# Coordinate polari nel piano.

Consideriamo un riferimento cartesiano ortonormale RC(O, **X**, **Y**) nel piano.

Abbiamo visto che ad ogni punto del piano è possibile associare un'unica coppia di numeri reali detta coppia delle coordinate cartesiane di quel punto.

Ora, vediamo come introdurre un nuovo sistema di coordinate. A tal fine fissiamo:

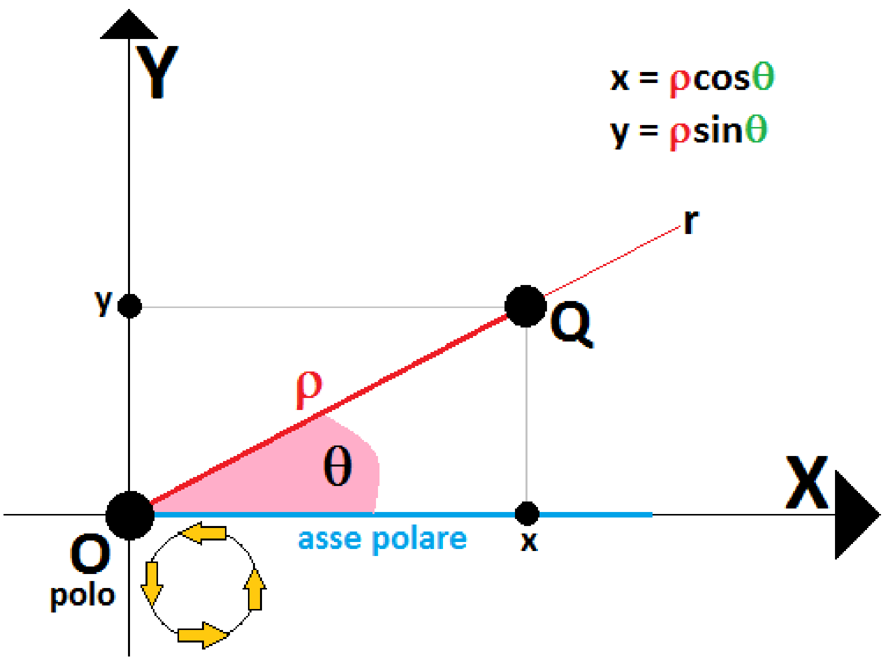
1) un punto del piano che diremo *polo* (scegliamo come polo l'origine O);
2) una semiretta avente origine nel polo che diremo *asse polare* (scegliamo come asse polare il semiasse positivo delle ascisse);
3) un'unità di misura (scegliamo la stessa del riferimento cartesiano);
4) un verso positivo di rotazione attorno ad O (scegliamo quello antiorario).

Ora, se Q è un punto del piano diverso dal punto O, allora esiste un'unica semiretta r avente origine in O e passante per il punto Q.

Quindi, se Q è un punto del piano diverso dal punto O, allora si ha che:

- esiste un unico numero reale $\rho > 0$ tale che $\rho$ = lunghezza del segmento OQ;

- esiste un unico numero reale $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che $\theta$ è l'angolo che la semiretta r forma con l'asse polare nel verso positivo di rotazione.



Per cui abbiamo una funzione $f$ che ad ogni punto Q diverso da O associa un'unica coppia ordinata di numeri reali ($\rho$, $\theta$) con $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

E' facile provare che tale funzione è biettiva.

Infatti, consideriamo un punto Q' diverso sia da O che da Q. Indichiamo con r' l'unica semiretta avente origine in O e passante per Q' e con ($\rho'$, $\theta'$) l'unica coppia che la funzione $f$ associa al punto Q'.

Se $r \neq r'$, allora $\theta \neq \theta'$. Invece, se $r \equiv r'$, allora $\rho \neq \rho'$, essendo $Q \neq Q'$.

In ogni caso si ha che $(\rho, \theta) \neq (\rho', \theta)$. Quindi, $f$ è iniettiva.

Inoltre, per ogni coppia $(\rho, \theta)$ con $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ si consideri la semiretta t avente origine in O che forma un angolo $\theta$ con l'asse polare nel verso positivo di rotazione. Sulla semiretta retta t si prenda il punto Q avente distanza $\rho > 0$ dal polo O. Inoltre, siccome $\rho > 0$ si ha che $Q \neq O$. Per cui, nel piano esiste un punto Q diverso da O al quale la funzione $f$ associa la coppia $(\rho, \theta)$. Quindi, $f$ è suriettiva.

