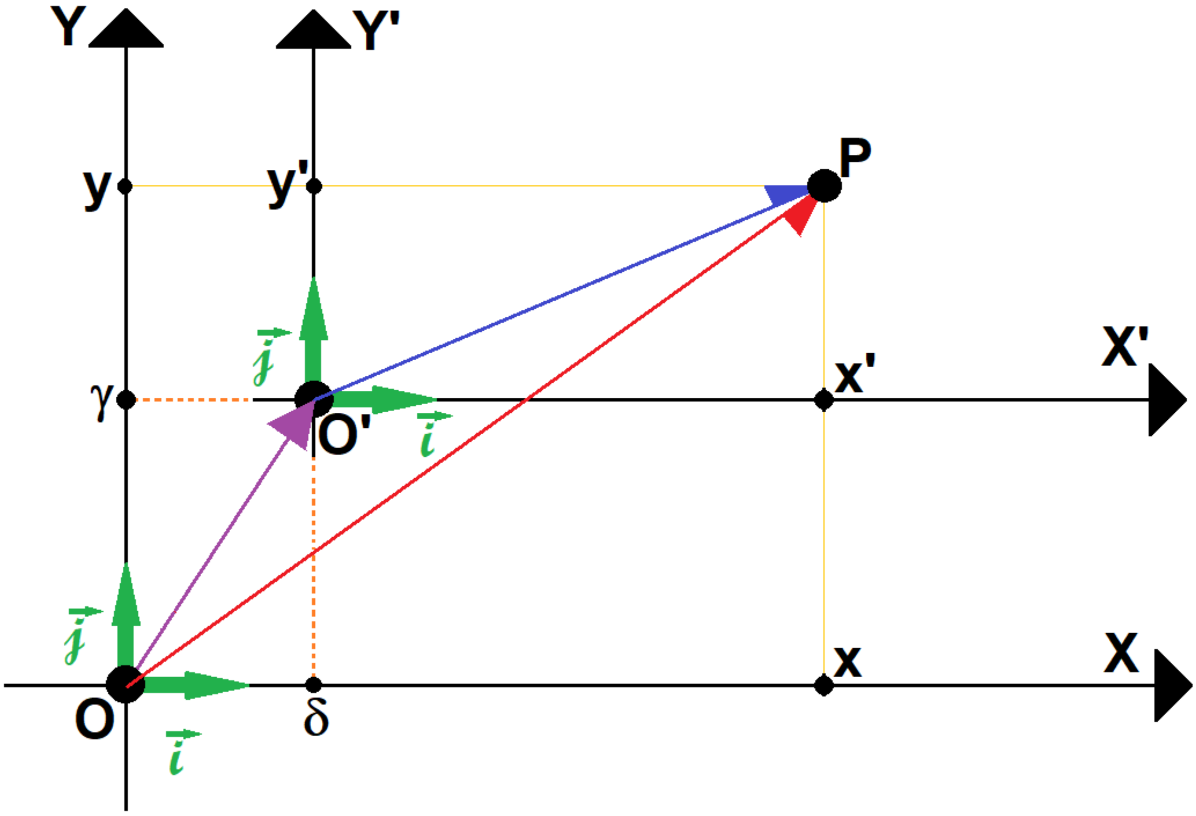
23. Le coniche nel piano euclideo.

23.1 TRASLAZIONE del riferimento cartesiano.

Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano.

Sia O’ un punto del piano diverso da O e sia RC(O’, **i**, **j**) il riferimento cartesiano ortonormale che si ottiene tramite la *traslazione* che porta il punto O sul punto O’.



Sia P un punto (generico) del piano.

Se indichiamo con (δ, γ) le coordinate di O’ rispetto a RC(O, **i**, **j**), allora si ha che [OO’] = δ**i** + γ**j** .

Se indichiamo con (x, y) le coordinate di P rispetto a RC(O, **i**, **j**), allora si ha che [OP] = x**i** + y**j** .

Se indichiamo con (x’, y’) le coordinate di P rispetto a RC(O’, **i**, **j**), allora si ha che [O’P] = x’**i** + y’**j**.

