GEOMETRIA 1.1

1) Sia A la matrice avente $(t^2 - 1, t(t+1), 0)$ e $(t^2 + t, (t-1)(t+1), 0)$ come I e II riga rispettivamente. Studiare, al variare del parametro reale t, il rango della matrice A.	
2) Trovare una base dello spazio $V(w, x, y, z) \leq R^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $w - x + z = 4x - y + 2z = 0$.	
3) Sia A la matrice avente $(2,-9, 0)$, $(0,-1, 0)$ e $(-3, 9,-1)$ come I, II e III riga rispettivamente. **Se esistono**, trovare una matrice C invertibile ed una matrice Λ diagonale che diagonalizzano A.	
4) Scrivere le equazioni della retta passante per l'origine $O(0, 0, 0)$ che si appoggia alla retta $r : x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e alla retta $s : 2x + y = x + y - 12z - 17 = 0$.	
5) Scrivere l'equazione del piano passante per l'origine $O(0, 0, 0)$, perpendicolare al piano $2x - 3y + z = 0$ e parallelo alla retta $x = 2x - 3y + z = 0$.	
6) Sulla retta passante per l'origine $O(0, 0, 0)$ e perpendicolare al piano $x - 2y - 2z + 13 = 0$, determinare le coordinate dei punti che distano 4 dal piano $2x - 2y + z = 0$.	
7) Calcolare la distanza tra le due rette $r : x - y - 5 = 5y - z - 1 = 0$ e $s : x - y = 5x - z = 0$.	
8) Trovare l'equazione canonica e, poi, classificare la seguente conica: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 18x + 2\sqrt{3}y + 24 = 0$	
9) Trovare le equazioni della circonferenza che giace sul piano $3x + y - 2z = 0$, ha il centro nel punto $C(0, 2, 1)$ e passa per l'origine $O(0, 0, 0)$.	
10) Studiare la mutua posizione delle sfere: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y - 18z + 82 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 10z + 26 = 0$	

GEOMETRIA 1.2

1) Trovare le **equazioni** del **sottospazio** $V(w, x, y, z) \leq R^4$ generato dalle quaterne $\mathbf{a}_1 = (0, 1, -1, 0)$ e $\mathbf{a}_2 = (-2, 0, 1, 0)$.	
2) Scrivere la soluzione (w, x, y, z) **generale** del seguente sistema lineare: $w - 2y + z - 3 = 2w - x + 3y + 1 = w - x + 5y - z + 4 = 0$.	
3) Trovare una **base** per ogni **autospazio** della matrice A avente (0, 0, 2), (12, 0,–3) e (0, 0, 3) come I, II e III riga rispettivamente. Poi, dire se A è diagonalizzabile.	
4) Calcolare l'**area** del **triangolo** di vertici A(0, 2,–1), B(2, 0,–3) e C(1,–3, 0). Poi, trovare l'**equazione** del **piano** per A, B e C.	
5) Siano A, B e C i punti di intersezione del piano $\pi : 2x + y + z - 12 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente. Determinare l'**ortocentro** (punto incontro altezze) del triangolo ABC.	
6) Trovare la **distanza** e i **parametri direttori** della retta di minima distanza tra le rette sghembe $r : 2x - 3y + 12 = y + z = 0$ e $s : x + 7z = 2x - y + 2z = 0$.	
7) Sia r la retta parallela all'asse Y e passante per $A(-\sqrt{5}, 7, \sqrt{5})$. Trovare le **equazioni** dei **piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/4$ radianti con l'asse Z.	
8) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$.	
9) Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** C_1 ottenuta secando la sfera di centro l'origine O e raggio $\sqrt{27}$ con il piano $\pi : x + 2y + 2z - 9 = 0$.	
10) Siano π e C_1 quelli dell'esercizio (9). Sia C_2 la circonferenza ottenuta secando con il piano π la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 81 = 0$. Stabilire su π la **posizione** di C_1 rispetto a C_2.	

