**Esercizio 1.** Classificare la conica: $x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$.

a = 1 b = –10 c = 1 d = 10 e = –2 f = 1 $A := \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda - 6)(\lambda + 4) \Rightarrow \lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$.

Per il Teorema 23.7, A è diagonalizzabile tramite una matrice C associata ad una rotazione.

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 6$, cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 6I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 6I) = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x + y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(1, -1)\ \forall t \in R - \{0\}$

Dato che $\|(1, -1)\| = \sqrt{2}$, <u>scegliamo</u> **u** $= (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 6$.

Ora, <u>prendiamo</u> **v** $= (-u_y, u_x) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = -4$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione. Si osservi anche che $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi, $\theta = -\pi/4$ radianti. Cioè, il RC(O, **u**, **v**) si ottiene *ruotando* il RC(O, **i**, **j**) attorno ad O di 45° in senso orario.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = x^2 - 10xy + y^2$ nel complesso $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 6(x')^2 - 4(y')^2$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 10x - 2y$ nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d\ \ e\,]C = [\,g\ \ h\,]$. Quindi,

$$[\,10\ \ -2\,]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = [\,6\sqrt{2}\ \ 4\sqrt{2}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso $10x - 2y$ nel complesso $6\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione $6(x')^2 - 4(y')^2 + 6\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' + 1 = 0$.

$$6(x')^2 + 6\sqrt{2}x' - 4(y')^2 + 4\sqrt{2}y' + 1 = 0$$

$$6(x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 - 3 - 4(y' - \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2 + 1 = 0$$

$$6(x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 - 4(y' - \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2 + 1 - 3 = 0$$

$$6(x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 - 4(y' - \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ otteniamo l'equazione $6(x'')^2 - 4(y'')^2 = 0$ ovvero $(\sqrt{6}x'' + 2y'')(\sqrt{6}x'' - 2y'') = 0$. Quindi, la conica è **unione di due rette reali distinte incidenti**.

**Esercizio 2.** Classificare la conica: $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 60x - 70y + 105 = 0$.

a = 8  b = −12  c = 17  d = 60  e = −70  f = 105  $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = (\lambda - 5)(\lambda - 20) \Rightarrow \lambda_1 = 5$ , $\lambda_2 = 20$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 5$ cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 5I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 5I) = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -6x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - 2y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(2, 1)\ \ \forall t \in R - \{0\}$

Dato che $\|(2, 1)\| = \sqrt{5}$, scegliamo $\mathbf{u} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 5$.

Ora, prendiamo $\mathbf{v} = (-u_y , u_x) = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 20$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 8x^2 - 12xy + 17y^2$

nel complesso $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 5(x')^2 + 20(y')^2$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 60x - 70y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d\ \ e\,]C = [\,g\ \ h\,]$. Quindi,

$$[\,60\ \ -70\,]\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = [\,10\sqrt{5}\ \ -40\sqrt{5}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $60x - 70y$

nel complesso $10\sqrt{5}\,x' - 40\sqrt{5}\,y'$. Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione

$$5(x')^2 + 20(y')^2 + 10\sqrt{5}x' - 40\sqrt{5}y' + 105 = 0$$

$$(x')^2 + 2\sqrt{5}x' + 4(y')^2 - 10\sqrt{5}y' + 21 = 0$$

$$(x' + \sqrt{5})^2 - 5 + 4(y' - \sqrt{5})^2 - 20 + 21 = 0$$

$$(x' + \sqrt{5})^2 + 4(y' - \sqrt{5})^2 - 4 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' + \sqrt{5} \\ y'' = y' - \sqrt{5} \end{cases}$ otteniamo l'equazione $(x'')^2 + 4(y'')^2 = 4$ ovvero

$\frac{1}{4}(x'')^2 + (y'')^2 = 1$. Quindi, la conica è un'**ellisse**.