Quindi, l’identità (vettoriale) [OP] = [OO’] + [O’P] è equivalente all’identità (vettoriale)

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (\delta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j}) + (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})$$

da cui si ha subito

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (\delta + x')\mathbf{i} + (\gamma + y')\mathbf{j}$$

L’ultima identità (vettoriale), per l’unicità della scrittura di un vettore rispetto alla base (**i**, **j**), è equivalente alle due identità (scalari) seguenti

$$\begin{cases} x = \delta + x' \\ y = \gamma + y' \end{cases}$$

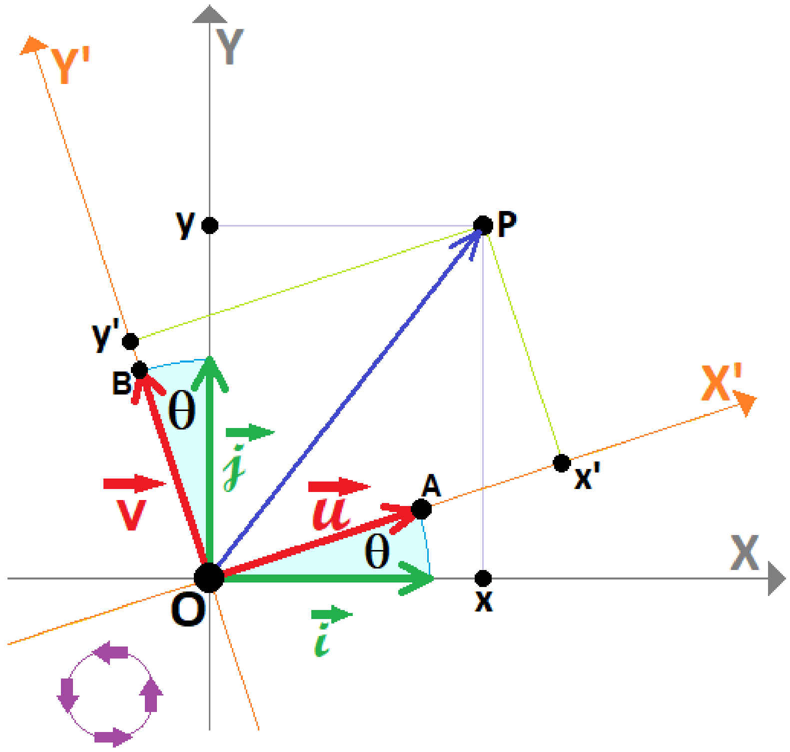
che vengono dette, per la genericità del punto P, *equazioni della traslazione*.

23.2 ROTAZIONE del riferimento cartesiano.

Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano.

Fissiamo un verso di rotazione attorno al punto O, ad esempio il verso antiorario.

Sia RC(O, **u**, **v**) il riferimento cartesiano ortonormale del piano ottenuto *ruotando* (attorno ad O) il sistema RC(O, **i**, **j**) di un angolo θ∈(−π, π]. L'*ampiezza* della rotazione è data da |θ| mentre il *verso* della rotazione è antiorario/orario a seconda che θ sia positivo/negativo. Sia P un punto del piano.



Se indichiamo con (x, y) le coordinate di P rispetto a RC(O, **i**, **j**), allora si ha che [OP] = x**i** + y**j** .

Se indichiamo con (x', y') le coordinate di P rispetto a RC(O, **u**, **v**), allora si ha che [OP] = x'**u** + y'**v**.

Quindi, si ha l'identità x**i** + y**j** = x'**u** + y'**v**. Moltiplicando entrambe i membri di tale identità

per il versore **i** si ha	per il versore **j** si ha
(x**i** + y**j**)•**i** = (x'**u** + y'**v**)•**i**	(x**i** + y**j**)•**j** = (x'**u** + y'**v**)•**j**
(x**i**)•**i** + (y**j**)•**i** = (x'**u**)•**i** + (y'**v**)•**i**	(x**i**)•**j** + (y**j**)•**j** = (x'**u**)•**j** + (y'**v**)•**j**
x(**i**•**i**) + y(**j**•**i**) = x'(**u**•**i**) + y'(**v**•**i**)	x(**i**•**j**) + y(**j**•**j**) = x'(**u**•**j**) + y'(**v**•**j**)
x(1) + y(0) = x'(cosθ) + y[cos($\frac{\pi}{2}$ + θ)]	x(0) + y(1) = x'[cos($\frac{\pi}{2}$ − θ)] + y'(cosθ)
x = x'cosθ − y'sinθ	y = x'sinθ + y'cosθ

Abbiamo così ottenuto le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

che, per la genericità del punto P, vengono dette *equazioni della rotazione*.

