

## 17. Sistemi lineari.

Ricordiamo che se  $p \in \mathbb{N}$  allora col simbolo  $I_p$  indichiamo l'insieme  $\{1, 2, 3, 4, \dots, p\}$ .

**17.1. Definizione.** Diremo *sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite* un insieme di  $m$  equazioni lineari (cioè di 1° grado) del tipo

$$(eq_1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(eq_2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$(eq_3) \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$(eq_4) \quad a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \dots + a_{4n}x_n = b_4$$

.....

$$(eq_m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

dove  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$  è la  *$n$ -upla delle incognite*.

Per ogni  $i \in I_m$  il numero reale  $b_i$  si dice *termine noto della  $i$ -esima equazione*. Per ogni coppia di indici  $(i, j) \in I_m \times I_n$  il numero reale  $a_{ij}$  si dice *coefficiente dell'incognita  $x_j$  nella  $i$ -esima equazione*.

**17.2. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite  $(w, x, y, z)$

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

Tenendo conto della definizione di matrici uguali, il sistema precedente si può scrivere anche così:

$$\begin{bmatrix} 2w + 2x - y + 3z \\ w - 3y + 2z \\ 3w - 2x - 17y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

E' facile verificare che

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w + 2x - y + 3z \\ w - 3y + 2z \\ 3w - 2x - 17y + 7z \end{bmatrix}.$$

Per cui è possibile **rappresentare** il sistema:

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

anche nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Si noti che gli elementi della 1<sup>a</sup> matrice sono i coefficienti delle incognite (w, x, y, z).

E' anche facile verificare che

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 2w \\ w \\ 3w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \\ -2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ -3y \\ -17y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ 2z \\ 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w + 2x - y + 3z \\ w - 3y + 2z \\ 3w - 2x - 17y + 7z \end{bmatrix}$$

Per cui è possibile **rappresentare** il sistema:

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

anche nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Per cui il sistema  $\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$  si può **rappresentare** nei due modi seguenti:

$$(I) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix} \qquad (II) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Si noti che  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$  sono le colonne della matrice  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$ .

Ora, generalizziamo quanto visto nell'Esempio 17.2.

Con riferimento a quanto visto nella Definizione 17.1 definiamo tre matrici A, X e B come segue

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Le colonne di A sono

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m3} \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m4} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

E' facile convincersi che il sistema lineare della definizione si può rappresentare nei seguenti modi

$$(I) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero  $AX = B$

$$(II) \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m3} \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m4} \end{bmatrix} x_4 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero  $A^1 x_1 + A^2 x_2 + A^3 x_3 + A^4 x_4 + \dots + A^n x_n = B$

**17.3. Definizione.** Quando useremo la rappresentazione (I) diremo che il **sistema** è scritto **in forma matriciale** mentre quando useremo la (II) diremo che il **sistema** è scritto **per colonne**.

Sia  $C := [A|B]$  la matrice di tipo  $m \times (n+1)$  che si ottiene “affiancando” la colonna B alla matrice A.

$$C = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{4n} & b_4 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

**17.4. Definizione.** Per un sistema lineare  $AX = B$  diremo che

- A è la **matrice dei coefficienti** o **matrice incompleta** del sistema;
- X è la (matrice) **colonna delle incognite**;
- B è la (matrice) **colonna dei termini noti**;
- $C = [A|B]$  è la **matrice completa** del sistema.

**17.5. Osservazione.** Per il Teorema 9.22, lo spazio  $\langle A^1, A^2, A^3, A^4, \dots, A^n \rangle$  generato dalle colonne di A è un sottospazio dello spazio  $\langle A^1, A^2, A^3, A^4, \dots, A^n, B \rangle$  delle colonne di C. Per cui si ha che

**17.5.1.**  $\mathcal{C}_A \leq \mathcal{C}_C$

**17.5.2.**  $\dim \mathcal{C}_A \leq \dim \mathcal{C}_C$  ovvero  **$\text{rg}(A) \leq \text{rg}(C)$**  (per l'Osservazione 10.14.1)

**17.5.3.**  **$\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_C \Leftrightarrow \dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C}_C$**  (per l'Osservazione 10.14.2)

**17.6. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite (w, x, y, z)

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix} \quad C = [A|B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 & | & 15 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & | & 7 \\ 3 & -2 & -17 & 7 & | & 26 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ è sottospazio di } \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix} \right\rangle$$

**17.7. Definizione.** Dato un sistema lineare  $AX = B$  nelle incognite  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$  diremo che la **n-upla ordinata** di numeri reali  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$  è **UNA soluzione del sistema** se sostituendo **ordinatamente** i numeri reali  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$  alle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  in ognuna delle equazioni si ottengono sempre delle **identità**.

**17.8. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite  $(w, x, y, z)$

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

È facile verificare che la quaterna ordinata  $(w, x, y, z) = (19, 1, -2, -9)$  è una soluzione del sistema.

