19. Autovalori e autovettori di una matrice quadrata.

19.1 Osservazione. Se A è una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n e H è una matrice (colonna) ad elementi reali di tipo n×1 (cioè una n-upla ordinata di numeri reali), allora la matrice AH è una matrice (colonna) ad elementi reali di tipo n×1, cioè AH è dello **stesso tipo** di H.

19.2 Esempio. Se A è quadrata di ordine 3 e H, K sono di tipo 3×1 allora AH, AK sono di tipo 3×1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad AH = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad AK = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

<u>Si osservi</u> che non esiste un numero reale β tale che AH = βH, mentre AK = 7K.

19.3 Osservazione. Se A è una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n e se **0** è la matrice (colonna) <u>nulla</u> di tipo n×1 allora **per ogni numero** reale β si ha che A**0** = **0** = β**0**.

19.4. Definizione. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n. Se esistono un <u>numero reale</u> β e una matrice (<u>colonna</u>) ad elementi reali <u>non</u> <u>nulla</u> H di tipo n×1 tali che AH = βH allora diremo che β è un ***autovalore*** di A e che H è un ***autovettore*** di A relativo all'autovalore β.
Quindi, H ≠ **0** è un autovettore di A se e solo se AH è un multiplo di H.

19.5 Esempio. Consideriamo ancora la matrice dell'Esempio 19.2 e i seguenti vettori colonna

$$K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad H_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già visto che AK = 7K. Inoltre, è facile verificare che $AH_2 = 0H_2$ e $AH_3 = H_3$. Quindi,

- K è un autovettore di A relativo all'autovalore $\beta_1 = 7$;
- H_2 è un autovettore di A relativo all'autovalore $\beta_2 = 0$;
- H_3 è un autovettore di A relativo all'autovalore $\beta_3 = 1$.

La colonna H dell'Esempio 19.2 non è un autovettore di A poiché AH non è un multiplo di H.

19.6. Osservazione. Si noti che, per definizione, un autovettore è un vettore **<u>non</u>** **<u>nullo</u>** mentre, come abbiamo visto nell'Esempio 19.5, un autovalore può anche essere uguale a zero.

19.7. Lemma. Se A è una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n, allora $\det(A - \lambda I_n)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado n nella indeterminata λ.

Inoltre, il suo termine di **grado n** è $(-1)^n\lambda^n$ mentre quello di **grado zero** è $\det A$.

Dimostrazione. (*per induzione sull'ordine n della matrice A*). Se n = 1 allora $A = [a_{11}]$ e

$$\det(A - \lambda I_1) = \det[a_{11} - \lambda] = a_{11} - \lambda = -\lambda + a_{11} = (-1)^1 \lambda^1 + \det A$$

Quindi, per n = 1 (base induttiva) la tesi è vera.

Ora, (ipotesi induttiva) supponiamo che la tesi sia vera per (n – 1) proviamo la tesi per n.

Osserviamo che se $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots.., a_{1n}$ sono gli elementi della prima riga di A allora gli elementi della prima riga di $(A - \lambda I_n)$ sono $(a_{11} - \lambda), a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots.., a_{1n}$

Sviluppando il determinante di $(A - \lambda I_n)$ secondo la sua prima riga si ottiene

$$\det(A - \lambda I_n) := (a_{11} - \lambda)\det(A - \lambda I_n)_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$$

$$\det(A - \lambda I_n) := -\lambda\det(A - \lambda I_n)_{11} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$$

Poichè per ogni j = 1, 2, 3, 4, …, n la matrice $(A - \lambda I_n)_{1j}$ è quadrata di ordine (n – 1), per l'ipotesi induttiva, $\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ è un polinomio di grado (n – 1). Quindi, per ogni j = 1, 2, 3, …, n, il polinomio $a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ ha grado minore o uguale a (n – 1). Per cui $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ è un polinomio di grado minore o uguale a (n – 1). Invece, $(-\lambda)\det(A - \lambda I_n)_{11}$ è un polinomio di grado n avente $(-\lambda)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} = (-1)^n\lambda^n$ come suo termine di grado n. Quindi, il polinomio $\det(A - \lambda I_n) = (-\lambda)\det(A - \lambda I_n)_{11} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det(A - \lambda I_n)_{1j}$ è un polinomio di grado n avente $(-1)^n\lambda^n$ come suo termine di grado n. Il termine di grado zero del polinomio $\det(A - \lambda I_n)$ è uguale al valore detA assunto da tale polinomio quando $\lambda = 0$. ■

Tenendo conto del Lemma 19.7 diamo la seguente

19.8 Definizione. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n. Il determinante della matrice $(A - \lambda I_n)$ viene detto ***polinomio caratteristico*** di A e viene indicato con il simbolo $p_A(\lambda)$.

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

19.9 Esempio. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda I_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\qquad (A - \lambda I_2) = \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 6)$

19.10 Esempio. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda I_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\qquad (A - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} (3-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 6 & 0 & (4-\lambda) \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 1)(7 - \lambda)$

19.11 Esempio. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda I_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\qquad (A - \lambda I_4) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 3)$

19.12. Teorema. Sia A una matrice quadrata ad elementi reali di ordine n. Un numero reale β è un autovalore di A se e solo se esso è una radice del polinomio caratteristico di A, cioè $p_A(\beta) = 0$.