Se poniamo X := $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e Y := $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e C := $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,

allora possiamo riscrivere le equazioni della rotazione nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ovvero, più brevemente, X = CY.

Tenendo conto di quanto visto finora, è ben posta la seguente:

23.3. Definizione. Una matrice del tipo $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ si dice *matrice associata ad una rotazione*.

23.4. Osservazione. Siccome **u** = [OA] = 1**u** + 0**v**, il punto A ha coordinate (x', y') = (1, 0) rispetto a RC(O, **u**, **v**). Ponendo (x', y') = (1, 0) nelle equazioni della rotazione si ottengono le coordinate (x, y) = (cosθ, sinθ) di A rispetto a RC(O, **i**, **j**). Quindi, **u** = [OA] = (cosθ)**i** + (sinθ)**j**. Si noti che la **prima** colonna $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ della matrice C è proprio la coppia (cosθ, sinθ) delle componenti del vettore **u** (**primo** vettore della base (**u**, **v**)) rispetto alla base (**i**, **j**).

Siccome **v** = [OB] = 0**u** + 1**v**, il punto B ha coordinate (x', y') = (0, 1) rispetto a RC(O, **u**, **v**). Ponendo (x', y') = (0, 1) nelle equazioni della rotazione si ottengono le coordinate (x, y) = (–sinθ, cosθ) di B rispetto a RC(O, **i**, **j**). Quindi, **v** = [OB] = (–sinθ)**i** + (cosθ)**j**. Si noti che la **seconda** colonna $\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ della matrice C è proprio la coppia (–sinθ, cosθ) delle componenti del vettore **v** (**secondo** vettore della base (**u**, **v**)) rispetto alla base (**i**, **j**).

23.5. Osservazione. Se C è una matrice associata ad una rotazione, allora detC = 1 e $C^T = C^{-1}$.

Dimostrazione. Si prova subito che detC = 1. Inoltre, si ha che

$$C^TC = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Quindi, la trasposta di C si comporta da inversa di C. Per l'unicità dell'inversa si ha la tesi. ■

23.6 Lemma. Se A e una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, allora esiste una base di R^2 formata da due autovettori $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ di A. Inoltre, $\mathbf{w_1} \perp \mathbf{w_2}$.

Dimostrazione. Se A = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, allora $p_A(\lambda) = (a-\lambda)^2$. Quindi, A un unico autovalore $\lambda_1 = a$.

Inoltre, per ogni vettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y)$ si ha che

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw_x \\ aw_y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

Quindi, ogni vettore non nullo di R^2 è un autovettore di A relativo all'unico autovalore $\lambda_1 = a$.

Prendendo $\mathbf{w_1} = (w_x, w_y) \neq (0, 0)$ e $\mathbf{w_2} = (-w_y, w_x)$ si ha che $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ sono linearmente indipendenti.

Quindi, la coppia ($\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_1}$) è una base di R^2 formata da due autovettori $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ di A.

Inoltre, si ha che $\mathbf{w_1} \bullet \mathbf{w_2} = w_x(-w_y) + w_y w_x = 0$, quindi, $\mathbf{w_1} \perp \mathbf{w_2}$.

Ora, sia A = $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Quindi, $b \neq 0$ vel $a \neq c$.

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$. Siccome il suo discriminante $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$ è strettamente positivo, la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e distinti. Quindi, esiste una base di R^2 formata da due autovettori $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ di A.

Inoltre, si ha che $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$.

Siccome $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$ e $\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2$, si prova facilmente che

$$b^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = 0 \quad (\spadesuit).$$

Un autovettore relativo all'autovalore λ_1 è un'autosoluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} (a-\lambda_1) & b \\ b & (c-\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Siccome le due equazioni del sistema sono linearmente dipendenti, è sufficiente trovare solo un'autosoluzione della prima equazione. Per cui gli autovettori relativi a λ_1 sono tutte e soli i vettori $\mathbf{w_1} = \alpha(b, \lambda_1 - a)$ per ogni α reale diverso da zero. In modo analogo, si prova che gli autovettori relativi a λ_2 sono tutte e soli i vettori $\mathbf{w_2} = \beta(b, \lambda_2 - a)$ per ogni β reale diverso da zero.