Riguardo all'esistenza di soluzioni di un sistema lineare abbiamo il seguente:

**17.9. TEOREMA (Rouché - Capelli).** Un sistema lineare ha almeno una soluzione se e solo se il rango della sua matrice incompleta è uguale al rango della sua matrice completa.

**Dimostrazione.** Utilizziamo la scrittura per colonne del sistema lineare

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \dots + A^nx_n = B$$

Il sistema ha almeno una soluzione  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \dots + A^n\alpha_n = (\text{identità}) = B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B$  è una combinazione lineare delle colonne di  $A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B \in \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \dots, A^n \rangle \Leftrightarrow$  (per il Teorema 9.22)

$\Leftrightarrow \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \dots, A^n \rangle = \langle A^1, A^2, A^3, A^4, \dots, A^n, B \rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{C}_A = \mathcal{C}_{[A|B]} \Leftrightarrow \mathcal{C}_A = \mathcal{C}_C \Leftrightarrow \dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C}_C \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(C) \blacksquare$

**17.10. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite  $(w, x, y, z)$

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che tale sistema ha almeno una soluzione. Facciamo vedere che  $\text{rg}(A) = \text{rg}(C)$ .

Il determinante della sottomatrice formata dalla prima, terza e quarta colonna di  $A$  è non nullo (è uguale a +3). Quindi,  $\text{rg}(A) = 3$ . Da  $3 = \text{rg}(A) \leq \text{rg}(C) \leq 3$  si ha che  $\text{rg}(C) = 3$ .

**17.11. Definizione.** Un sistema lineare  $AX = B$  con  $A$  di tipo  $m \times n$  si dice **normale** se  $\text{rg}(A) = m$  ovvero il rango di  $A$  è uguale al numero delle sue righe.

**17.12. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 4 incognite  $(w, x, y, z)$

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che  $\text{rg}(A) = 3 =$  numero righe di  $A$ . Quindi, questo sistema lineare è normale.

**17.13. Lemma.** In un sistema lineare normale il numero delle equazioni è minore o uguale al numero delle incognite.

**Dimostrazione.** Se  $AX = B$  è un sistema lineare normale con  $A$  di tipo  $m \times n$ , allora  $\text{rg}(A) = m$ .

Tenendo conto che  $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$  si ha necessariamente che  $m \leq n$ . ■

**17.14. Corollario.** Un sistema lineare normale ha **sempre** almeno una soluzione.

**Dimostrazione.** Se  $AX = B$  è un sistema lineare normale con  $A$  di tipo  $m \times n$ , allora  $\text{rg}(A) = m \leq n$ .

Quindi,  $m < (n+1)$  da cui  $m = \min\{m, (n+1)\}$ . Poiché  $\mathbf{m} = \text{rg}(A) \leq \text{rg}(C) \leq \min\{m, (n+1)\} = \mathbf{m}$  si ha che  $\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = m$ . Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ha almeno una soluzione. ■

**17.15. Definizione.** Un sistema lineare  $AX = B$  normale con  $A$  quadrata si dice **sistema di Cramer**.

**17.16. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite  $(x, y, z)$

$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ 5y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché  $\det A = -1 \neq 0$  è  $\text{rg}(A) = 3 =$  numero righe di  $A$ . Quindi, il sistema è normale.

Poiché  $A$  è una matrice quadrata, questo sistema lineare è un sistema di Cramer.

**17.17. Teorema. (Cramer)** Un sistema di Cramer ha un'unica soluzione.

**Dimostrazione.** Se  $AX = B$  è un sistema di Cramer allora, per definizione,  $A$  è quadrata di rango massimo. Per cui  $A$  è non singolare (cioè  $\det A \neq 0$ ) e, quindi,  $A$  è invertibile.

E' facile verificare che la colonna  $Y := A^{-1}B$  è una soluzione del sistema  $AX = B$ .

Infatti, moltiplicando (a destra) la matrice  $A$  per la colonna  $Y := A^{-1}B$  si ottiene

$$AY = (\text{identità}) = A(A^{-1}B) = (\text{identità}) = (AA^{-1})B = (\text{identità}) = IB = (\text{identità}) = B$$

Quindi, sostituendo la colonna  $X$  con la colonna  $Y := A^{-1}B$  nel sistema  $AX = B$  si ottiene l'identità  $B = B$ . Per cui, la colonna  $Y := A^{-1}B$  è una soluzione del sistema  $AX = B$ .

Proviamo che tale soluzione  $Y$  è unica.

Se  $Z$  fosse un'altra soluzione del sistema  $AX = B$ , allora varrebbe l'identità  $AZ = B$ . Da cui si avrebbe  $A^{-1}(AZ) = A^{-1}B$ . Cioè  $(A^{-1}A)Z = Y$  ovvero  $IZ = Y$  e, infine  $Z = Y$ . ■

**17.18. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite  $(x, y, z)$

$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ 5y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che questo è un sistema di Cramer. Inoltre,  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix}$ .