Inoltre, gli autovettori di A relativi all'autovalore β sono tutte e sole le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo quadrato $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Un numero reale β è un autovalore di A $\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \;:\; AH = \beta H$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \;:\; AH = \beta(I_n H)$ $\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \;:\; AH = (\beta I_n)H$ $\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \;:\; AH - (\beta I_n)H = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists H \neq \mathbf{0} \;:\; (A - \beta I_n)H = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ H è un'autosoluzione del sistema $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ il sistema lineare omogeneo **quadrato** $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$ ha autosluzioni $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\det(A - \beta I_n) = 0$ $\Leftrightarrow$ $p_A(\beta) = 0$ $\Leftrightarrow$ β è una radice del polinomio caratteristico di A. ■

19.13 Esempio. Gli autovalori di $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$.

19.14 Esempio. Gli autovalori di $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$.

19.15 Esempio. Gli autovalori di $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = 3$.

19.16 Esercizi Trovare i polinomi caratteristici e gli autovalori delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad p_C(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = (7 - \lambda)(\lambda - 1)^2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad p_D(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_E(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_F(\lambda) = (\lambda - 3)^4$$

19.17 Esercizi Trovare gli autovettori delle matrici precedenti.

A $\rightarrow$ $\lambda_1 = 3$, $H_1 = h\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 1$, $H_2 = h\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_3 = -1$, $H_3 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall h \in R-\{0\}$

B $\rightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $H_1 = h\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 4$, $H_2 = h\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall h \in R-\{0\}$

C $\rightarrow$ $\lambda_1 = 7$, $H_1 = h\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\forall h \in R-\{0\}$ $\lambda_2 = 1$, $H_2 = h\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall h,k \in R^2-\{(0,0)\}$

D $\rightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $H_1 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2$, $H_2 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall h \in R-\{0\}$

E $\rightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $H_1 = h\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2$, $H_2 = h\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall h,k \in R^2-\{(0,0)\}$

F $\rightarrow$ $\lambda_1 = 3$, $H_1 = h\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\forall h,k \in R^2-\{(0,0)\}$

RICORDIAMO CHE se $p(x) \in R[x]$ è un polinomio in x a coefficienti reali di grado n, allora

- un numero reale α è una sua radice (cioè $p(\alpha) = 0$) se e solo se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$;
- α è una sua *radice di molteplicità h* $\leq$ n se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^h$ ma non per $(x - \alpha)^{h+1}$;
- la somma delle molteplicità delle radici **reali** a due a due distinte tra loro è minore o uguale a n;
- se n è dispari allora $p(x)$ ha almeno una radice reale.

19.18 Esempio. Si considerino i seguenti polinomi di R[x]

- $p(x) = (x - 2)(x + 1)^2(x + 4)^5(x - 3)^7$
- $q(x) = (x + 1)^3(x - 5)^4(x - 4)^6(x^2 + 1)$
- $r(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 3x + 3)(x^2 + x - 1)$
- Le radici **reali** di $p(x)$ a due a due distinte tra loro sono $2, -1, -4$ e 3. Le loro molteplicità sono rispettivamente 1, 2, 5, e 7. La somma delle loro molteplicità è 15 che è uguale al grado 15 di $p(x)$.
- Le radici **reali** di $q(x)$ a due a due distinte tra loro sono $-1, 5$ e 4. Le loro molteplicità sono rispettivamente 3, 4, e 6. La somma delle loro molteplicità è 13 che è minore del grado 15 di $q(x)$.
- Il polinomio $r(x)$ **non** ha radici reali.

Tenendo conto di quanto appena ricordato diamo la seguente

19.19 Definizione. Diremo ***molteplicità algebrica di un autovalore*** β, e la indicheremo col simbolo $m_a(\beta)$, di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n la molteplicità di β come radice del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ della matrice A.

19.20 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.16

$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ $\qquad m_a(3) = m_a(1) = m_a(-1) = 1$

$p_B(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$ $\qquad m_a(4) = 1 \qquad m_a(2) = 2$

$p_C(\lambda) = (7 - \lambda)(\lambda - 1)^2$ $\qquad m_a(7) = 1 \qquad m_a(1) = 2$

$p_D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$ $\qquad m_a(0) = m_a(2) = 2$

$p_E(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$ $\qquad m_a(0) = m_a(2) = 2$

$p_F(\lambda) = (\lambda - 3)^4$ $\qquad m_a(3) = 4$

19.21 Osservazione. Se A è una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente s autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ a due a due distinti tra loro (cioè $i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$), allora $p_A(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - \lambda_1)^{m_a(\lambda_1)}(\lambda - \lambda_2)^{m_a(\lambda_2)}(\lambda - \lambda_3)^{m_a(\lambda_3)} \ldots\ldots(\lambda - \lambda_s)^{m_a(\lambda_s)}$. Quindi,

$$m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + m_a(\lambda_3) + \ldots\ldots + m_a(\lambda_s) \leq n$$

valendo il segno di **uguaglianza** se e solo se le radici di $p_A(\lambda)$ sono **tutte** reali.

19.22 Esempio. Si considerino i polinomi dell'Esempio 19.20

$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$	$m_a(3) + m_a(1) + m_a(-1) = 3 =$ ordine di A
$p_B(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda - 2)^2$	$m_a(4) + m_a(2) = 3 =$ ordine di B
$p_C(\lambda) = (7 - \lambda)(\lambda - 1)^2$	$m_a(7) + m_a(1) = 3 =$ ordine di C
$p_D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$	$m_a(0) + m_a(2) = 4 =$ ordine di D
$p_E(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$	$m_a(0) + m_a(2) = 4 =$ ordine di E
$p_F(\lambda) = (\lambda - 3)^4$	$m_a(3) = 4 =$ ordine di F

Si noti che in tutti i precedenti casi vale il segno di uguaglianza, in quanto ognuno dei polinomi caratteristici ha solo radici reali.