Ora, calcoliamo il prodotto scalare

$$\mathbf{w_1} \bullet \mathbf{w_2} = [\alpha(b, \lambda_1 - a)] \bullet [\beta(b, \lambda_2 - a)] = \alpha\beta[(b, \lambda_1 - a) \bullet (b, \lambda_2 - a)] = \alpha\beta[b^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)] = 0$$

Tenendo conto di ($\spadesuit$), abbiamo che $\mathbf{w_1} \bullet \mathbf{w_2} = 0$ e, quindi, che $\mathbf{w_1} \perp \mathbf{w_2}$. ■

23.7 Teorema. Se A e una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2, allora A è diagonalizzabile tramite una matrice C associata ad una rotazione.

Dimostrazione. Se A = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, allora è gia diagonale. Inoltre, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Quindi, C = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix}$ è la matrice associata alla rotazione di ampiezza $|\theta| = 0$.

Ora, sia A = $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Per il Lemma 23.6, la matrice A ha due autovalori λ_1 e λ_2 reali e distinti.

Quindi, la matrice A è diagonalizzabile.

Sia **w** = $(w_x, w_y) \neq (0, 0)$ un autovettore relativo all'autovalore λ_1.

Si noti che possiamo sempre scegliere **w** in modo tale che $w_x \geq 0$.

Se indichiamo con h>0 la lunghezza di **w**, il vettore **u** = $(u_x , u_y) := \frac{1}{h}(w_x , w_y)$ è un autoversore relativo a λ_1. Si noti che $u_x = \frac{1}{h} w_x \geq 0$. Ora, si consideri il vettore **v** := $(-u_y , u_x)$.

Siccome $||\mathbf{v}||^2 = (-u_y)^2 + u_x{}^2 = u_y{}^2 + u_x{}^2 = u_x{}^2 + u_y{}^2 = ||\mathbf{u}||^2 = 1^2 = 1$, **v** è un versore.

Si ha subito che $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$ ovvero che **u** e **v** sono ortogonali.

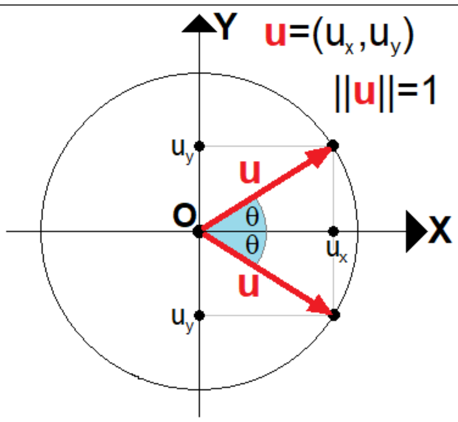
Quindi, per il Lemma 23.6, il vettore **v** := $(-u_y , u_x)$ è un autoversore relativo a λ_2.

Siccome $||\mathbf{u}|| = 1$

esiste un unico $\theta \in (-\pi, \pi]$ tale che

$u_x = \cos\theta$ e $u_y = \sin\theta$.

Inoltre, siccome $u_x \geq 0$, allora $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



A questo punto, abbiamo che **u** = $(u_x, u_y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ e **v** = $(-u_y , u_x) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

Ora, se poniamo $\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, allora la matrice che ha come colonne gli autoversori **u** e **v** relativi a λ_1 e a λ_2 rispettivamente è C = $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che è una matrice associata ad una rotazione.

L'ampiezza della rotazione è data da $|\theta| \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che $\cos\theta = u_x \geq 0$.

Il verso di rotazione è antiorario/orario a seconda che $\sin\theta = u_y$ sia positivo/negativo.

Infine, si ha che $A = C\Lambda C^{-1} = C\Lambda C^T$. ■

Se A è una matrice quadrata ad elementi reali simmetrica di ordine 2.

Il Teorema 23.7 ci fornisce un **metodo pratico e veloce** per diagonalizzare A tramite un'opportuna matrice C associata ad una rotazione.

Passo 1) **Si trovano** i due autovalori distinti λ_1 e λ_2 di A.

Passo 2) **Si sceglie**, a piacere, uno dei due autovalori di A, ad esempio λ_1.