**Definizione**. Se Q è un punto diverso da O, la coppia di numeri reali ($\rho$, $\theta$) viene detta coppia delle ***coordinate polari*** del punto Q. In particolare, la prima coordinata $\rho$ viene detta *raggio vettore*. Invece, la seconda coordinata $\theta$ viene detta *anomalia*.

**Osservazione**. Cosa fare se Q = O?

Ovviamente, se Q = O, allora la lunghezza del segmento OQ è zero. Inoltre, qualunque semiretta uscente dal polo O passa per il punto Q. Tenendo conto di ciò, le coordinate polari del punto O vengono poste uguali alla coppia $(0, \theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$ ovvero l'anomalia del polo O è indeterminata.

## Da coordinate polari a coordinate cartesiane.

Sia Q un punto del piano diverso da O. Se indichiamo con (ρ, θ) le coordinate polari di Q e con (x, y) le coordinate cartesiane di Q, allora si hanno subito le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases} \quad (\spadesuit)$$

che ci permettono di trovare le coordinate cartesiane (x, y) note quelle polari (ρ, θ).

## Da coordinate cartesiane a coordinate polari.

Ora, supponiamo di conoscere le cartesiane (x, y) di un punto Q e di voler trovare quelle polari (ρ, θ) dello stesso punto Q. Da (♠) si ha subito che $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Quindi, il raggio vettore del punto Q è $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Inoltre, dalle equazioni (♠) otteniamo $\begin{cases} cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad (\heartsuit)$

Quindi, l'anomalia del punto Q è l'angolo θ tale che valgano le (♥).

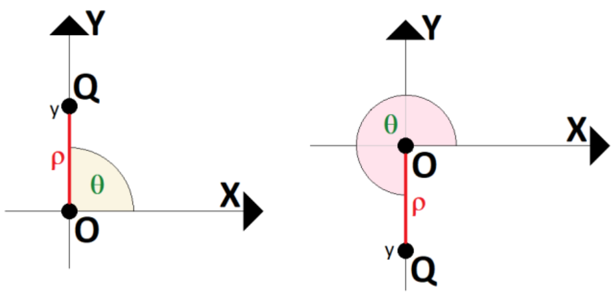
**Esempio**. Sia Q il punto di coordinate cartesiane (x, y) = $(-3, \sqrt{3})$.

Il raggio vettore di Q è $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. L'anomalia di Q è l'angolo θ tale che $cos\theta = \frac{x}{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2}$. Quindi, si ha che $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$.

Ora, vediamo un altro modo per trovare l'anomalia del punto Q.

Se Q ha coordinate (0, y) con y>0, allora l'anomalia di Q è θ = $\frac{\pi}{2}$.

Invece, se Q ha coordinate (0, y) con y<0, allora l'anomalia di Q è θ = $\frac{3}{2}\pi$.

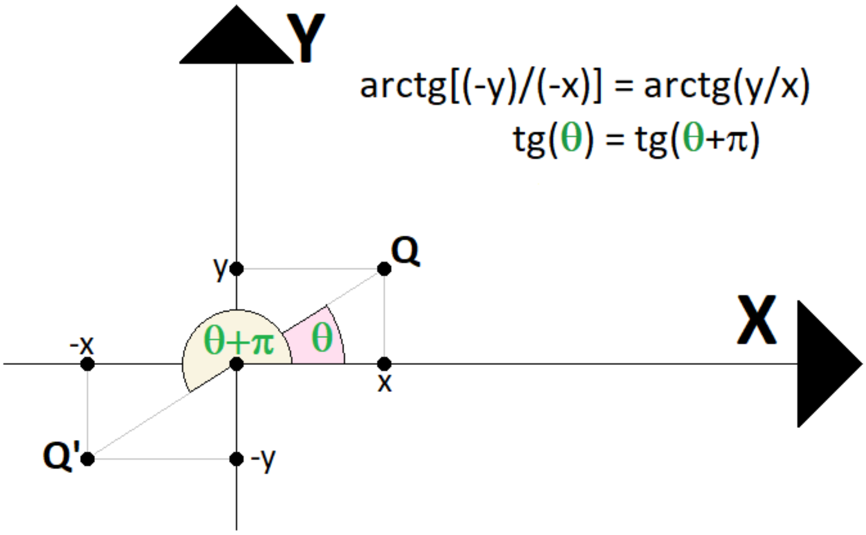


Se Q ha coordinate (x, y) con x ≠ 0, allora da (♥) si ha che $\frac{y}{x} = \frac{sin\theta}{cos\theta} = tg\theta$.