GEOMETRIA 1.3

1) Sia $S = \{(x, y, z)\in R^3 \mid x + 5y + z = 0\}$. Sia $B = \{(t^3 - 5t^2, t^2 - t, t), (6, -1, -1)\}$. Determinare per quali **valori** del parametro reale t l'insieme B è una base del sottospazio S.	
2) Sia A la matrice avente $(t, t - 2)$ e $(2, 2)$ come I e II riga rispettivamente. Determinare per quali **valori** del parametro reale t la matrice A risulta diagonalizzabile.	
3) Sia r la retta passante per $A(0, t^2, t)$ e $B(1, t^2, -2)$ e π il piano di equazione $(t+2)x + 4y + tz - 20 = 0$. Studiare, al variare del parametro reale t, la **mutua posizione** della retta r e il piano π.	
4) Siano A, B, e C i punti di intersezione del piano $\pi : 2x + y - z - 2 = 0$ con gli assi X, Y e Z rispettivamente. Trovare il **circocentro** (punto d'incontro degli assi dei lati) del triangolo ABC.	
5) <u>Se esiste</u>, trovare il **piano** che contiene le rette $r : 5y - z + 2 = x + 1 = 0$ e $s : 5y - z = x = 0$.	
6) Trovare la **distanza** tra le rette $r : 3x - z = y = 0$ e $s : y - 9z = x - 12 = 0$.	
7) Sulla retta r passante per il punto $A(0, -3, 1)$ e perpendicolare al piano $\pi : x + 2y - z = 0$, trovare i **punti** che distano **3** dal piano $\pi' : z + 1 = 0$.	
8) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $x^2 + 10xy + y^2 + 10x + 2y - 1 = 0$.	
9) Trovare il **centro** e il **raggio** della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.	
10) Trovare le **equazioni** di un piano e di una sfera la cui intersezione sia la circonferenza passante per i punti $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, -7)$.	

GEOMETRIA 1.4

1) Sia A la matrice avente (2,–9, 0), (0,–1, 0) e (–3, 9,–1) come I, II e III riga rispettivamente. **Se esistono**, trovare una matrice C invertibile ed una matrice Λ diagonale che diagonalizzano A.	
2) Scrivere l'equazione del **piano** passante per l'origine O(0, 0, 0), perpendicolare al piano $5x - y + 2z = 0$ e parallelo alla retta $x = 5x - y + 2z = 0$.	
3) Se esiste, trovare il **piano** che contiene le rette $r : 5y - z + 2 = x + 1 = 0$ e $s : 5y - z = x = 0$.	
4) Trovare la **distanza** tra le rette $r : 4x - z = y = 0$ e $s : y - 8z = x - 13 = 0$.	
5) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$.	
6) Trovare il **centro** e il **raggio** della **circonferenza** ottenuta secando la sfera di centro l'origine O e raggio $\sqrt{38}$ con il piano $\pi : 2x + y - 2z - 18 = 0$.	

GEOMETRIA 1.5

1) Trovare le **equazioni** del **sottospazio** $V(w, x, y, z) \leq R^4$ generato dalle quaterne $\mathbf{c}_1 = (0, 0, 2, -1)$ e $\mathbf{c}_2 = (0, -1, 1, 0)$.	
2) Trovare una **base** per **OGNI autospazio** della matrice A avente (0, –3, 12), (0, 4, 0) e (0, 3, 0) come I, II e III riga rispettivamente. Poi, dire se A è diagonalizzabile.	
3) Sia r la retta per $A(0, t^2, t)$ e $B(-5, t^2, 1)$ e π il piano di equazione $(t-1)x + 9y + tz - 10 = 0$. Studiare, al variare del parametro reale t, la **mutua posizione** della retta r e il piano π.	
4) Sulla retta r passante per il punto A(–3, 1, 0) e perpendicolare al piano $\pi : x - 2y + z = 0$, trovare i **punti** che distano **6** dal piano $\pi' : y + 1 = 0$.	
5) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, classificare la seguente conica: $9x^2 - 10xy + 9y^2 + 44x - 12y + 32 = 0$	
6) Studiare la **mutua posizione** delle sfere: $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 2z - 6 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$	