Passo 3) **Si trova** un autovettore **w** = (w_x, w_y) relativo a λ_1 con $w_x \geq 0$.

Passo 4) **Si calcola** la lunghezza $h = [w_x^{\,2} + w_y^{\,2}]^{1/2}$ dell'autovettore **w** = (w_x, w_y).

Passo 5) **Si prende** l'autoversore **u** = $(u_x , u_y) := \frac{1}{h}(w_x, w_y)$ dove ovviamente $u_x \geq 0$.

Passo 6) **Si prende** il vettore **v** := $(-u_y , u_x)$ come autoversore relativo a λ_2.

Passo 7) Ora, la matrice C $=\begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix}$ è una matrice associata ad una rotazione.

L'ampiezza della rotazione è data da $|\theta|\in[0, \frac{\pi}{2}]$ tale che $\cos\theta = u_x \geq 0$.

Il verso di rotazione è antiorario/orario a seconda che $\sin\theta = u_y$ sia positivo/negativo.

Passo 8) Infine, si ha che $A = C\Lambda C^{-1} = C\Lambda C^T$ con $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

23.8 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica A = $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice C associata ad una rotazione che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 8$. Un autovettore relativo a $\lambda_1 = 3$ con $w_x \geq 0$ è **w** = (1, 2).

Poiché $\|\mathbf{w}\|^2 = \sqrt{5}$, il vettore **u** = $(u_x , u_y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 3$.

Prendiamo **v** := $(-u_y , u_x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 8$.

Ora, la matrice C $=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice associata ad una rotazione.

Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$ ovvero

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right]\right)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 \end{array}\right]\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

23.9 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$.

Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice C associata ad una rotazione che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -7$. Un autovettore relativo a $\lambda_1 = 5$ con $w_x \geq 0$ è $\mathbf{w} = (\sqrt{3}, 1)$.

Poiché $\|\mathbf{w}\| = 2$, il vettore $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 5$.

Prendiamo $\mathbf{v} := (-u_y, u_x) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 8$.

Ora, la matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ è una matrice associata ad una rotazione.

Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$ ovvero

$$\begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

23.10 Esercizio. Si consideri la seguente matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix}$.

Trovare una matrice diagonale Λ ed una matrice C associata ad una rotazione che diagonalizzano A.

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -25$. Un autovettore relativo a $\lambda_1 = 0$ con $w_x \geq 0$ è $\mathbf{w} = (4, 3)$.

Poiché $\|\mathbf{w}\| = 5$, $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = \frac{1}{5}(4, 3) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ è un autoversore relativo a $\lambda_1 = 0$.

Prendiamo $\mathbf{v} := (-u_y, u_x) = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = -25$.

Ora, la matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ è una matrice associata ad una rotazione.

Ponendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$ si ha che $A = C\Lambda C^T$ ovvero

$$\begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

23.11. Definizione. Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano. Diremo *curva* l'insieme $\mathcal{F}$ di tutti e soli i punti del piano (ovvero il **luogo** dei punti del piano) le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo F(x, y) = 0. Diremo anche che F(x, y) = 0 è l'equazione cartesiana della curva $\mathcal{F}$ e scriveremo, brevemente, $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0.

23.12. Definizione. Se F(x, y) è un polinomio in x e y (a coefficienti costanti) di grado *n*, allora si dice che la curva $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0 è una *curva algebrica di ordine n*.

23.13. Esempi. La curva $\mathcal{F}$: $2x - 3y - 9 = 0$ è una retta;

la curva $\mathcal{F}$: $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$ è un'ellisse;

la curva $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ è una circonferenza di centro l'origine e raggio 2;

la curva $\mathcal{F}$: $x^2 + y + 3 = 0$ è una parabola;

la curva $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 + 5 = 0$ non ha punti reali;

la curva $\mathcal{F}$: $3(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$ ha il punto (1, –2) come suo unico punto reale;

la curva $\mathcal{F}$: $[(x - 1)(x + 1)]^2 + (y - 3)^2 = 0$ ha i punti (1, 3) e (–1, 3)) come suoi unici punti reali.

