30 possibili domande d'esame

1) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*dipendenza lineare di n vettori*", **completare** e **<u>dimostrare</u>** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Se i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ di V_R sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano altri p vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_p$ di V_R si ha che i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_p$ sono linearmente ……………*".

[Definizione 7.15 degli appunti – Definizione 3.2 del capitolo 2 del testo consigliato]
[Teorema 7.18 degli appunti – Proposizione 6.4 del capitolo 1 del testo consigliato]

2) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*dipendenza lineare di n vettori*", **<u>dimostrare</u>** il teorema di "*caratterizzazione della lineare dipendenza*".

[Definizione 7.15 degli appunti – Definizione 3.2 del capitolo 2 del testo consigliato]
[Teorema 7.20 degli appunti – Proposizione 6.3 del capitolo 1 del testo consigliato]

3) Dopo aver **<u>SOLO</u>** **<u>enunciato</u>** il teorema di "*caratterizzazione di un sottospazio*", **completare** e **<u>dimostrare</u>** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Comunque presi n vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ di V_R il sottoinsieme U contenente tutti e soli i vettori di V_R che sono <u>combinazioni lineari</u> dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ è un ……………*".

[enunciato del Teorema 9.9 degli appunti – Teorema 2.2 del capitolo 2 del testo consigliato]
[Definizione 9.17 e Teorema 9.19 degli appunti – Teorema 3.3 del capitolo 2 del testo consigliato]

4) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*dipendenza lineare di n vettori*", **<u>dimostrare</u>** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Se U è il sottospazio di V_R generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ e W è il sottospazio di V_R generato dai vettori $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ allora $U = W$ se e solo se $\boldsymbol{w} \in U$.*"

[Definizione 7.15 degli appunti – Definizione 3.2 del capitolo 2 del testo consigliato]
[Teorema 9.22 degli appunti – Proposizione 3.6 del capitolo 2 del testo consigliato]

5) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*dipendenza lineare di n vettori*", enunciare la condizione affinché n vettori siano linearmente indipendenti. Poi, **completare** e **<u>dimostrare</u>** la proposizione seguente: "*Sia V_R uno spazio vettoriale reale. Sia U il sottospazio di V_R generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ e sia $\boldsymbol{v} \notin U$. Se i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n$ sono linearmente indipendenti, allora i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ sono linearmente ……………*".

[Definizione 7.15 degli appunti – Definizione 3.2 del capitolo 2 del testo consigliato]
[Teorema 9.24 degli appunti – Proposizione 3.8 del capitolo 2 del testo consigliato]

6) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*base di uno spazio vettoriale*", **<u>dimostrare</u>** il teorema di "*caratterizzazione di una base*".

[Definizione 10.2 degli appunti – Definizione 4.1 del capitolo 2 del testo consigliato]
[Teorema 10.16 degli appunti – Teorema 4.2 del capitolo 2 del testo consigliato]

7) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*matrice invertibile*", **<u>dimostrare</u>** che "*se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine e invertibili, allora* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$".

[Definizione 14.1 e Teorema 14.5 degli appunti]

8) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*trasposta di una matrice*", ricordando che $(AB)^T = B^T A^T$, **<u>dimostrare</u>** che "*se A è una matrice invertibile (ovvero esiste* A^{-1}*), allora* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$".

9) **Enunciare** e **<u>dimostrare</u>** il "*1° teorema di Laplace*" (**in alternativa alla dimostrazione**, illustrare le altre proprietà del determinante).

[Teorema 13.17 degli appunti – Teorema 10.5 del capitolo 3 del testo consigliato]

10) **Enunciare** e **<u>dimostrare</u>** il "*2° teorema di Laplace*" (**in alternativa alla dimostrazione**, illustrare le altre proprietà del determinante).

[Teorema 13.34 degli appunti – Teorema 10.9 del capitolo 3 del testo consigliato]

11) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*soluzione*" di un sistema lineare, **enunciare** e **<u>dimostrare</u>** il teorema di "*Rouché-Capelli*".

[Definizione 17.7 degli appunti – paragrafo 1 del capitolo 4 del testo consigliato]
[Teorema 17.9 degli appunti – Lemma 2.1 e Teorema 2.3 del capitolo 4 del testo consigliato]

12) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*sistema lineare normale*", **enunciare** e **<u>dimostrare</u>** il teorema di "*Cramer*".

[Definizione 17.11 degli appunti – paragrafo 1 del capitolo 4 del testo consigliato]
[Teorema 17.17 degli appunti – Teorema 3.1 del capitolo 4 del testo consigliato]

13) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di "*autosoluzione*", **enunciare** e **<u>dimostrare</u>** una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare omogeneo abbia autosoluzioni.

[Definizione 18.3 degli appunti – paragrafo 5 del capitolo 4 del testo consigliato]
[Teorema 18.6 degli appunti – Teorema 5.5 del capitolo 4 del testo consigliato]

14) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di sistema lineare "*omogeneo*", **completare** e **<u>dimostrare</u>** la proposizione: "*L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un …*".

[Definizione 18.1 degli appunti – paragrafo 5 del capitolo 4 del testo consigliato]
[Teorema 18.15 degli appunti – Teorema 5.8 del capitolo 4 del testo consigliato]

15) Dopo aver dato la **definizione** di "*sistema omogeneo associato*" ad un sistema lineare AX = B, **dimostrare** la seguente proposizione: "*Sia AX = B un sistema lineare compatibile in n incognite e sia Y_p una sua soluzione. Una n-upla Z è una soluzione del sistema AX = B se e solo se esiste una soluzione X_0 del sistema omogeneo associato tale che $Z = Y_p + X_0$*".