Nel Teorema 19.12 abbiamo visto che gli autovettori relativi ad un autovalore β di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n sono tutte e sole le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$. Tenendo conto del fatto l'insieme delle soluzioni di tale sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale (sottospazio di R^n) diamo la seguente

19.23 Definizione. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n e sia β un suo autovalore. Lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \beta I_n)X = \mathbf{0}$ viene detto ***autospazio*** relativo all'autovalore β e viene indicato col simbolo $E(\beta)$.

19.24 Osservazione. Se $E(\beta)$ è un autospazio della matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora un vettore X di R^n appartiene ad $E(\beta)$ se e solo se X è il vettore nullo o X è un autovettore di A relativo all'autovalore β.

$$E(\beta) = \{\mathbf{0}\} \cup \{\text{autovettori relativi all'autovalore } \beta\}$$

Ricordando il Teorema 18.16 si ha subito la seguente

19.25 Osservazione. Se $E(\beta)$ è un autospazio della matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora $\dim E(\beta) = n - rg(A - \beta I_n)$. Inoltre, poiché $\det(A - \beta I_n) = 0$ si ha che $rg(A - \beta I_n) < n$. Quindi

$$\dim E(\beta) = n - rg(A - \beta I_n) \geq 1$$

Tenendo conto dell'Osservazione 19.25 precedente diamo la seguente

19.26 Definizione. Se β è un autovalore di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora la dimensione dell'autospazio $E(\beta)$ viene detta ***molteplicità geometrica dell'autovalore*** β e viene indicata col simbolo $m_g(\beta)$. Quindi,

$$m_g(\beta) := \dim E(\beta) = n - rg(A - \beta I_n) \geq 1$$

Omettiamo la dimostrazione del seguente

19.27. Teorema. Se β è un autovalore della matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n, allora la sua molteplicità geometrica è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica, cioè

$$1 \leq m_g(\beta) \leq m_a(\beta)$$

Conseguenza <u>immediata</u> del Teorema 19.27 è il seguente

19.28 Corollario. Sia β un autovalore di una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n.
Se $m_a(\beta) = 1$ allora $m_g(\beta) = 1$.

19.29 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.17.

Matrice A	$m_a(3) = m_a(1) = m_a(-1) = 1 \;\Rightarrow\; m_g(3) = m_g(1) = m_g(-1) = 1$	
Matrice B	$m_a(4) = 1 \;\Rightarrow\; m_g(4) = 1$	$m_g(2) = 1 < 2 = m_a(2)$
Matrice C	$m_a(7) = 1 \;\Rightarrow\; m_g(7) = 1$	$m_g(1) = 2 = m_a(1)$
Matrice D	$m_g(0) = 1 < 2 = m_a(0)$	$m_g(2) = 1 < 2 = m_a(2)$
Matrice E	$m_g(0) = 2 = m_a(0)$	$m_g(2) = 2 = m_a(2)$
Matrice F	$m_g(3) = 2 < 4 = m_a(3)$	

Tenendo conto del Teorema 19.27 e dell'Osservazione 19.21 si ha subito il seguente

19.30 Corollario. Se A è una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente s autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ a due a due distinti tra loro (cioè $i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$), allora

$$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + m_g(\lambda_3) + \ldots.. + m_g(\lambda_s) \leq n$$

19.31 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.17.

Tenendo conto anche di quanto già visto nell'Esempio 19.22 si ha che

Matrice A $\quad m_g(3) + m_g(1) + m_g(-1) = 1 + 1 + 1 = 3 =$ ordine di A

Matrice B $\quad m_g(4) + m_g(2) = 1 + 1 = 2 < 3 =$ ordine di B

Matrice C $\quad m_g(7) + m_g(1) = 1 + 2 = 3 =$ ordine di C

Matrice D $\quad m_g(0) + m_g(2) = 2 < 4 =$ ordine di D

Matrice E $\quad m_g(0) + m_g(2) = 2 + 2 = 4 =$ ordine di E

Matrice F $\quad m_g(3) = 2 < 4 =$ ordine di F

Relativamente all'intersezione di due autospazi si ha il seguente

19.32. Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n.

Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori distinti ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) di A, allora $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. Ovviamente, $\mathbf{0} \in E(\lambda_1)$ e $\mathbf{0} \in E(\lambda_2)$, da cui $\mathbf{0} \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$.

Se esistesse un autovettore $H \neq \mathbf{0}$ tale che $H \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$ allora si avrebbero le due identità $AH = \lambda_1 H$ et $AH = \lambda_2 H$. Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda si otterrebbe l'identità $(\lambda_2 - \lambda_1)H = \mathbf{0}$. Poiché $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$, per la legge di annullamento del prodotto di uno scalare per un vettore si avrebbe che $H = \mathbf{0}$. Ma ciò è assurdo. Quindi, $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{\mathbf{0}\}$. ■

19.33. Lemma. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ s autovalori di A a due a due distinti tra loro, cioè $i \neq j \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

Se $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}, H_s$ sono s autovettori di A relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ rispettivamente, allora gli autovettori $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}, H_s$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (per induzione sul numero s di autovalori a due a due distinti tra loro)

Se s = 1 allora l'autovettore H_1 è certamente linearmente indipendente in quanto diverso dal vettore nullo. Quindi, per s = 1 la tesi è vera (base induttiva). Ora, nell'ipotesi (induttiva) che la tesi sia vera per (s – 1) proviamo la tesi per s. A tal fine dobbiamo provare che se

(♥) $$\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \ldots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s = \mathbf{0}$$

allora deve necessariamente essere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{s-1} = \alpha_s = 0$.