23.14. Osservazione. Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano.

Una curva $\mathcal{F}$ di equazione F(x, y) = 0 è

23.14. 1. simmetrica rispetto all'asse X se per ogni $(\alpha, \beta) \in R^2$ si ha che $F(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow F(\alpha, -\beta) = 0$;

23.14.2. simmetrica rispetto all'asse Y se per ogni $(\alpha, \beta) \in R^2$ si ha che $F(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow F(-\alpha, \beta) = 0$;

23.14.3. simmetrica rispetto ad O se per ogni $(\alpha, \beta) \in R^2$ si ha che $F(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow F(-\alpha, -\beta) = 0$.

23.15. Definizione. Date due curve $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0 e $\mathcal{G}$: G(x, y) = 0 del piano, diremo

23.15.1. *curva intersezione di* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$, e la indicheremo col simbolo $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, l'insieme di tutti e soli i punti del piano che appartengono ad <u>entrambe</u> le curve;

23.15.2. *curva unione di* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$, e la indicheremo col simbolo $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, l'insieme di tutti e soli i punti del piano che appartengono ad <u>almeno una</u> delle due curve.

23.16. Osservazione. Date due curve $\mathcal{F}$: F(x, y) = 0 e $\mathcal{G}$: G(x, y) = 0 del piano, si ha che

23.16.1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} : \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$

23.16.2. $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$: F(x, y)G(x, y) = 0

23.17. Esempio. Date le curve (rette) $F(x, y) = 2x - 3y - 9 = 0$ e $G(x, y) = 2x + y - 5 = 0$ si ha che

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{(3, -1)\}$ $\qquad$ $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} : (2x - 3y - 9)(2x + y - 5) = 4x^2 - 4xy - 3y^2 - 28x + 6y + 45 = 0$

23.18. Definizione. Diremo *conica* ogni curva algebrica di ordine 2.

Quindi, una conica è il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

23.19. Lemma. Se rispetto ad un riferimento RC(O, **i**, **j**) del piano $\mathcal{C}$ è una conica di equazione

$$(\heartsuit)\ \ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

allora esiste un riferimento RC(O, **u**, **v**) tale che rispetto ad esso la conica $\mathcal{C}$ ha equazione

$$(\clubsuit)\ \ \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + gx' + hy' + f = 0 \qquad \text{con } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$$

Inoltre, il riferimento RC(O, **u**, **v**) si ottiene tramite una rotazione del riferimento RC(O, **i**, **j**).

Dimostrazione. Ponendo

$$A := \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ ,\quad X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G := [\, d \quad e \,]$$

si verifica subito che:

(1) $X^TAX = ax^2 + bxy + cy^2$

(2) $GX = dx + ey$

per cui la ($\heartsuit$) si può riscrivere così

$$(\spadesuit)\ \ X^TAX + GX + f = 0$$

Poiché A è simmetrica, esistono una matrice diagonale $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ed una matrice $C = \left[\begin{array}{c|c} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{array}\right]$

associata ad una rotazione tali che $A = C\Lambda C^T$. Se consideriamo i vettori **u** := u_x**i** + u_y**j** e **v** := v_x**i** + v_y**j**, allora la terna (O, **u**, **v**) un riferimento cartesiano ortonormale che si ottiene "*ruotando*" RC(O, **i**, **j**).

Ponendo $Y := \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ le equazioni della rotazione sono $X = CY$, da cui $Y = C^{-1}X = C^TX$. Si ha che:

(I) $X^TAX = X^T(C\Lambda C^T)X = (X^TC)\Lambda(C^TX) = (C^TX)^T\Lambda(C^TX) = Y^T\Lambda Y = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$.

Inoltre, ponendo $GC = H = [\, g \quad h \,]$ si ha che

(II) $GX = G(CY) = (GC)Y = HY = gx' + hy'$.