Siccome $tg\theta = tg(\theta + \pi)$, non siamo in grado di stabilire quale sia l'anomalia di Q.

Infatti, si consideri il punto Q'(–x, –y) simmetrico di Q rispetto all'origine O. Se indichiamo con (ρ', θ') le coordinate polari di Q' allora si ha che ρ' = ρ e θ' = θ + π.

Siccome $\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$ come facciamo a capire quale sia l'anomalia di Q e quale quella di Q'?




Si osservi che, essendo ρ > 0, da $x = \rho cos\theta$ si ha che $cos\theta$ ha lo stesso segno di x. Così come $\cos\theta' = \cos(\theta + \pi) = -cos\theta$ ha lo stesso segno di (–x).

Tenendo conto di quanto appena osservato l'anomalia di un punto Q(x, y) è l'angolo θ tale che $\theta = arctg(\frac{y}{x})$ e, contemporaneamente, $cos\theta$ ha lo stesso segno di x.

**Esempio**. Trovare l'anomalia θ del punto Q di coordinate cartesiane (x, y) = $(-3, \sqrt{3})$.

Da $arctg\left(\frac{y}{x}\right) = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Si ha che $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} + \pi\right\}$.

Infine, siccome $cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ ha segno opposto a quello di x = –3, l'anomalia di Q **NON** è $\theta = -\frac{\pi}{6}$. Quindi, l'anomalia di Q è $\theta = -\frac{\pi}{6} + \pi$.

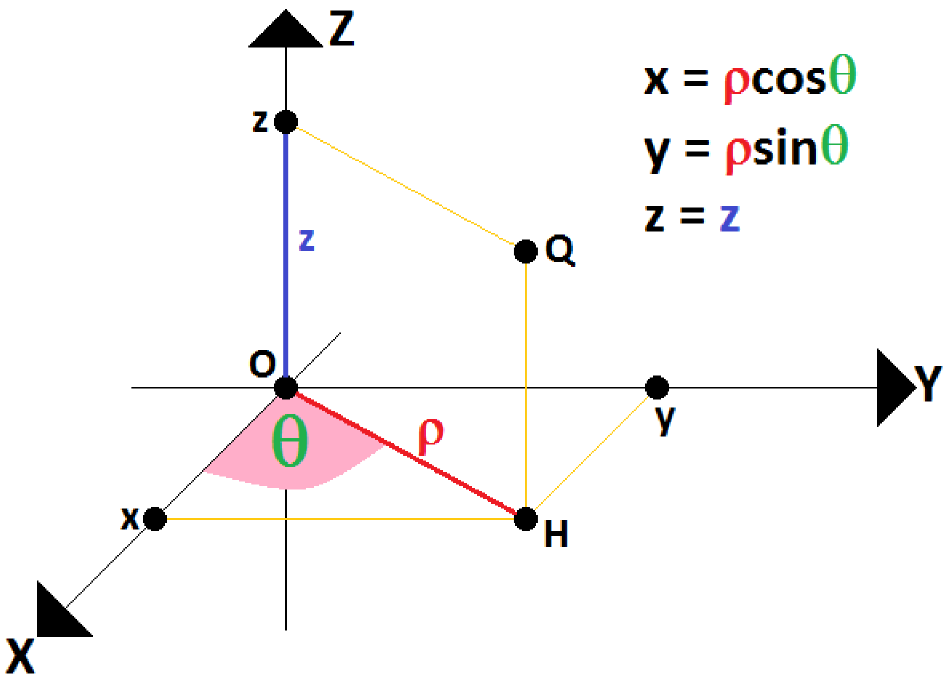
# Coordinate cilindriche.

Consideriamo un riferimento cartesiano ortonormale RC(O, **X**, **Y**, **Z**) nello spazio.

Come nel paragrafo precedente, fissiamo un sistema di coordinate polari nel piano XY avente il polo nell'origine O e come asse polare il semiasse positivo delle ascisse.

Sia ora Q un punto dello spazio e sia (x, y, z) la terna delle sue coordinate cartesiane.