Quindi, l'unica soluzione del sistema è la colonna  $Y = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Ovvero, la terna  $(x, y, z) = (0, 2, -3)$  è l'unica soluzione del sistema  $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ 5y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ .

Si noti che tale sistema ha **UNA** unica soluzione data dalla terna  $(0, 2, -3)$ . Quindi, **NON** è corretto dire che  $x = 0, y = 2$  e  $z = -3$  sono **TRE** soluzioni del sistema.

**17.19. Teorema.** Un sistema lineare **normale** non di Cramer ha infinite soluzioni.

**Dimostrazione.** Se  $AX = B$  è un sistema lineare non normale di Cramer allora  $\text{rg}(A) = m < n$ .

Quindi, tra le  $n$  colonne di  $A$  ne esistono  $m$  linearmente indipendenti che formano una base di  $\mathcal{C}_A$ .

Per comodità supponiamo che siano le prime  $m$ . Rappresentiamo il sistema per colonne

$$(\clubsuit) \quad A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + \dots + A^mx_m + A^{m+1}x_{m+1} + A^{m+2}x_{m+2} + \dots + A^nx_n = B$$

Ora, scegliamo **a piacere** una  $(n - m)$ -upla ordinata di numeri reali  $(\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \dots, \beta_n)$ .

Sostituendo in tutte le equazioni del sistema i numeri reali  $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \dots, \beta_n$  ordinatamente alle incognite  $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_n$  otteniamo

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + \dots + A^mx_m + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \dots + A^n\beta_n = B$$

ovvero

$$A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \dots + A^mx_m = B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \dots + A^n\beta_n)$$

Ponendo

$$\bullet \quad A^* := [A^1 \mid A^2 \mid A^3 \mid A^4 \mid \dots \mid A^m]$$

(cioè  $A^*$  è la sottomatrice di  $A$  ottenuta cancellando da  $A$  le sue ultime  $(n - m)$  colonne)

$$\bullet \quad B^* := B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \dots + A^n\beta_n)$$

si ottiene un **nuovo** sistema lineare di  **$m$**  equazioni nelle  **$m$**  incognite  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m)$

$$(\heartsuit) \quad A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \dots + A^mx_m = B^*$$

La matrice incompleta di questo sistema è la matrice quadrata  $A^* := [A^1 \mid A^2 \mid A^3 \mid A^4 \mid \dots \mid A^m]$  formata dalle prime  $m$  colonne della matrice  $A$ . Poiché tali colonne sono linearmente indipendenti la matrice  $A^*$  ha rango massimo  $m$ . Quindi, il sistema  $(\heartsuit)$  è un sistema di Cramer.

Sia  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_m)$  l'unica soluzione del sistema  $(\heartsuit)$ , cioè si ha la seguente identità

$$A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \dots + A^m\alpha_m = B^*$$

E' immediato verificare che la  $n$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \dots, \beta_n)$  è una soluzione del sistema **iniziale**  $(\clubsuit)$ . Infatti, sostituendola all' $n$ -upla delle incognite si ha

$$A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + \dots + A^m\alpha_m + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \dots + A^n\beta_n =$$

$$= B^* + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \dots + A^n\beta_n =$$

$$= [B - (A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \dots + A^n\beta_n)] + A^{m+1}\beta_{m+1} + A^{m+2}\beta_{m+2} + \dots + A^n\beta_n = B$$

Quindi, **per ogni scelta** della  $(n - m)$ -upla  $(\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \beta_{m+3}, \dots, \beta_n)$ , si ottiene un'unica soluzione del sistema lineare  $(\clubsuit)$ . Di conseguenza, il sistema lineare  $(\clubsuit)$  ha infinite soluzioni. ■

**17.20. Definizione.** Nel Teorema 17.19 abbiamo visto che un sistema lineare può avere infinite soluzioni che dipendono dalla scelta di una  $(n - m)$ -upla di numeri reali.

In tal caso diremo che **il sistema ha  $\infty^{(n-m)}$  soluzioni**.

**17.21. Esempio.** Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni nelle **quattro** incognite  $(w, x, y, z)$

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -17 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo già visto che il determinante della sottomatrice  $A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -17 & 7 \end{bmatrix}$  formata dalla prima,

terza e quarta colonna di  $A$  è uguale a  $+3$ . Per cui, la prima, terza e quarta colonna di  $A$  sono linearmente indipendenti. Quindi, scegliamo la seconda incognita  $x$ , poniamola uguale a  $\beta$  e portiamola a secondo membro. Si ottiene il seguente **nuovo** sistema nelle **tre** incognite  $(w, y, z)$

$$\begin{cases} 2w - y + 3z = 15 - 2\beta \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 17y + 7z = 26 + 2\beta \end{cases}$$

Tale **nuovo** sistema è un sistema di Cramer.

$$\text{Si ha che } A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -17 & 7 \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} w \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 - 2\beta \\ 7 \\ 26 + 2\beta \end{bmatrix} \text{ e } (A')^{-1} = (1/3) \begin{bmatrix} 13 & -44 & 7 \\ -1 & 5 & -1 \\ -8 & 31 & -5 \end{bmatrix}.$$

Quindi, l'**unica** soluzione di tale **nuovo** sistema è

$$(A')^{-1}B = (1/3) \begin{bmatrix} 13 & -44 & 7 \\ -1 & 5 & -1 \\ -8 & 31 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 - 2\beta \\ 7 \\ 26 + 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 - 4\beta \\ -2 \\ -11 + 2\beta \end{bmatrix}$$

Per cui, l'unica soluzione del **nuovo** sistema è la **terna**  $(w, y, z) = (23 - 4\beta, -2, -11 + 2\beta)$ .