GEOMETRIA 1.6

1) Sia A la matrice avente $(0,\ t^2 - 16,\ t(t-4),\ 0)$ e $(0,\ t^2 - 4t,\ (t-4)(t+4),\ 0)$ come I e II riga rispettivamente. Studiare, al variare del parametro reale t, il **rango** della matrice A.	
2) Trovare i **parametri direttori** della retta passante per l'origine $O(0, 0, 0)$ che si appoggia alla retta $r : z = 4x - y + 7z + 11 = 0$ e alla retta $s : 11x + y - 3z - 14 = x + 3y = 0$.	
3) Calcolare l'**area** del triangolo di vertici $A(0, 4, -5)$, $B(4, 0, -3)$ e $C(5, -3, 0)$. Poi, scrivere l'equazione del **piano** che contiene il triangolo ABC.	
4) Siano A, B, C i punti d'intersezione del piano $\pi : x - y + 2z - 24 = 0$ con gli assi X, Y, Z rispettivamente. Trovare l'**ortocentro** (punto d'incontro delle altezze) del triangolo ABC.	
5) Trovare l'**equazione <u>canonica</u>** della conica: $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 8x + 6y + 11 = 0$. Poi, <u>classificarla</u>.	
6) Trovare le equazioni del **piano** e di una **sfera** la cui intersezione sia la circonferenza passante per i punti $O(0, 0, 0)$, $A(-7, 0, 0)$ e $B(0, 1, 3)$.	

GEOMETRIA 1.7

1) Sia A la matrice avente (t, t – 2) e (2, 2) come I e II riga rispettivamente. Determinare per quali **valori del parametro** reale t esiste una base dello spazio R^2 formata da autovettori di A.	
2) Trovare una **base** dello spazio V(w, x, y, z) (sottospazio di R^4) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo: $w - x + z = 4x - y + 2z = 0$.	
3) Trovare la **distanza** tra le rette sghembe $r : 2x - 3y + 12 = y + z = 0$ $s : x + 7z = 2x - y + 2z = 0$ e i **parametri direttori** della retta di minima distanza.	
4) Sia r la retta parallela all'asse X e passante per A($\sqrt{3}$, 15,–5 $\sqrt{3}$). Trovare le equazioni dei **piani** che contengono r e formano un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse Y.	
5) Siano A, B, e C i punti di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi X, Y e Z rispettivamente. Trovare il **circocentro** (punto d'incontro degli assi dei lati) del triangolo ABC.	
6) Scrivere le equazion**i** della **circonferenza** che giace sul piano $x - y + z = 0$, ha il centro nel punto C(1, 2, 1) e passa per l'origine O(0, 0, 0).	

GEOMETRIA 1.8

1) Sia $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + 6y - 10z = 0\}$. Sia $B = \{(t^3 - 6t^2, t^2 - t, t), (8,-3,-1)\}$. Determinare per quali **valori** del parametro reale t l'insieme B è una **base** del sottospazio S.	
2) Scrivere la **soluzione** (w, x, y, z) **generale** del seguente sistema lineare: $w + y - 3z + 2 = 3w + x - y + 1 = 2w + x - 2y + 3z - 1 = 0$.	
3) Sulla retta passante per il punto A(–7, 3, 0) e perpendicolare al piano $x - 2y + 2z + 14 = 0$, determinare le coordinate dei **punti** che distano 8 dal piano $2x - 2y - z = 0$.	
4) Calcolare la **distanza** tra le due rette $r : x - y - 5 = 5y - z - 1 = 0$ e $s : 5x - z = x - y = 0$.	
5) Se esiste una conica passante per i punti A(0, 0), B(0,–1), C(1,–1), D(1,–2), E(2,–2), scrivere la sua **equazione**. Altrimenti, **motivare** brevemente la risposta.	
6) Trovare il **centro** e il **raggio** della sfera passante per l'origine O e i punti A, B, e C di intersezione del piano $\pi : x - 2y - z - 18 = 0$ con gli assi coordinati X, Y e Z rispettivamente.	

