema 13.34.



Si vede subito che:



(1) $b_{kj} = a_{hj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$



$$A_{kj} = B_{kj}$$

(2) $B_{kj} = A_{kj}$ per ogni indice di colonna $j = 1, 2, 3, \dots, n$

13.35. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$ il numero reale $\mathbf{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij} .

13.36. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo **matrice cofattore** della matrice A , e la indichiamo col simbolo $\text{cof}A$, la matrice quadrata di ordine n ad elementi reali formata dai complementi algebrici \mathbf{a}_{ij} degli elementi a_{ij} di A .

13.37. Definizione. Sia A una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali. Chiamiamo **matrice aggiunta** di A , e la indichiamo col simbolo $\text{agg}A$, la trasposta della matrice cofattore di A .

13.38. Esempio. Sia A la matrice quadrata di ordine 3 dell'esempio 13.6:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Dall'Esempio 13.10 si ha che

$$\det A_{11} = \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = -27$$

$$\det A_{12} = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

$$\det A_{13} = \det \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 5$$

$$\det A_{21} = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 12$$

$$\det A_{22} = \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -21$$

$$\det A_{23} = \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 38$$

$$\det A_{31} = \det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -8$$

$$\det A_{32} = \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14$$

$$\det A_{33} = \det \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 35.$$

Quindi,

$$\mathbf{a}_{11} = (-1)^{1+1}(-27) = -27$$

$$\mathbf{a}_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$$

$$\mathbf{a}_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$$

$$\mathbf{a}_{21} = (-1)^{2+1}(12) = -12$$

$$\mathbf{a}_{22} = (-1)^{2+2}(-21) = -21$$

$$\mathbf{a}_{23} = (-1)^{2+3}(38) = -38$$

$$\mathbf{a}_{31} = (-1)^{3+1}(-8) = -8$$

$$\mathbf{a}_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$$

$$\mathbf{a}_{33} = (-1)^{3+3}(35) = 35$$

$$\text{Per cui } \text{cof}A = \begin{bmatrix} -27 & -2 & 5 \\ -12 & -21 & -38 \\ -8 & -14 & 35 \end{bmatrix} \text{ e } \text{agg}A = (\text{cof}A)^T = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}$$

13.39. Osservazione. Tenendo conto della Definizione 13.35 i due teoremi di Laplace si possono brevemente sintetizzare nel modo seguente:

$$\sum_{j=1}^n a_{hj} \mathbf{a}_{kj} = (\det A) \delta_{hk}$$

dove δ_{hk} è la **delta di Kronecker** ($\delta_{hk} = 0$ se $h \neq k$, $\delta_{hk} = 1$ se $h = k$).

13.40. Definizione. Chiameremo **matrice unità di ordine n** , e la indicheremo con il simbolo I_n , la matrice quadrata diagonale (e quindi avente tutti zeri al di fuori della diagonale principale) di ordine n avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1.

Quindi, l'elemento che si trova sulla h -esima riga e sulla k -esima colonna di I_n è δ_{hk} .

Esempio. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Si può facilmente provare che per ogni matrice $A_{p \times n}$ di tipo $p \times n$ si ha che

$$AI_n = I_p A = A$$

Esempio. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ allora si verifica facilmente che

$$AI_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = A$$

In particolare, se A è una matrice quadrata di ordine n allora si ha che

$$A I_n = I_n A = A$$

Cioè, la matrice I_n è l'elemento neutro rispetto al prodotto di matrici quadrate di ordine n .

13.41. Teorema. Per ogni matrice A quadrata di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\text{agg}A) = (\text{agg}A)A = (\det A)I_n$$

dove $(\det A)I_n$ è la matrice diagonale avente come elementi $\delta_{hk}\det A$, cioè avente tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a $\det A$.

Dimostrazione. Sia $B := A(\text{agg}A)$. Proviamo che $B = I_n$.

Il generico elemento b_{hk} di B è uguale al prodotto riga per colonna della h -esima riga di A

$$(a_{h1} \ a_{h2} \ a_{h3} \ a_{h4} \ \dots \ a_{h,(n-1)} \ a_{hn})$$

per la k -esima colonna di $\text{agg}A$, che è proprio la k -esima riga di $\text{cof}A$

$$(a_{k1} \ a_{k2} \ a_{k3} \ a_{k4} \ \dots \ a_{k,(n-1)} \ a_{kn})$$

Quindi, $b_{hk} = \sum_{j=1}^n a_{hj} a_{kj} = (\det A)\delta_{hk}$. Per cui $B = I_n$. ■

Ricordiamo che il determinante di una somma di due matrici quadrate dello stesso ordine **NON** è, in generale, uguale alla somma dei determinanti delle due matrici.

$$\det(A+B) \neq (\det A) + (\det B)$$

Invece, vale (ne omettiamo la dimostrazione) il seguente:

13.42. Teorema (Binet). Il determinante del prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici.

14. Matrici invertibili.

14.1. Definizione. Diremo che una **matrice** A **quadrata** di ordine n ad elementi reali è **invertibile** se esiste una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Ovviamente, anche la matrice B è invertibile.