A questo punto è immediato rendersi conto che, per ogni valore reale del parametro  $\beta$ , la **quaterna**  $(w, x, y, z) = (23 - 4\beta, \beta, -2, -11 + 2\beta)$  è una soluzione del **sistema iniziale**

$$\begin{cases} 2w + 2x - y + 3z = 15 \\ w - 3y + 2z = 7 \\ 3w - 2x - 17y + 7z = 26 \end{cases}$$

Per cui il sistema iniziale ha infinite soluzioni dipendenti dal parametro  $\beta$ .

**17.22. Definizione.** Dati due **sistemi lineari**  $AX = B$  e  $\underline{A}X = \underline{B}$  con  $A$  di tipo  $m \times n$ ,  $\underline{A}$  di tipo  $p \times n$ , diremo che sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni. Si noti che affinché due sistemi siano equivalenti è necessario che abbiano lo **stesso numero di incognite** mentre, in generale, non è necessario i due sistemi abbiano lo stesso numero di equazioni.

**17.22. Definizione.** Dato un sistema lineare le seguenti azioni:

- (1) scambiare due equazioni tra loro;
- (2) moltiplicare un'equazione per un numero reale  $c \neq 0$ ;
- (3) aggiungere ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale qualsiasi;

si dicono **operazioni elementari sulle equazioni del sistema**.

**17.23. Osservazione.** Consideriamo le seguenti due equazioni lineari.

$$(I) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n = b$$

$$(II) \quad ca_1x_1 + ca_2x_2 + ca_3x_3 + ca_4x_4 + \dots + ca_nx_n = cb \quad \text{con } c \neq 0$$

Si noti che l'equazione (II) si può scrivere anche nel modo seguente

$$c(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n) = cb$$

cioè l'equazione (II) è stata ottenuta dall'equazione (I) con l'operazione elementare (2).

Si vede subito che una  $n$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$  è una soluzione dell'equazione (I) se e solo se la  $n$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$  è una soluzione dell'equazione (II).

Quindi, le equazioni (I) e (II) hanno le stesse soluzioni.

**17.24. Osservazione.** Consideriamo le seguenti tre equazioni lineari.

$$(I) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n = r$$

$$(II) \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + \dots + b_nx_n = s$$

$$(III) \quad (a_1+db_1)x_1 + (a_2+db_2)x_2 + (a_3+db_3)x_3 + (a_4+db_4)x_4 + \dots + (a_n+db_n)x_n = r + ds$$

Si noti che l'equazione (III) si può scrivere anche nel modo seguente

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n) + d(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + \dots + b_nx_n) = r + ds$$

cioè l'equazione (III) è stata ottenuta dalle equazioni (I) e (II) con l'operazione elementare (3).

Si vede subito che se la  $n$ -upla  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)$  è soluzione delle equazioni (I) e (II) allora tale  $n$ -upla è anche soluzione dell'equazione (III). Inoltre, se la  $n$ -upla  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots, \beta_n)$  è soluzione delle equazioni (II) e (III) allora tale  $n$ -upla è anche soluzione dell'equazione (I).

Quindi, se (I) e (II) sono due equazioni di un sistema lineare  $AX = B$  allora esso è equivalente al sistema lineare  $\underline{A}X = \underline{B}$  che si ottiene sostituendo l'equazione (I) con l'equazione (III).

Tenendo conto delle Osservazioni 17.23 e 17.24 si ha subito il seguente

**17.25. Lemma.** Sia  $AX = B$  un sistema lineare. Se agiamo su di esso con un numero finito di operazioni elementari, allora otteniamo un sistema lineare  $\underline{A}X = \underline{B}$  equivalente a quello iniziale.

**17.26. Osservazione.** Sia  $AX = B$  un sistema lineare. Se un'equazione del sistema è combinazione lineare di altre  $s$  equazioni del sistema, allora possiamo supporre che sia l'ultima equazione (se così non fosse possiamo effettuare uno scambio di equazioni). A questo punto, tramite  $s$  operazioni elementari del tipo (3) si può ottenere un sistema  $\underline{A}X = \underline{B}$  (equivalente a quello dato per il Lemma precedente) che ha come ultima equazione l'identità  $0 = 0$ .