Moltiplicando entrambe i membri dell'identità (♥) a sinistra per la matrice A otteniamo le identità

$$A(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \ldots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s) = A\mathbf{0}$$

$$A(\alpha_1 H_1) + A(\alpha_2 H_2) + A(\alpha_3 H_3) + \ldots + A(\alpha_{s-1} H_{s-1}) + A(\alpha_s H_s) = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1(AH_1) + \alpha_2(AH_2) + \alpha_3(AH_3) + \ldots + \alpha_{s-1}(AH_{s-1}) + \alpha_s(AH_s) = \mathbf{0}$$

Poiché $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}, H_s$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ si ha

$$\alpha_1(\lambda_1 H_1) + \alpha_2(\lambda_2 H_2) + \alpha_3(\lambda_3 H_3) + \ldots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} H_{s-1}) + \alpha_s(\lambda_s H_s) = \mathbf{0}$$

(♣) $$(\alpha_1\lambda_1)H_1 + (\alpha_2\lambda_2)H_2 + (\alpha_3\lambda_3)H_3 + \ldots + (\alpha_{s-1}\lambda_{s-1})H_{s-1} + (\alpha_s\lambda_s)H_s = \mathbf{0}$$

Moltiplicando entrambe i membri dell'identità (♥) per lo scalare λ_s otteniamo l'identità

$$\lambda_s(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 + \ldots + \alpha_{s-1} H_{s-1} + \alpha_s H_s) = \lambda_s\mathbf{0}$$

$$\lambda_s(\alpha_1 H_1) + \lambda_s(\alpha_2 H_2) + \lambda_s(\alpha_3 H_3) + \ldots + \lambda_s(\alpha_{s-1} H_{s-1}) + \lambda_s(\alpha_s H_s) = \mathbf{0}$$

(♠) $$(\alpha_1\lambda_s)H_1 + (\alpha_2\lambda_s)H_2 + (\alpha_3\lambda_s)H_3 + \ldots + (\alpha_{s-1}\lambda_s)H_{s-1} + (\alpha_s\lambda_s)H_s = \mathbf{0}$$

Sottraendo membro a membro l'identità (♠) dall'identità (♣) otteniamo l'identità

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s)H_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_s)H_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_s)H_3 + \ldots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)H_{s-1} = \mathbf{0}$$

Poiché, per ipotesi, gli (s – 1) autovettori $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{s-1}$, sono linearmente indipendenti si ha

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_s) = \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_s) = \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0$$

Ma, per ogni $h \neq s$ è $(\lambda_h - \lambda_s) \neq 0$, quindi ciò accade (se e) solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$.

Sostituendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$ nella (♥) si ottiene l'identità $\alpha_s H_s = \mathbf{0}$. Essendo $H_s \neq \mathbf{0}$ (poiché H_s è un autovettore), per la legge di annullamento del prodotto di uno scalare per un vettore si ha che deve necessariamente essere $\alpha_s = 0$. ■

Come **immediata** conseguenza del Lemma 19.33 si ha il seguente

19.34 Corollario. Se A è una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente n autovalori a due a due distinti tra loro, allora esistono n autovettori di A linearmente indipendenti. Quindi, in tal caso esiste sicuramente una **base di** R^n formata da **autovettori** della matrice A.

Tenendo conto del Lemma 19.33 si prova il seguente

19.35 Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n.
Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ s autovalori di A a due a due distinti tra loro, cioè $i \neq j \iff \lambda_i \neq \lambda_j$.
Se per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ $H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}, \ldots, H_{im_i}$ sono m_i autovettori relativi all'autovalore λ_i tra loro linearmente indipendenti, allora gli autovettori
$H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{1m_1}, H_{21}, H_{22}, \ldots, H_{2m_2}, H_{31}, H_{32}, \ldots, H_{3m_3}, \ldots, H_{s1}, H_{s2}, \ldots, H_{sm_s}$
sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Considerata una combinazione lineare di tutti gli autovettori
$H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{1m_1}, H_{21}, H_{22}, \ldots, H_{2m_2}, H_{31}, H_{32}, \ldots, H_{3m_3}, \ldots, H_{s1}, H_{s2}, \ldots, H_{sm_s}$
si provi che **se** essa ha come risultato il vettore nullo, **allora** tutti i suoi coefficienti sono nulli.

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{i=1}^{s} (\alpha_{i1}H_{i1} + \alpha_{i2}H_{i2} + \alpha_{i3}H_{i3} + \ldots + \alpha_{im_i}H_{im_i}) = \mathbf{0}$$

Per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ poniamo $K_i = (\alpha_{i1}H_{i1} + \alpha_{i2}H_{i2} + \alpha_{i3}H_{i3} + \ldots + \alpha_{im_i}H_{im_i})$.

Poiché $H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}, \ldots, H_{im_i} \in E(\lambda_i)$ si ha che $K_i \in E(\lambda_i)$ e, dalla ($\heartsuit$), che

$$(\clubsuit) \qquad \sum_{i=1}^{s} K_i = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_s = \mathbf{0}$$

Sia $J = \{j \in \{1, 2, 3, \ldots, s\} \mid K_j \neq \mathbf{0}\}$. **Se fosse** $J \neq \varnothing$ allora per ogni $j \in J$ (per l'Osservazione 19.24) K_j sarebbe un autovettore relativo all'autovalore λ_j. Da ($\clubsuit$) si avrebbe $\sum_{j\in J} K_j = \mathbf{0}$. Quest'ultima sarebbe una combinazione lineare (con tutti i coefficienti uguali a uno) di autovettori linearmente indipendenti (per il Lemma 19.33) avente come risultato il vettore nullo. Essendo ciò un **assurdo**, si ha che $J = \varnothing$, cioè per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ è $K_i = \mathbf{0}$.