Tenendo conto di (I) e (II) la ($\spadesuit$) diventa $Y^T\Lambda Y + HY + f = 0$ ovvero

$$(\clubsuit)\ \ \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + gx' + hy' + f = 0$$

Inoltre, essendo $A \neq 0$ si ha che anche $\Lambda \neq 0$. Quindi, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. ■

23.20. Teorema. (*classificazione delle coniche nel piano euclideo*)

Sia RC(O, **i**, **j**) un riferimento cartesiano ortonormale del piano. Se $\mathcal{C}$ è una conica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

allora esiste un riferimento RC(O', **u**, **v**), ottenuto con una rototraslazione di RC(O, **i**, **j**), tale che rispetto ad esso la conica $\mathcal{C}$ ha una delle seguenti nove equazioni:

1) $(x'')^2 + n = 0$ con $n > 0$ — *conica senza punti reali*

2) $(x'')^2 = 0$ — *due rette reali e coincidenti*

3) $(x'' - p)(x'' + p) = 0$ con $p \neq 0$ — *due rette reali distinte parallele*

4) $y'' = q(x'')^2$ — *parabola*

5) $|\lambda_1|(x'')^2 + |\lambda_2|(y'')^2 = 0$ con $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ — *conica con un solo punto reale*

6) $(\sqrt{|\lambda_1|}\, x'' + \sqrt{|\lambda_2|}\, y'')(\sqrt{|\lambda_1|}\, x'' - \sqrt{|\lambda_2|}\, y'') = 0$ con $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ — *due rette reali distinte incidenti*

7) $\dfrac{(x'')^2}{\alpha^2} + \dfrac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$ — *ellisse*

8) $\dfrac{(x'')^2}{\alpha^2} + \dfrac{(y'')^2}{\beta^2} = -1$ con $\alpha\beta \neq 0$ — *ellisse immaginaria*

9) $\dfrac{(x'')^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$ — *iperbole*

Dimostrazione. Per il Lemma 23.19 esiste un riferimento RC(O, **u**, **v**) tale che rispetto ad esso la conica $\mathcal{C}$ ha equazione

$$(\clubsuit)\quad \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + gx' + hy' + f = 0 \qquad \text{con } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$$

Inoltre, il riferimento RC(O, **u**, **v**) si ottiene tramite una **rotazione** del riferimento RC(O, **i**, **j**).

• **Se uno dei due autovalori è uguale a zero**, allora sia $\lambda_2 = 0$. Ovviamente, $\lambda_1 \neq 0$. Si ha che

$$\lambda_1(x')^2 + gx' + hy' + f = 0$$

$$(x')^2 + \frac{g}{\lambda_1}x' + \frac{h}{\lambda_1}y' + \frac{f}{\lambda_1} = 0$$

$$\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \frac{h}{\lambda_1}y' + \frac{f}{\lambda_1} = 0$$

$$\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \frac{h}{\lambda_1}y' + \frac{f}{\lambda_1} - \left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 = 0$$

Ponendo $\delta := \dfrac{g}{2\lambda_1}$, $m := \dfrac{h}{\lambda_1}$ e $n := \dfrac{f}{\lambda_1} - \left(\dfrac{g}{2\lambda_1}\right)^2$ l'equazione precedente diventa

$$(\spadesuit)\ \ (x' + \delta)^2 + my' + n = 0$$

Se **m = 0**, allora l'equazione ($\spadesuit$) diventa

$$(x' + \delta)^2 + n = 0$$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} x'' = x' + \delta \\ y'' = y' \end{cases}$ dal RC(O, **u**, **v**) si ottiene un RC(O', **u**, **v**) tale che rispetto ad esso l'equazione della conica $\mathcal{C}$ diventa

$$(x'')^2 + n = 0.$$

1) Se n > 0, allora l'equazione $(x'')^2 + n = 0$ non ha soluzioni reali. Quindi, $\mathcal{C}$ non ha punti reali.

2) Se n = 0, allora l'equazione diventa $(x'')^2 = 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è l'unione di due rette reali coincidenti.

3) Se n < 0, allora ponendo $n := -p^2$ l'equazione diventa $(x'')^2 - p^2 = (x'' - p)(x'' + p) = 0$ con $p \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è l'unione di due rette reali distinte parallele.

4) Se **m ≠ 0**, allora l'equazione ($\spadesuit$) diventa

$$\frac{1}{m}(x' + \delta)^2 + y' + \frac{n}{m} = 0$$

$$y' + \frac{n}{m} = -\frac{1}{m}(x' + \delta)^2$$

ponendo $q := -\dfrac{1}{m}$ e $\gamma = \dfrac{n}{m}$ si ha $y' + \gamma = q(x' + \delta)^2$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} x'' = x' + \delta \\ y'' = y' + \gamma \end{cases}$ dal RC(O, **u**, **v**) si ottiene un RC(O', **u**, **v**) tale che rispetto ad esso l'equazione della conica $\mathcal{C}$ diventa $y'' = q(x'')^2$. Quindi, $\mathcal{C}$ è una parabola.