Tenendo conto dell'Osservazione 17.26 si ha subito il seguente

**17.27. Corollario.** Se un'equazione di un sistema lineare è combinazione lineare di altre equazioni del sistema, allora eliminando tale equazione si ottiene un sistema equivalente al sistema dato.

**17.28. Osservazione.** Ogni operazione elementare sulle equazioni di un sistema corrisponde ad un'operazione elementare sulle righe della matrice  $C = [A|B]$  completa del sistema, e viceversa.

**17.29. Corollario.** Sia  $AX = B$  un sistema lineare. Sia  $C = [A|B]$  la matrice completa del sistema. Se la matrice  $\underline{C} = [\underline{A}|\underline{B}]$  è stata ottenuta dalla matrice  $C$  con un numero finito di operazioni elementari sulle sue righe, allora il sistema lineare  $\underline{A}X = \underline{B}$  è equivalente al sistema iniziale.

**17.30. TEOREMA.** Sia  $AX = B$  un sistema lineare **NON** normale.

**Se** tale sistema ha almeno una soluzione, **allora** esso è equivalente ad un sistema lineare normale.

**Dimostrazione.** Sia  $AX = B$  un sistema lineare non normale con  $A$  di tipo  $m \times n$  e sia  $C = [A|B]$ . Se esso ha almeno una soluzione allora (per il Teorema di Rouchè-Capelli)  $\text{rg}(C) = r = \text{rg}(A) < m$ . Quindi, tra le  $m$  righe di  $C$  ve ne sono  $r$  linearmente indipendenti. Tali  $r$  righe sono una base dello spazio delle righe di  $C$ . Per cui ognuna delle altre  $(m - r)$  si può scrivere come loro combinazione lineare. Sia  $\underline{C} = [\underline{A}|\underline{B}]$  la matrice che si ottiene da  $C$  cancellando queste  $(m - r)$ . Il sistema lineare  $\underline{A}X = \underline{B}$  (cioè quello ottenuto da quello iniziale eliminando le equazioni che sono combinazioni lineari di altre equazioni) è equivalente, per il Corollario 17.27, al sistema iniziale. Inoltre, si ha che numero righe di  $A = r = \text{rg}(A)$ . Quindi,  $\underline{A}X = \underline{B}$  è un sistema lineare normale. ■

## 18. Sistemi lineari omogenei.

**18.1. Definizione.** Sia  $AX = B$  un **sistema lineare** di  $m$  equazioni in  $n$  incognite. Se la (matrice) colonna  $B$  dei termini noti è la colonna  $\mathbf{0}$  nulla, ovvero sono nulli tutti i termini noti

$$(eq_1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$(eq_2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$(eq_3) \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \dots + a_{3n}x_n = 0$$

$$(eq_4) \quad a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \dots + a_{4n}x_n = 0$$

.....

$$(eq_m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

allora diremo che il sistema è **omogeneo** e scriveremo  $AX = \mathbf{0}$ .

**18.2. Osservazione.** E' immediato verificare che **ogni** sistema lineare **omogeneo** in  $n$  incognite ha **almeno una** soluzione. Infatti, la  $n$ -upla nulla  $(0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ , cioè la colonna  $\mathbf{0}$ , è una soluzione del sistema lineare omogeneo  $AX = \mathbf{0}$ .

**18.3. Definizione.** Sia  $AX = \mathbf{0}$  un sistema lineare omogeneo in  $n$  incognite. La sua soluzione data dalla  $n$ -upla nulla  $(0, 0, 0, 0, \dots, 0)$  viene detta **soluzione banale**. Ogni **altra** sua soluzione (quindi diversa da quella banale) viene detta **autosoluzione**.

**18.4. Esempio.** Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

E' facile verificare che la soluzione banale  $(0, 0, 0)$  è la sua unica soluzione.

**18.5. Esempio.** Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

La quaterna  $(0, 0, 0, 0)$  è la soluzione banale. La quaterna  $(1, 1, -1, 1)$  è una autosoluzione.

**18.6. Teorema.** Un sistema lineare omogeneo  $AX = \mathbf{0}$  in  $n$  incognite ha autosoluzioni se e solo se il rango della sua matrice incompleta  $A$  è minore del numero  $n$  delle incognite.

**Dimostrazione.** Sia  $A^1x_1 + A^2x_2 + A^3x_3 + A^4x_4 + \dots + A^nx_n = \mathbf{0}$ .

Il sistema ha almeno una autosoluzione  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, 0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^1\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^3\alpha_3 + A^4\alpha_4 + \dots + A^n\alpha_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  le  $n$  colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A$  ha al massimo  $s < n$  colonne linearmente indipendenti  $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = s < n \Leftrightarrow \text{rg}(A) < n \blacksquare$

**18.7. Esempio.** Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.4. Esso aveva solo la soluzione banale. Verifichiamo che il rango della sua matrice completa è uguale al numero delle sue incognite. Si ha che  $\det A = 2 \neq 0$  e, quindi,  $\text{rg}(A) = 3 =$  numero incognite.