[Definizione 18.18 degli appunti – paragrafo 5 del capitolo 4 del testo consigliato]
[Teorema 18.19 degli appunti – Teorema 5.11 del capitolo 4 del testo consigliato]

16) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **dimostrare** che "*gli autovalori reali di una matrice quadrata sono tutte e solo le radici reali del suo polinomio caratteristico*".

[Definizione 19.4 degli appunti – Definizione 8.1 del capitolo 5 del testo consigliato]
[Teorema 19.12 degli appunti – Proposizione 9.3 del capitolo 5 del testo consigliato]

17) Dopo aver dato la **definizione** di autovalore e di autovettore, **completare** e **dimostrare** la seguente proposizione: "*se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ sono s autovalori a due a due distinti tra loro e se $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{s-1}, V_s$ sono s autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{s-1}, \lambda_s$ rispettivamente, allora i vettori $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{s-1}, V_s$ sono linearmente ………………*".

[Definizione 19.4 degli appunti – Definizione 8.1 del capitolo 5 del testo consigliato]
[Lemma 19.33 degli appunti – Teorema 8.4 del capitolo 5 del testo consigliato]

18) Sia A una matrice ad elementi reali quadrata di ordine n e sia β un suo autovalore reale. Dare la **definizione** di "*molteplicità algebrica*" $m_a(\beta)$ e "*molteplicità geometrica*" $m_g(\beta)$ dell'autovalore β ed **enunciare** la relazione tra le due molteplicità. Infine, **enunciare** le condizioni necessarie e sufficienti affinché esista una base di R^n formata da autovettori di A.

[Definizioni 19.19 e 19.26 degli appunti – Definizioni 9.6 e 9.7 del capitolo 5 del testo consigliato]
[Teorema 19.27 degli appunti – Teorema 9.8 del capitolo 5 del testo consigliato]
[Teorema 19.37 degli appunti – Teorema 10.5 del capitolo 5 del testo consigliato]

19) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto scalare di due vettori liberi*" illustrarne le **proprietà** con particolare attenzione al significato geometrico del valore assoluto del prodotto scalare.

[Definizione 6.6.PS3 degli appunti – Definizione 2.2 del capitolo 6 del testo consigliato]
[Proprietà 6.6.PS4 e 6.6.PS9 degli appunti – Paragrafo 2 del capitolo 6 del testo consigliato]
[Proprietà 6.6.PS7 degli appunti – Proposizione 2.9 del capitolo 6 del testo consigliato]

20) Dopo aver dato la **definizione** di "*prodotto vettoriale di due vettori liberi*" illustrarne le **proprietà**, con particolare attenzione al significato geometrico del modulo.

[Definizione 6.6.PV3 degli appunti – Definizione 4.1 del capitolo 6 del testo consigliato]
[Proprietà 6.6.PV5 e 6.6.PV7 degli appunti – Paragrafo 4 del capitolo 6 del testo consigliato]
[Proprietà 6.6.PV6 degli appunti – Proposizione 4 del capitolo 6 del testo consigliato]

21) Dopo aver dato la **<u>definizione</u>** di “*prodotto misto di tre vettori liberi*”, **<u>dimostrare</u>** il significato geometrico del suo valore assoluto.

[Definizione 6.6.PM2 degli appunti – Definizione 5.1 del capitolo 6 del testo consigliato]
[Proprietà 6.6.PM4 degli appunti – Proposizione 5.3 del capitolo 6 del testo consigliato]

22) **Enunciare** e **<u>dimostrare</u>** la condizione necessaria e sufficiente di complanarità di 4 punti.

[Lemma 22.6 degli appunti]

23) **<u>Studiare</u>** (non fare un semplice elenco di casi) la mutua posizione di due piani.

[Teorema 22.17 degli appunti]

24) **<u>Studiare</u>** (non fare un semplice elenco di casi) la mutua posizione di una retta ed un piano.

[Teorema 22.23 degli appunti] oppure [Teorema 22.32 degli appunti]

25) **<u>Studiare</u>** (non fare un semplice elenco di casi) la mutua posizione di due rette nello spazio.

[Teorema 22.33 degli appunti] oppure [Lemma 22.35 e Teorema 22.36 degli appunti]

26) Enunciare e **<u>dimostrare</u>** il significato geometrico dei coefficienti delle incognite nell’equazione cartesiana di un piano.

[Teorema 22.11 degli appunti]

27) Enunciare e **<u>dimostrare</u>** la formula per il calcolo della distanza di un punto da un piano.

[Teorema 22.54 degli appunti]

28) Dopo aver **<u>spiegato</u>** cosa si intende per “*angolo tra due rette (**nello spazio**)*” enunciare e **<u>dimostrare</u>** la formula per il calcolo dell’angolo tra due rette.

[Definizione 22.45 e Teorema 22.46 degli appunti]

29) Dopo aver **<u>spiegato</u>** cosa si intende per “*angolo tra due piani*” enunciare e **<u>dimostrare</u>** la formula per il calcolo dell’angolo tra due piani.

[Definizione 22.42 e Teorema 22.43 degli appunti]

30) Dopo aver **<u>spiegato</u>** cosa si intende per “*angolo tra una retta e un piano*”, enunciare e **<u>dimostrare</u>** la formula per il calcolo dell’angolo tra una retta e un piano.

[Definizione 22.48 e Teorema 22.49 degli appunti]