Quindi, per ogni $i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$ è

$$\alpha_{i1}H_{i1} + \alpha_{i2}H_{i2} + \alpha_{i3}H_{i3} + \ldots + \alpha_{im_i}H_{im_i} = \mathbf{0}$$

Poiché tali autovettori sono, per ipotesi, linearmente indipendenti, si ha che

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, s\} \qquad \alpha_{i1} = \alpha_{i2} = \alpha_{i3} = \ldots = \alpha_{im_i} = 0. \quad \blacksquare$$

Tenendo conto del Corollario 19.30 dal Teorema 19.35 si ha subito il seguente

19.36 Corollario. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n. Esiste una base di R^n formata da autovettori di A se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale al suo ordine n.

Tenendo conto del Teorema 19.27 e dell'Osservazione 19.21 si ha il seguente

19.37 Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n. Esiste una **base di** R^n formata da **autovettori** di A se e solo se sono soddisfatte entrambe le condizioni seguenti:
(1) le radici del polinomio caratteristico di A sono **tutte** reali (cioè non ci sono radici complesse);
(2) per ogni autovalore la sua molteplicità algebrica è **uguale** alla sua molteplicità geometrica.

19.38 Esempio. Si considerino le matrici dell'Esercizio 19.17.
Tenendo conto di quanto già visto nell'Esempio 19.31 si ha che

- ((2, 3, –1), (1, –1, 0), (0, 1, –1)) è una base di R^3 formata da autovettori di A;
- **NON** esiste una base di R^3 formata da autovettori di B;
- ((1, 2, 3), (1, 0, –1), (0, 1, –1)) è una base di R^3 formata da autovettori di C;
- **NON** esiste una base di R^4 formata da autovettori di D;
- ((–2, 1, 0, 0), (–3, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, –1, 0, 1)) è una base di R^4 formata da autovettori di E;
- **NON** esiste una base di R^4 formata da autovettori di F;

Relativamente ad una matrice avente un solo autovalore reale (come la matrice F dell'Esempio 19.38) possiamo provare il seguente

19.39 Teorema. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n avente **un solo** autovalore β. Esiste una base di R^n formata da autovettori di A se e solo se $A = \beta I_n$.

Dimostrazione. Esiste una base di R^n formata da autovettori di A $\Leftrightarrow$ se $m_g(\beta) = n$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $n - rg(A - \beta I_n) = n$ $\Leftrightarrow$ $rg(A - \beta I_n) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(A - \beta I_n)$ = matrice nulla $\Leftrightarrow$ $A = \beta I_n$ ■

20. Diagonalizzazione di una matrice quadrata.

20.1 Definizione. Siano A e B due matrici ad elementi reali quadrate dello stesso ordine n. Diremo che la matrice A è *simile* alla matrice B se esiste una matrice P ad elementi reali quadrata di ordine n invertibile (cioè $\det P \neq 0$) tale che $A = PBP^{-1}$, ovvero $AP = PB$.

20.2 Osservazione. Si prova subito che

20.2.1 ogni matrice è simile a se stessa;

20.2.3 se A è simile a B allora B è simile ad A;

20.2.3 se A è simile a B e B è simile a C allora A è simile a C.

Dimostrazione.

(1) $\exists I : A = IAI = IAI^{-1}$;

(2) $\exists P : A = PBP^{-1} \Rightarrow \exists P^{-1} : B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$;

(3) $\exists P : A = PBP^{-1}$, $\exists Q : B = QCQ^{-1} \Rightarrow \exists PQ : A = P(QCQ^{-1})P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$.

20.3 Osservazione. Se A e B sono simili allora hanno lo stesso determinante.

$AP = PB \Rightarrow \det(AP) = \det(PB) \Rightarrow (\det A)(\det P) = (\det P)(\det B) \Rightarrow \det A = \det B$

Ricordiamo che una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ si dice diagonale se sono nulli tutti gli elementi che non si trovano sulla sua diagonale principale, cioè $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Con il simbolo $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots.., \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ indicheremo una matrice ad elementi reali diagonale di ordine n avente i numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots.., \lambda_{n-1}, \lambda_n$ sulla sua diagonale principale.

20.4 Definizione. Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n. Diremo che la matrice A è *diagonalizzabile* se A è simile ad una matrice diagonale. Cioè, A è diagonalizzabile se esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots.., \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ tali che

$$A = P\Lambda P^{-1}. \text{ ovvero } AP = P\Lambda$$

In tal caso si dice anche che le matrici P e Λ *diagonalizzano* la matrice A.

20.5 Osservazione. Per l'Osservazione 20.2.1 si ha che una matrice diagonale è diagonalizzabile.

20.6 Osservazione. Siano A e P due matrici ad elementi reali quadrate aventi lo stesso ordine n e sia $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots.., \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ una matrice ad elementi reali diagonale di ordine n.

Tenendo conto di come è stato definito il prodotto riga per colonna si ha subito che:

20.6.1. per ogni indice di colonna $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ si ha che la j-esima colonna della matrice prodotto (AP) è uguale al prodotto della matrice A per la j-esima colonna della matrice P. Cioè,

$$(AP)^j = A(P^j)$$

20.6.2. per ogni indice di colonna $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ si ha che la j-esima colonna della matrice prodotto $(P\Lambda)$ è uguale al prodotto dello scalare λ_j per la j-esima colonna della matrice P. Cioè,

$$(P\Lambda)^j = \lambda_j P^j$$

Tenendo conto dell'Osservazione 20.6 si prova subito il seguente

20.7 Teorema. Una matrice A ad elementi reali quadrata di ordine n è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di R^n formata da autovettori di A.