**18.8. Esempio.** Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.5. Esso aveva almeno una autosoluzione. Verifichiamo che il rango della sua matrice completa è minore del numero delle sue incognite. Col metodo di Gauss-Jordan applicato alla matrice  $A$  si trova una matrice a scalino  $A'$  avente una riga nulla. Quindi,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3 < 4 =$  numero incognite.

Tenendo conto che se  $A$  è di tipo  $m \times n$ , allora  $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$  si ha il seguente

**18.9. Corollario.** Se in un sistema lineare omogeneo il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, allora esso ha sicuramente autosoluzioni.

**18.10. Esempio.** Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Poiché il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, tale sistema ha autosoluzioni.

Infatti, si può verificare che  $(2, -1, 1, 0, 0)$ ,  $(8, -2, 0, 1, 0)$  e  $(0, 2, -4, 1, 0)$  sono autosoluzioni.

Poiché una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se è non singolare si ha il seguente

**18.11. Corollario. (IMPORTANTE)** Un sistema lineare omogeneo quadrato ha autosoluzioni se e solo se la sua matrice incompleta è singolare (cioè il suo determinante è uguale a zero).

**18.12. Esempio.** Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che  $\det A = 0$  (e quindi il sistema ha autosoluzioni) ed è facile verificare che la terna  $(2, 1, -1)$  è una sua autosoluzione.

**18.13. Tabella.** Sia  $AX = \mathbf{0}$  un sistema lineare omogeneo con  $A$  di tipo  $m \times n$ . Si ha che:

- $m < n \rightarrow \infty^{n-rg(A)}$  soluzioni (la soluzione banale e infinite autosoluzioni)
- $m = n \rightarrow \begin{cases} \det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{la soluzione banale è l'unica soluzione} \\ \det(A) = 0 \Rightarrow \infty^{n-rg(A)} \text{ soluzioni (la soluzione banale e infinite autosoluzioni)} \end{cases}$
- $m > n \rightarrow \begin{cases} n = rg(A) \Rightarrow \text{la soluzione banale è l'unica soluzione} \\ n > rg(A) \Rightarrow \infty^{n-rg(A)} \text{ soluzioni (la soluzione banale e infinite autosoluzioni)} \end{cases}$

**18.14. Definizione.** Con  $\mathcal{S}_{A|B}$  indicheremo l'insieme delle soluzioni del sistema lineare  $AX = B$ .

Se il sistema ha  $n$  incognite, allora  $\mathcal{S}_{A|B}$  è un sottoinsieme (anche vuoto) di  $\mathbb{R}^n$ .

**18.15. Teorema.** Se  $AX = \mathbf{0}$  un sistema lineare omogeneo in  $n$  incognite, allora  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} \leq \mathbb{R}^n$ .

Ovvero l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale.

**Dimostrazione.** L'insieme  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$  è non vuoto poiché la  $n$ -upla nulla  $\mathbf{0}$  è una soluzione di  $AX = \mathbf{0}$ .

Proviamo ora che  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$  è chiuso rispetto alla somma di due  $n$ -uple, cioè che se  $Y$  e  $Z$  sono due  $n$ -uple di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$  allora anche  $(Y+Z)$  è una  $n$ -upla di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ .

Se  $Y$  e  $Z$  sono due  $n$ -uple di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$  allora  $AY = \mathbf{0}$  e  $AZ = \mathbf{0}$  sono due identità. Sommandole membro a membro si ottiene l'identità  $AY+AZ = \mathbf{0} + \mathbf{0}$  da cui l'identità  $A(Y+Z) = \mathbf{0}$ . Per cui  $(Y+Z)$  è una soluzione di  $AX = \mathbf{0}$  e, quindi,  $(Y+Z)$  è una  $n$ -upla di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ .

Infine, proviamo che  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$  è chiuso rispetto al prodotto di un numero reale (scalare) per una  $n$ -upla, cioè se  $\alpha$  è un numero reale e  $Y$  è una  $n$ -upla di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$  allora anche  $(\alpha Y)$  è una  $n$ -upla di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ .

Se  $Y$  è una  $n$ -upla di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$  allora  $AY = \mathbf{0}$  è un'identità. Moltiplicando entrambe i membri di tale identità per  $\alpha$  si ottiene l'identità  $\alpha(AY) = \alpha\mathbf{0}$  da cui l'identità  $A(\alpha Y) = \mathbf{0}$ . Per cui  $\alpha Y$  è una soluzione di  $AX = \mathbf{0}$  e, quindi,  $(\alpha Y)$  è una  $n$ -upla di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ . ■

Omettiamo la dimostrazione del seguente

**18.16. Teorema.** Se  $AX = \mathbf{0}$  è un sistema lineare omogeneo in  $\mathbf{n}$  incognite, allora

$$\dim \mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} = \mathbf{n} - \text{rg}(A).$$

Verifichiamo quanto affermato nel Teorema 18.16 con tre esempi.

**18.17. Esempio.** Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.5

$$(\heartsuit) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice  $A$  si ottiene la matrice a scalino

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(H) = 3$ .