• **Se nessuno dei due autovalori èuguale a zero**, allora l'equazione ($\clubsuit$) si può riscrivere così:

$$\lambda_1(x')^2 + gx' + \lambda_2(y')^2 + hy' + f = 0$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_1\left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 + f = 0$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 + f - \lambda_1\left(\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{h}{2\lambda_2}\right)^2 = 0$$

Ponendo $\delta := \dfrac{g}{2\lambda_1}$, $\gamma := \dfrac{h}{2\lambda_2}$ e $n = f - \lambda_1\delta^2 - \lambda_2\gamma^2 = f - \lambda_1\left(\dfrac{g}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\dfrac{h}{2\lambda_2}\right)^2$ abbiamo

$$\lambda_1(x' + \delta)^2 + \lambda_2(y' + \gamma)^2 + n = 0$$

Effettuando la **traslazione** $\begin{cases} x'' = x' + \delta \\ y'' = y' + \gamma \end{cases}$ dal RC(O, **u**, **v**) si ottiene un RC(O', **u**, **v**) tale che rispetto ad esso l'equazione della conica $\mathcal{C}$ diventa

$$(\blacklozenge) \quad \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + n = 0$$

Se **n = 0**, allora l'equazione ($\blacklozenge$) diventa

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = 0.$$

5) Se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, allora l'equazione diventa $|\lambda_1|(x'')^2 + |\lambda_2|(y'')^2 = 0$ che ha la coppia $(0, 0)$ come unica soluzione reale. Quindi, $\mathcal{C}$ ha un solo punto reale.

6) Se $\lambda_1\lambda_2 < 0$, allora l'equazione diventa $|\lambda_1|(x'')^2 - |\lambda_2|(y'')^2 = 0$ ovvero

$$(\sqrt{|\lambda_1|}\, x'' + \sqrt{|\lambda_2|}\, y'')(\sqrt{|\lambda_1|}\, x'' - \sqrt{|\lambda_2|}\, y'') = 0$$

Quindi, $\mathcal{C}$ è l'unione di due rette reali distinte incidenti.

Se **n ≠ 0**, allora l'equazione ($\blacklozenge$) si può riscrivere così

$$(\heartsuit) \quad (-\frac{\lambda_1}{n})(x'')^2 + (-\frac{\lambda_2}{n})(y'')^2 = 1$$

Se $\boldsymbol{\lambda_1\lambda_2 > 0}$, allora $(-\frac{\lambda_1}{n})(-\frac{\lambda_2}{n}) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{n^2} > 0$. Quindi, abbiamo i seguenti due casi:

7) Se $(-\frac{\lambda_1}{n}) > 0$ e $(-\frac{\lambda_2}{n}) > 0$, allora ponendo $\alpha^2 := (-\frac{n}{\lambda_1}) > 0$ e $\beta^2 := (-\frac{n}{\lambda_2}) > 0$ l'equazione ($\heartsuit$) diventa $\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

8) Se $(-\frac{\lambda_1}{n}) < 0$ e $(-\frac{\lambda_2}{n}) < 0$, allora ponendo $\alpha^2 := \frac{n}{\lambda_1} > 0$ e $\beta^2 := \frac{n}{\lambda_2} > 0$ l'equazione ($\heartsuit$) diventa $\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} = -1$ con $\alpha\beta \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ non ha punti reali e si dice *ellisse immaginaria*.

9) Se $\boldsymbol{\lambda_1\lambda_2 < 0}$, allora $(-\frac{\lambda_1}{n})(-\frac{\lambda_2}{n}) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{n^2} < 0$. Siccome gli autovalori sono discordi, possiamo sempre sceglierli in modo che sia $(-\frac{\lambda_1}{n}) > 0$ e $\frac{\lambda_2}{n} > 0$. Ponendo $\alpha^2 := (-\frac{n}{\lambda_1}) > 0$ e $\beta^2 := \frac{n}{\lambda_2} > 0$ l'equazione ($\heartsuit$) diventa $\frac{(x'')^2}{\alpha^2} - \frac{(y'')^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha\beta \neq 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è un'iperbole. ■