Dimostrazione. A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che $A = P\Lambda P^{-1}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che $AP = P\Lambda$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che per ogni $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ la j-esima colonna di AP è uguale alla j-esima colonna di $P\Lambda$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono una matrice P invertibile ed una matrice diagonale Λ tali che per ogni $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ si ha $(AP)^j = (P\Lambda)^j$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono n colonne $P^1, P^2, P^3, \ldots, P^n$ linearmente indipendenti e n numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ tali che $A(P^j) = (AP)^j = (P\Lambda)^j = \lambda_j P^j$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esistono n autovettori di A linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esiste una base di R^n formata da autovettori di A. ■

20.8 Osservazione. Se esiste una base B di R^n formata da autovettori di A, nella dimostrazione del Teorema 20.7 abbiamo visto un **modo pratico** per trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice invertibile P che diagonalizzano A. La matrice $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots.., \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ è la matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A ognuno ripetuto tante volte quanto è la sua molteplicità algebrica. La matrice P è la matrice che ha come colonna j-esima un autovettore della base B relativo all'autovalore λ_j.

20.9 Esempio. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Abbiamo già visto che gli autovettori di A sono

$\lambda_1 = 3 \rightarrow H(\lambda_1) = \alpha(2, 3, -1)$ $\forall\alpha\in R-\{0\}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow H(\lambda_2) = \beta(1, -1, 0)$ $\forall\beta\in R-\{0\}$

$\lambda_3 = -1 \rightarrow H(\lambda_3) = \gamma(0, 1, -1)$ $\forall\gamma\in R-\{0\}$

Scegliendo (a piacere) un autovettore per ogni autovalore, ad esempio $H_1 = (2,3,-1)$, $H_2 = (1,-1,0)$ e $H_3 = (0,1,-1)$, si ottengono 3 autovettori linearmente indipendenti e, quindi, una base di R^3.

Per il Teorema 20.7, la matrice A è diagonalizzabile. Infatti, prendendo le seguenti due matrici

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P := [\, H_1 \mid H_2 \mid H_3 \,] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si ha che $AP = P\Lambda$ ovvero $A = P\Lambda P^{-1}$.

20.10 Esempio. Si consideri la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad p_C(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = (7-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Abbiamo già visto che gli autovettori di C sono

$\lambda_1 = 7 \rightarrow H(\lambda_1) = \alpha(1, 2, 3)$ $\forall\alpha\in R-\{0\}$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow H(\lambda_2) = \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, -1)$ $\forall\beta,\gamma\in R^2-\{(0,0)\}$

Scegliendo (a piacere) un autovettore per l'autovalore λ_1, ad esempio $H_1 = (1,2,3)$, e (sempre a piacere) due autovettori linearmente indipendenti per l'autovalore λ_2, ad esempio $H_2 = (1,0,-1)$ e $H_3 = (0,1,-1)$, si ottengono 3 autovettori linearmente indipendenti e, quindi, una base di R^3.

Per il Teorema 20.7, la matrice C è diagonalizzabile. Infatti, prendendo le seguenti due matrici

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P := [\, H_1 \mid H_2 \mid H_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

si ha che $CP = P\Lambda$ ovvero $C = P\Lambda P^{-1}$.

20.11 Esempio. Si consideri la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad p_E(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2$$

Abbiamo già visto che gli autovettori di E sono

$\lambda_1 = 0 \rightarrow H(\lambda_1) = \alpha(-2, 1, 0, 0) + \beta(-3, 0, 0, 1) \quad \forall\alpha,\beta\in R^2-\{(0,0)\}$

$\lambda_2 = 2 \rightarrow H(\lambda_2) = \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(1, -1, 0, 1) \quad \forall\gamma,\delta\in R^2-\{(0,0)\}$

Scegliendo (a piacere) due autovettori linearmente indipendenti per l'autovalore λ_1, ad esempio $H_1 = (-2,1,0,0)$ e $H_2 = (-3,0,0,1)$, e (sempre a piacere) due autovettori linearmente indipendenti per l'autovalore λ_2, ad esempio $H_3 = (0,0,1,0)$ e $H_4 = (1,-1,0,1)$, si ottengono 4 autovettori linearmente indipendenti e, quindi, una base di R^4.

Per il Teorema 20.7, la matrice E è diagonalizzabile. Infatti, prendendo le seguenti due matrici

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P := [\, H_1 \,|\, H_2 \,|\, H_3 \,|\, H_4 \,] = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha che $EP = P\Lambda$ ovvero $E = P\Lambda P^{-1}$.

Ricordiamo che (per l'Osservazione 20.5) una matrice diagonale è diagonalizzabile

20.12 Teorema. Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matrice ad elementi reali quadrata di ordine 2 **non diagonale**.

La matrice A è diagonalizzabile se e solo se ha due autovalori distinti, ovvero $[(a-d)^2 + 4bc] > 0$.

Dimostrazione. Si ha che $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$.

Il discriminante del polinomio $p_A(\lambda)$ è $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc$.

Se $\Delta > 0$ allora A ha due autovalori distinti. Per cui, per il Corollario 19.34 esiste una base di R^2 formata da autovettori di A. Quindi, per il Teorema 20.7 la matrice A è diagonalizzabile.

Se $\Delta = 0$ allora la matrice A ha **un solo** autovalore β avente molteplicità algebrica 2. Poiché A non è uguale alla matrice diagonale βI_2 (per il Teorema 19.39) la matrice A **non è** diagonalizzabile.