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ( $\heartsuit$ ) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit) \begin{cases} x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 - 12x_3 - 13x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché le prime tre colonne di  $A'$  sono sicuramente linearmente indipendenti, portando l'incognita  $x_4$  a secondo membro e ponendo  $x_4 = \beta$ , otteniamo il seguente sistema di Cramer

$$(\spadesuit) \begin{cases} x_1 + 8x_3 = -7\beta \\ x_2 - 12x_3 = 13\beta \\ x_3 = -\beta \end{cases} \quad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ( $\spadesuit$ ) è la terna  $(x_1, x_2, x_3) = (\beta, \beta, -\beta)$ . Per cui, per ogni valore reale di  $\beta$  la quaterna  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\beta, \beta, -\beta, \beta)$  è una soluzione del sistema ( $\clubsuit$ ) e, quindi, del sistema ( $\heartsuit$ ).

Per cui il sottospazio delle soluzioni di ( $\heartsuit$ ) è  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} = \{(\beta, \beta, -\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ . Inoltre, poiché  $(\beta, \beta, -\beta, \beta) = \beta(1, 1, -1, 1)$ , la quaterna  $(1, 1, -1, 1)$  è un generatore del sottospazio  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ . Essendo  $(1, 1, -1, 1)$  anche linearmente indipendente (è diversa dalla quaterna nulla) si ha che la quaterna  $(1, 1, -1, 1)$  è una base di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ . Per cui  $\dim \mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} = 1 = 4 - 3 = \mathbf{n} - \text{rg}(A)$ .

**18.18. Esempio.** Si consideri il sistema lineare omogeneo dell'Esempio 18.10

$$(\heartsuit) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Quindi,  $\text{rg}(A) = \text{rg}(H) = 3$ .

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ( $\heartsuit$ ) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ 13x_5 = 0 \end{cases} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Poiché le prima, la seconda e la quinta colonna di  $A'$  sono sicuramente linearmente indipendenti, portando le incognite  $x_3$  e  $x_4$  a secondo membro e ponendo  $x_3 = \alpha$  e  $x_4 = \beta$ , otteniamo il seguente sistema di Cramer

$$(\spadesuit) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_5 = -2\alpha \\ x_2 + 7x_5 = -\alpha - 2\beta \\ 13x_5 = 0 \end{cases} \quad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ( $\spadesuit$ ) è la terna  $(x_1, x_2, x_3) = (2\alpha + 8\beta, -\alpha - 2\beta, 0)$ . Per cui, per ogni valore reale di  $\alpha$  e  $\beta$  la 5-upla  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2\alpha + 8\beta, -\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, 0)$  è una soluzione del sistema ( $\clubsuit$ ) e, quindi, del sistema ( $\heartsuit$ ).

Per cui il sottospazio delle soluzioni di ( $\heartsuit$ ) è  $S_{A|0} = \{(2\alpha + 8\beta, -\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, 0) \in \mathbb{R}^5 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .

Inoltre, poiché  $(2\alpha + 8\beta, -\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, 0) = \alpha(2, -1, 1, 0, 0) + \beta(8, -2, 0, 1, 0)$ , le 5-uple  $(2, -1, 1, 0, 0)$  e  $(8, -2, 0, 1, 0)$  sono generatori del sottospazio  $S_{A|0}$ .

Essendo  $(2, -1, 1, 0, 0)$  e  $(8, -2, 0, 1, 0)$  anche linearmente indipendenti (si verifica subito che non sono proporzionali tra loro) si ha che  $B = ((2, -1, 1, 0, 0), (8, -2, 0, 1, 0))$  è una base di  $S_{A|0}$ .

Per cui  $\dim S_{A|0} = 2 = 5 - 3 = n - \text{rg}(A)$ .

**18.19. Esempio.** Si consideri il sistema lineare omogeneo seguente

$$(\heartsuit) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 0 \\ 8x_1 - 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 0 \\ 10x_1 - 12x_2 + 17x_3 + 12x_4 - 11x_5 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 10x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 0 \\ 14x_1 - 17x_2 + 24x_3 + 15x_4 - 19x_5 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & -5 & 7 & 3 & -8 \\ 8 & -9 & 13 & 15 & 2 \\ 10 & -12 & 17 & 12 & -11 \\ 6 & -7 & 10 & 9 & -3 \\ 14 & -17 & 24 & 15 & -19 \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan alla matrice A si ottiene la matrice a scalino

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Quindi, } \text{rg}(A) = \text{rg}(H) = 2.$$