GEOMETRIA 1.9

1) Del sistema lineare $3x - y + 10z - 22 = x - y + 8z - 8 = 2x + y - 5z - 13 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_P ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato.	
2) **Se esiste**, trovare una coppia $(h, k) \in R^2$ tale che la matrice $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -2 & k & 3 \end{bmatrix}$ **NON** abbia tre autovalori reali a due a due distinti e, <u>allo stesso tempo</u>, sia diagonalizzabile.	
3) Date le rette $r : x = x - 2y + 3z + 12 = 0$ e $s : 2x + y = x + y - 12z - 12 = 0$, sia t la retta per l'origine O che si appoggia in A alla retta r e in B alla retta s. Trovare le coordinate di A e B.	
4) Sia $A(-2, 3\sqrt{11}, 8)$. Sulla retta $y = z - 11 = 0$ trovare due punti B e C tali che il triangolo ABC sia equilatero.	
5) Siano $A(t, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, -\sqrt{23})$. Trovare i valori del parametro reale t per i quali il piano passante per A, B e C forma col piano YZ un angolo di $2\pi/3$ radianti.	
6) Sia Σ la sfera che ha il centro in $C(4,-7,-16)$ e passa per il punto $A(4,-12,-10)$. Trovare l'equazione del piano π tangente a Σ in A.	

GEOMETRIA 1.10

1) Del sistema lineare $3x - y + 11z - 19 =$ $= x - y + 9z - 7 = 2x + y - 6z - 11 = 0$ trovare: • una soluzione particolare X_P ; • una base B dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo ad esso associato.	
2) Sia $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **Se possibile**, trovare una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile C tali che $AC = C\Lambda$. **Altrimenti**, <u>motivare la risposta</u>.	
3) **Se esiste**, trovare il piano che contiene le seguenti rette: $r : 4x + z - 3 = y + 1 = 0$ $s : 4x + z = y = 0$	
4) Sia H la proiezione ortogonale del punto $A(2\sqrt{26}, 2, -5)$ sulla retta $r : x = z + 7 = 0$. Su r trovare (almeno) un altro punto B tale che l'area del triangolo rettangolo AHB valga $9\sqrt{3}$.	
5) Sia $r : 4x + 3y - 10 = 0$ la direttrice delle parabole passanti per l'origine O(0, 0) e aventi i fuochi sull'asse Y delle ordinate. Trovare le coordinate dei loro fuochi.	
6) Scrivere l'equazione della sfera Σ che ha il centro in C(–10, 3, 15) ed è tangente al piano $\pi : 4x + 7z = 0$.	

GEOMETRIA 1.11

1) Sia A la matrice avente (2,–9, 0), (0,–1, 0) e (–3, 9,–1) come I, II e III riga rispettivamente: • trovare gli **autovalori** di A; • trovare una **base** per ogni **autospazio** di A.	
2) <u>Se esiste</u>, trovare il **piano** che contiene le seguenti rette $r : 5y - z + 4 = x + 3 = 0$ e $s : 5y - z = x = 0$.	
3) Trovare l'equazione del **piano** passante per il punto A(1, 1, 1), perpendicolare al piano $5x - y + 2z = 0$ e parallelo alla retta $x = 5x - y + 2z = 0$.	
4) Trovare la **distanza** tra le rette $r : 2x - z = y = 0$ e $s : y - 4z = x - 20 = 0$.	
5) Siano $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, -\sqrt{2})$. Trovare l'ampiezza (in radianti) dell'**angolo** compreso tra il piano passante per A, B e C e il piano YZ.	
6) Trovare l'**equazione canonica** e, poi, **classificare** la seguente conica: $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 7x + 5y + 5 = 0$.	