Se $\Delta < 0$ allora la matrice A **non ha** autovalori. Per cui, non esiste una base di R^2 formata da autovettori di A. Quindi, per il Teorema 20.7 la matrice A **non è** diagonalizzabile. ■

20.13 Esempio. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} t & (t-2) \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Determinare per quali valori del parametro reale t la matrice A è diagonalizzabile.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (t+2)\lambda + 4$ $\qquad \Delta = t^2 + 4t - 12 = (t+6)(t-2)$

A è diagonalizzabile se e solo se $\Delta > 0$, cioè se e solo se $t < -6$ oppure $t > 2$.

20.14 Esempio. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$

Trovare i valori dei parametri reali h e k per i quali la matrice A è diagonalizzabile.

$p_A(\lambda) = (5-\lambda)(h-\lambda)(3-\lambda)$ $\qquad \lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = h \qquad \lambda_3 = 3$

Per ogni h∈R–{3,5} la matrice A ha tre autovalori a due a due distinti tra loro e, quindi, per il Corollario 19.34 esiste una base di R^3 formata da autovettori di A, ovvero A è diagonalizzabile.

Per h = 3 si ha la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ e i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 3$. La molteplicità geometrica di λ_1 è 1 in quanto la sua molteplicità algebrica è 1. Affinché esista una base di R^3 formata da autovettori di A è necessario e sufficiente che sia uguale a 2 anche la molteplicità geometrica di λ_2. Ricordando che $m_g(\lambda_2) = \dim E(\lambda_2) = 3 - rg(A - \lambda_2 I_3)$ e osservando che

$$rg(A - \lambda_2 I_3) = rg(A - 3I_3) = rg\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & k & 0 \end{bmatrix}$$

si ha che $m_g(\lambda_2) = 2$ se e solo se $rg(A - \lambda_2 I_3) = 1$ ovvero **se e solo se k = –7**.

Per h = 5 si ha la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ e i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 3$. La molteplicità geometrica di λ_2 è 1 in quanto la sua molteplicità algebrica è 1. Osservando che

$$rg(A - \lambda_1 I_3) = rg(A - 5I_3) = rg\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & k & -2 \end{bmatrix}$$

si ha che per ogni valore di k è $rg(A - 5I_3) = 2$ ovvero è $m_g(\lambda_1) = 1$. Per cui non esiste una base di R^3 formata da autovettori di A che, quindi, **non** è diagonalizzabile.

20.15 Definizione. Una matrice C ad elementi reali quadrata C si dice *ortogonale* se $C^T = C^{-1}$.

20.16 Osservazione. Una matrice C ad elementi reali quadrata C è ortogonale se e solo se $C^TC = I$.

Dimostrazione. Se C è ortogonale allora $C^TC = C^{-1}C = I$. Viceversa, se $C^TC = I$ allora $\det C \neq 0$ e, quindi, C è invertibile. Si ha che $C^T = C^TI = C^T(CC^{-1}) = (C^TC)C^{-1} = IC^{-1} = C^{-1}$. ■

20.17 Osservazione. Se a e b sono due numeri reali tali che $a^2 + b^2 = 1$, allora

$$\exists!\alpha\in(-\pi, \pi] : a = \cos\alpha \text{ , } b = \sin\alpha$$

20.18 Teorema. Una matrice C ad elementi reali quadrata di **ordine 2** è ortogonale se e solo se

$$\exists!\theta\in(-\pi, \pi] : \ C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ aut } C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Si osservi che nel primo caso è $\det C = 1$ mentre nel secondo caso è $\det C = -1$.

Si osservi, inoltre, che cambiando il segno della seconda colonna di una matrice del primo tipo si ottiene una matrice del secondo tipo e viceversa.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Si verifica subito che se C è una matrice del tipo

$$C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ aut } C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

allora in entrambe i casi si ha $C^T = C^{-1}$. Quindi, C è ortogonale.

($\Rightarrow$) Sia, ora, $C := \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ una generica matrice ad elementi reali quadrata di ordine 2 ortogonale.

Da $C^TC = C^{-1}C = I$ si ha che $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ovvero il sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + w^2 = 1 \\ zx + wy = 0 \end{cases}$

Dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$ si ha che $\exists!\theta\in(-\pi, \pi] : x = \cos\theta \text{ , } y = \sin\theta$.

Dall'equazione $z^2 + w^2 = 1$ si ha che $\exists!\omega\in(-\pi, \pi] : z = \cos\omega \text{ , } w = \sin\omega$.

Dall'ultima equazione $zx + wy = 0$ si ha che $\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta = 0$, da cui $\cos(\omega - \theta) = 0$.

Per cui, $\omega - \theta = \pm \pi/2$ ovvero $\omega = \theta \pm \pi/2$.

Se $\omega = \theta + \pi/2$ allora $\cos\omega = -\sin\theta$ e $\sin\omega = \cos\theta$ e, quindi, $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Se $\omega = \theta - \pi/2$ allora $\cos\omega = \sin\theta$ e $\sin\omega = -\cos\theta$ e, quindi, $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$. ■

20.19 Definizione. Una matrice A ad elementi reali quadrata si dice *simmetrica* se $A^T = A$.

20.20 Teorema. Se $A \neq aI_2$ e una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, allora:

1) la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e <u>distinti</u> e, quindi, A è diagonalizzabile;

2) se $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_1, allora un vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \neq \mathbf{0}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_2 se e solo se $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = u_xv_x + u_yv_y = 0$;

3) esiste una matrice ortogonale C tale che $\det C = 1$ e $A = C\Lambda C^T$.

Dimostrazione. Sia $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Siccome $A \neq aI_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ allora $b \neq 0$ oppure $a \neq c$. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$. Siccome il suo discriminante $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ è strettamente positivo, la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e distinti e, quindi, per il Teorema 20.12 la matrice **A è diagonalizzabile**.