Inoltre, il sistema lineare omogeneo iniziale ( $\heartsuit$ ) è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$(\clubsuit) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 9x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases} \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Poiché le prima e la seconda colonna di  $A'$  sono linearmente indipendenti, portando le incognite  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  a secondo membro e ponendo  $x_3 = 2\alpha$ ,  $x_4 = \beta$  e  $x_5 = 2\gamma$ , otteniamo il sistema di Cramer

$$(\spadesuit) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -6\alpha - 6\beta - 10\gamma \\ x_2 = +2\alpha - 9\beta - 36\gamma \end{cases} \quad A'' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'unica soluzione di ( $\spadesuit$ ) è la coppia  $(x_1, x_2) = (-\alpha - 12\beta - 41\gamma, 2\alpha - 9\beta - 36\gamma)$ . Per cui, per ogni valore reale di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  la 5-upla  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\alpha - 12\beta - 41\gamma, 2\alpha - 9\beta - 36\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$  è una soluzione del sistema ( $\clubsuit$ ) e, quindi, del sistema ( $\heartsuit$ ). Per cui il sottospazio delle soluzioni di ( $\heartsuit$ ) è

$$\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} = \{(-\alpha - 12\beta - 41\gamma, 2\alpha - 9\beta - 36\gamma, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^5 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Inoltre, poiché

$$(-\alpha - 12\beta - 41\gamma, 2\alpha - 9\beta - 36\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha(-1, 2, 1, 0, 0) + \beta(-12, -9, 0, 1, 0) + \gamma(-41, -36, 0, 0, 1)$$

le 5-uple  $(-1, 2, 1, 0, 0)$ ,  $(-12, -9, 0, 1, 0)$  e  $(-41, -36, 0, 0, 1)$  sono generatori del sottospazio  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ .

Inoltre, la matrice  $\left[ \begin{array}{cc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ -41 & -36 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$  che ha come righe quelle tre 5-uple ha sicuramente

rango 3 poiché contiene come sottomatrice la matrice unitaria di ordine 3. Quindi, quelle tre 5-uple sono linearmente indipendenti e formano una base di  $\mathcal{S}_{A|\mathbf{0}}$ . Per cui  $\dim \mathcal{S}_{A|\mathbf{0}} = 3 = 5 - 2 = n - \text{rg}(A)$ .

La proprietà vista nel Teorema 18.15 non vale per i sistemi lineari non omogenei. Infatti,

**18.17. Osservazione.** L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare **non** omogeneo  $AX = B$  in  $n$  incognite **non** è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ .

**Dimostrazione.** Se  $AX = B$  è un sistema lineare **non** omogeneo, allora  $B \neq \mathbf{0}$ . Poiché  $A\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq B$ , la  $n$ -upla nulla  $\mathbf{0}$  non è una soluzione del sistema e, quindi, non appartiene a  $\mathcal{S}_{A|B}$ . Poiché l'elemento neutro  $\mathbf{0}$  rispetto alla somma non appartiene a  $\mathcal{S}_{A|B}$ , quest'ultimo non è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ . ■

**18.18. Definizione.** Se  $AX = B$  è un sistema lineare **non** omogeneo (cioè  $B \neq \mathbf{0}$ ), allora il sistema lineare omogeneo  $AX = \mathbf{0}$  (cioè avente la stessa matrice  $A$  dei coefficienti) viene detto **sistema omogeneo associato** al sistema lineare  $AX = B$ .

**18.19. Teorema.** Sia  $AX = B$  un sistema lineare **non** omogeneo in  $n$  incognite avente **almeno una** soluzione e sia  $Y_p$  una **qualsunque** di esse (ovvero  $AY_p = B$  è un'identità).

Una  $n$ -upla  $Z \in \mathbb{R}^n$  è una soluzione del sistema  $AX = B$

$\Downarrow \Uparrow$

Esiste una  $n$ -upla  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  soluzione del sistema omogeneo associato  $AX = \mathbf{0}$  tale che  $Z = Y_p + X_0$ .

**Dimostrazione.**

( $\Downarrow$ ) Supponiamo che la  $n$ -upla  $Z \in \mathbb{R}^n$  sia una soluzione del sistema  $AX = B$ . Per cui  $AZ = B$  è un'identità. Sottraendo membro a membro da tale identità l'identità  $AY_p = B$  otteniamo l'identità  $AZ - AY_p = B - B$  da cui l'identità  $A(Z - Y_p) = \mathbf{0}$ . Quindi, la  $n$ -upla  $(Z - Y_p)$  è una soluzione del sistema omogeneo associato  $AX = \mathbf{0}$ . Ponendo  $X_0 := (Z - Y_p)$ , abbiamo che esiste una  $n$ -upla  $X_0$  soluzione del sistema lineare omogeneo associato tale che  $Z = Y_p + (Z - Y_p) = Y_p + X_0$ .

( $\Uparrow$ ) Sia ora  $Z := Y_p + X_0$  con  $X_0$  una soluzione del sistema omogeneo associato  $AX = \mathbf{0}$ . Per cui  $AX_0 = \mathbf{0}$  è un'identità. Sommando membro a membro a tale identità l'identità  $AY_p = B$  otteniamo l'identità  $AX_0 + AY_p = \mathbf{0} + B$  da cui l'identità  $A(Y_p + X_0) = B$ . Quindi, la  $n$ -upla  $Z = (Y_p + X_0)$  è una soluzione del sistema  $AX = B$ . ■