Sia H la proiezione ortogonale del punto Q sul piano XY. Le coordinate di H nel piano XY sono date dalla coppia (x, y). Indichiamo con $(\rho, \theta)$ le coordinate polari di H.




**Definizione.** La terna $(\rho, \theta, z)$ viene detta terna delle *coordinate cilindriche* di Q.

**Osservazione.** Se Q(0, 0, z) è un punto dell'asse Z, allora la sua proiezione ortogonale sul piano XY è proprio l'origine O. Quindi, le coordinate cilindriche di Q sono date dalla terna $(0, \theta, z)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$ ovvero l'anomalia di Q è indeterminata.

Tenendo conto di quanto visto finora si hanno le equazioni seguenti

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z$$

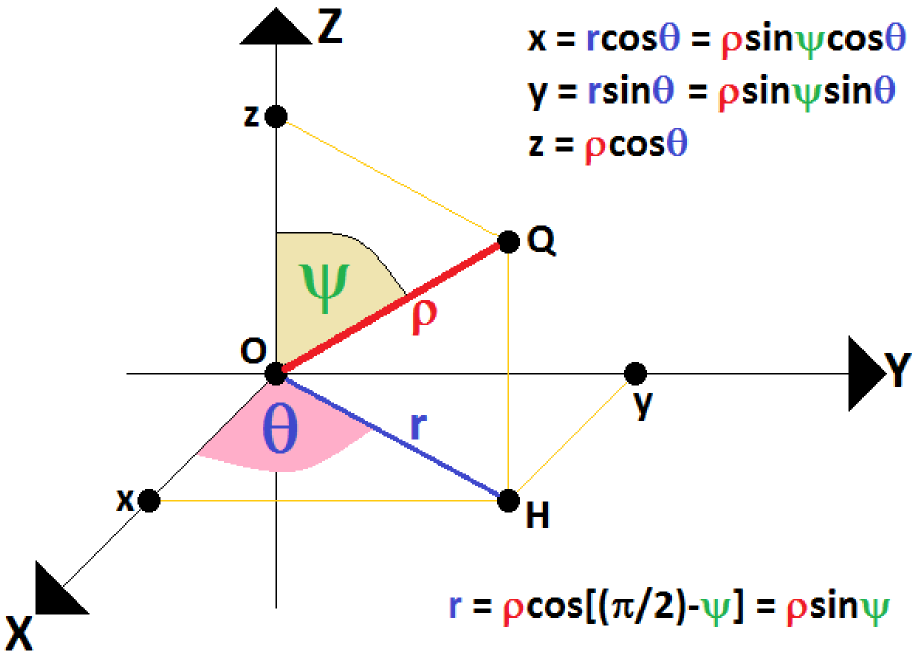
che ci permettono di passare dalle coordinate cilindriche a quelle cartesiane.

# Coordinate polari nello spazio.

Consideriamo un riferimento cartesiano ortonormale RC(O, **X**, **Y**, **Z**) nello spazio.

Fissiamo un sistema di coordinate polari nel piano XY avente il polo nell'origine O e come asse polare il semiasse positivo delle ascisse.

Sia ora Q un punto dello spazio e sia (x, y, z) la terna delle sue coordinate cartesiane. Sia $\rho$ la lunghezza del segmento OQ. Sia H la proiezione ortogonale del punto Q sul piano XY. Indichiamo con (r, $\theta$) le coordinate polari del punto H. Infine, sia $\psi$ l'angolo convesso che il semiasse positivo Z forma con la semiretta avente origine in O e passante per il punto Q.




**Definizione.** La terna ($\rho$, $\theta$, $\psi$) viene detta terna delle *coordinate polari* di Q.

In particolare, $\rho$ viene detto *raggio vettore* mentre gli angoli $\theta$ e $\psi$ vengono detti rispettivamente *azimut* (o *longitudine*) e *distanza zenitale* (o *colatitudine*).

Siccome il triangolo OHQ è rettangolo in H, si ha che **r** = $\rho\cos(\frac{\pi}{2}-\psi) = \rho\sin\psi$.

Quindi, si ha che **x** = $r\cos\theta = \rho\sin\psi\cos\theta$ e **y** = $r\sin\theta = \rho\sin\psi\sin\theta$.

Infine, per come è stata definita la distanza zenitale, si ha subito che **z** = $\rho\cos\psi$.