14.2. Osservazione. Se A è una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali invertibile allora esiste ed è **unica** una matrice B quadrata di ordine n ad elementi reali tale che

$$AB = I_n = BA$$

Dimostrazione. Poiché A è per ipotesi invertibile, dobbiamo provare solamente che B è unica. Se esistesse un'altra matrice C quadrata di ordine n ad elementi reali tale che $AC = I_n = CA$, si avrebbe:

$$AB = I_n \Rightarrow C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_n B = C \Rightarrow B = C. \blacksquare$$

Tenendo conto dell'Osservazione 14.2 è ben posta la seguente:

14.3. Definizione. Se A è una matrice invertibile, allora diremo **matrice inversa** della matrice A , e la indicheremo con il simbolo A^{-1} , l'**unica** matrice B tale che $AB = I_n = BA$. Quindi,

$$A A^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

14.4. Osservazione. Ovviamente, se A è invertibile, allora anche A^{-1} è invertibile. Inoltre, l'inversa di A^{-1} è A stessa, cioè $(A^{-1})^{-1} = A$.

14.5. Teorema. Se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche la matrice AB è invertibile ed è $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. Quindi, l'inversa di un prodotto di due matrici invertibili è uguale al prodotto delle inverse delle due matrici prese in ordine "inverso".

Dimostrazione. Poiché A e B sono invertibili esiste la matrice $C := B^{-1}A^{-1}$. Si ha che:

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$$

Quindi, per la Definizione 14.1 AB è invertibile e la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ è, per l'Osservazione 14.2, la sua **unica** inversa. Per cui $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$. \blacksquare

14.6. Definizione. Diremo che una **matrice quadrata** è **singolare** se il suo determinante è nullo.

Per il Teorema 13.41, per **ogni** matrice quadrata A di ordine n ad elementi reali si ha che

$$A(\text{agg}A) = (\text{agg}A)A = (\det A)I_n$$

Come immediata conseguenza del Teorema 13.41 si ha il seguente:

14.7. Lemma. Per ogni matrice A quadrata di ordine n **non** singolare (cioè $\det A \neq 0$) si ha che

$$A[(\det A)^{-1}(\text{agg}A)] = [(\det A)^{-1}(\text{agg}A)]A = I_n$$

Tenendo conto della Definizione 14.1 e dell'Osservazione 14.2 si ha il seguente:

14.8 Teorema. Se A è una matrice quadrata **non** singolare, allora A è invertibile e la sua (unica) inversa è data dal prodotto dell'inverso del determinante di A per la matrice aggiunta di A , cioè

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}(\text{agg}A)$$

14.9 Esempio. Se esiste, trovare l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Nell'Esempio 13.29 abbiamo visto che $\det A = -181 \neq 0$. Quindi, la matrice A è non singolare e, per il Teorema 14.8, è invertibile. Inoltre, $A^{-1} = (\det A)^{-1}(\text{agg}A)$.

Nell'Esempio 13.38 abbiamo visto che

$$\text{agg}A = \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}. \text{ Per cui si ha che } A^{-1} = (-1/181) \begin{bmatrix} -27 & -12 & -8 \\ -2 & -21 & -14 \\ 5 & -38 & 35 \end{bmatrix}.$$

14.10 Esempio. Troviamo l'inversa di una generica matrice non singolare di ordine 2.

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ con $\det A = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$.

$$\mathbf{a}_{11} = (-1)^{1+1}\det A_{11} = (-1)^2\det[a_{22}] = a_{22} \qquad \mathbf{a}_{12} = (-1)^{1+2}\det A_{12} = (-1)^3\det[a_{21}] = -a_{21}$$

$$\mathbf{a}_{21} = (-1)^{2+1}\det A_{21} = (-1)^3\det[a_{12}] = -a_{12} \qquad \mathbf{a}_{22} = (-1)^{2+2}\det A_{22} = (-1)^4\det[a_{11}] = a_{11}$$

Per cui $\text{cof}A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ e $\text{agg}A = (\text{cof}A)^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

$$\text{Infine, } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ -\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Dal Teorema (di Binet) 13.42 abbiamo subito il seguente:

14.11 Corollario. Se A è una matrice invertibile, allora si ha che $\det A \neq 0$, cioè A è **non** singolare.

Inoltre, è $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dimostrazione. Sia A una matrice invertibile e A^{-1} la sua inversa. Allora si ha

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$$

Per cui $\det A \neq 0$. Si osservi, inoltre, che è $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. ■

Conseguenza immediata del Teorema 14.8 e del Corollario 14.11 è il seguente:

14.12 Teorema. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se è non singolare.

14.13 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Ovviamente, si ha che

$$B = C \Rightarrow AB = AC$$

In generale, non vale il viceversa come possiamo vedere nel seguente

14.14 Esempio. Si considerino le seguenti tre matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Con semplici calcoli si vede che } AB = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad AC = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Quindi, si ha che $AB = AC$ et $B \neq C$

14.15 Osservazione. Siano A, B e C tre matrici quadrate di ordine n. Si ha che

$$AB = AC \quad \text{et} \quad A \text{ è invertibile} \Rightarrow B = C$$

Dimostrazione.

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow I_n B = I_n C \Rightarrow B = C \quad \blacksquare$$

14.16 Esercizi. Se esistono, calcolare le matrici inverse delle seguenti matrici.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -21 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$