Tenendo conto che $(\lambda_1 + \lambda_2) = (a + c)$ e $\lambda_1\lambda_2 = (ac - b^2)$ si dimostra subito che:

(♣) le soluzioni dell'equazione $bx + (\lambda_1 - a)y = 0$ sono tutte e sole le coppie $t(b, \lambda_2 - a)$ $\forall t \in R$.

Sia ora $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ un autovettore relativo a λ_1. Quindi, (u_x, u_y) è un'autosoluzione del sistema omogeneo $\begin{bmatrix} (a-\lambda_1) & b \\ b & (c-\lambda_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Per cui esiste $m \neq 0$ tale che $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = m(b, \lambda_1 - a)$.

Un vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \neq \mathbf{0}$ è un autovettore relativo a λ_2 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ è un'autosoluzione del sistema omogeneo $\begin{bmatrix} (a-\lambda_2) & b \\ b & (c-\lambda_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ è un'autosoluzione dell'equazione $(a - \lambda_2)x + by = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ esiste $n \neq 0$ tale che $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = n(b, \lambda_2 - a)$ $\Leftrightarrow$ tenendo conto di (♣) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (v_x, v_y) è un'autosoluzione dell'equazione $bx + (\lambda_1 - a)y = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $bv_x + (\lambda_1 - a)v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $mbv_x + m(\lambda_1 - a)v_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $u_xv_x + u_yv_y = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 0$.

Si ha che $||\mathbf{u}||^2 = u_x^2 + u_y^2 = m^2[b^2 + (\lambda_1 - a)^2]$ e $||\mathbf{v}||^2 = v_x^2 + v_y^2 = n^2[b^2 + (\lambda_2 - a)^2]$. Scegliendo $m = [b^2 + (\lambda_1 - a)^2]^{1/2}$ e $n = [b^2 + (\lambda_2 - a)^2]^{1/2}$ si ha $||\mathbf{u}||^2 = u_x^2 + u_y^2 = 1$ e $||\mathbf{v}||^2 = v_x^2 + v_y^2 = 1$.

ORA, quindi, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ sono due auto**<u>versori</u>** relativi a λ_1 e λ_2 rispettivamente.

Sia $D = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$ la matrice che ha come colonne gli auto**<u>versori</u>** $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Tenendo conto che $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 1$ si ha che $D^T D = I$. Se $\det D = 1$ allora sia

$C := \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$. Se, invece, $\det D = -1$ sia $C := \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ u_y & -v_y \end{bmatrix}$. <u>In ogni caso</u>, **C è ortogonale con detC = 1** e la seconda colonna di C $(-\mathbf{v}) = (-v_x, -v_y)$ è ancora un auto**<u>versore</u>** relativo a λ_2.

Posto $\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ si ha, poiché A è diagonalizzabile, che $A = C\Lambda C^{-1} = C\Lambda C^T$. ■

Se A è una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, il Teorema 20.20 ci fornisce un **metodo pratico e veloce** per diagonalizzare A tramite una matrice ortogonale C con detC = 1.

Passo 1) **<u>Si trovano</u>** i due autovalori distinti λ_1 e λ_2 di A.

Passo 2) **<u>Si sceglie</u>**, a piacere, uno dei due autovalori di A, ad esempio λ_1.

Passo 3) **<u>Si trova</u>** un autovettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$ relativo a λ_1.

Passo 4) **<u>Si calcola</u>** la lunghezza $h = [w_x^2 + w_y^2]^{1/2}$ dell'autovettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$.

Passo 5) **<u>Si considera</u>** il versore $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = h^{-1}(w_x, w_y)$.

Per il Teorema 20.20 si ha che i due autoversori relativi a λ_2 sono $(v_x, v_y) = \pm(u_y, -u_x)$.

Inoltre, la matrice $\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale e, quindi, $\det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} = \pm 1$.

Passo 6) **<u>Si sceglie</u>** l'autoversore (v_x, v_y) relativo a λ_2 tale che $\det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} = 1$.

Passo 7) Si ha che $A = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$.

20.21 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con detC = 1 che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 8$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 3$ sono $\mathbf{w} = \alpha(1, 2)$ $\forall \alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 5\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 3$. Per cui $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = 8$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$, allora per la matrice ortogonale

$C = \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$ è $\det C = 1$. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ si ha $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 \end{array}\right]\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

20.22 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con $\det C = 1$ che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -7$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 5$ sono $\mathbf{w} = \alpha(\sqrt{3}, 1)$ $\forall\alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 4\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 5$. Per cui $\pm\frac{1}{2}(1, -\sqrt{3})$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = -7$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$, allora la matrice ortogonale

$C = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right]$ ha $\det C = 1$. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} \sqrt{3} & 1 \\ \hline -1 & \sqrt{3} \end{array}\right]\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

20.23 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}$. Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice ortogonale C con $\det C = 1$ che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -25$. Gli autovettori di $\lambda_1 = 0$ sono $\mathbf{w} = \alpha(4, 3)$ $\forall\alpha \neq 0$.

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = 25\alpha^2$, il vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(4, 3)$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 0$. Per cui $\pm\frac{1}{5}(3, -4)$ sono i due autoversori relativi a $\lambda_2 = -25$. Scegliendo $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(-3, 4)$, allora la matrice ortogonale

$C = \frac{1}{5}\left[\begin{array}{c|c} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]$ ha $\det C = 1$. Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$.

$$\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{5}\left[\begin{array}{c|c} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{5}\left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \hline -3 & 4 \end{array}\right]\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$