**Esercizio 3.** Classificare la conica: $3x^2 + 10\sqrt{3}\,xy - 7y^2 + 4\sqrt{3}\,x - 44y - 52 = 0$.

$a = 3$ $\quad b = 10\sqrt{3}$ $\quad c = -7$ $\quad d = 4\sqrt{3}$ $\quad e = -44$ $\quad f = -52$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -7 \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 96 = (\lambda - 8)(\lambda + 12) \Rightarrow \lambda_1 = 8\ ,\ \lambda_2 = -12$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 8$ cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 8I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 8I) = \begin{bmatrix} -5 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 5\sqrt{3}y = 0 \\ 5\sqrt{3}x - 15y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - \sqrt{3}\,y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(\sqrt{3}, 1)\ \ \forall t \in R-\{0\}$

Dato che $\|(\sqrt{3}, 1)\| = 2$, scegliamo $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 8$.

Ora, prendiamo $\mathbf{v} = (-u_y, u_x) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = -12$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione. Si osservi anche che $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Quindi, $\theta = \pi/6$ radianti.

Cioè, il RC(O, **u**, **v**) si ottiene *ruotando* il RC(O, **i**, **j**) attorno ad O di 30° in senso antiorario.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 3x^2 + 10\sqrt{3}\,xy - 7y^2$

nel complesso $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 8(x')^2 - 12(y')^2$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 4\sqrt{3}\,x - 44y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,4\sqrt{3} \quad -44\,]\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = [\,-16 \quad -24\sqrt{3}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $4\sqrt{3}x - 44y$

nel complesso $-16x' - 24\sqrt{3}y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione $8(x')^2 - 12(y')^2 - 16x' - 24\sqrt{3}y' - 52 = 0$

$$2(x')^2 - 4x' - 3(y')^2 - 6\sqrt{3}y' - 13 = 0$$

$$2(x' - 1)^2 - 2 - 3(y' + \sqrt{3})^2 + 9 - 13 = 0$$

$$2(x' - 1)^2 - 3(y' + \sqrt{3})^2 - 6 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' + \sqrt{3} \end{cases}$ otteniamo l'equazione $2(x'')^2 - 3(y'')^2 = 6$ ovvero $\frac{1}{3}(x'')^2 - \frac{1}{2}(y'')^2 = 1$. Quindi, la conica è un'**iperbole**.

**Esercizio 4.** Classificare la conica: $3x^2 - 4\sqrt{3}\,xy + 4y^2 + 2\sqrt{3}\,x - 4y + 1 = 0.$

$a = 3 \quad b = -4\sqrt{3} \quad c = 4 \quad d = 2\sqrt{3} \quad e = -4 \quad f = 1 \qquad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 7) \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 7 \;,\; \lambda_2 = 0.$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 7$ cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 7I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 7I) = \begin{bmatrix} -4 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2\sqrt{3}y = 0 \\ -2\sqrt{3}x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{2x + \sqrt{3}\,y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(\sqrt{3}, -2)\ \forall t \neq 0$

Dato che $\|(\sqrt{3}, -2)\| = \sqrt{7}$, scegliamo $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 7$.

Ora, prendiamo $\mathbf{v} = (-u_y, u_x) = (\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 0$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ -\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 3x^2 - 4\sqrt{3}xy + 4y^2$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$) $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 7(x')^2$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 2\sqrt{3}\,x - 4y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,2\sqrt{3} \quad -4\,]\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ -\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = [\,2\sqrt{7} \quad 0\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $2\sqrt{3}x - 4y$

nel complesso $2\sqrt{7}x'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione

$$7(x')^2 + 2\sqrt{7}x' + 1 = 0$$

$$7(x' + \tfrac{\sqrt{7}}{7})^2 = 0$$

$$(x' + \tfrac{\sqrt{7}}{7})^2 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{7}}{7} \\ y'' = y' \end{cases}$ otteniamo l'equazione $(x'')^2 = 0$.

Quindi, la conica è **unione di due rette reali coincidenti**.

**Esercizio 5.** Classificare la conica: $4x^2 + 4xy + y^2 + 2\sqrt{5}\,x + 6\sqrt{5}\,y + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

a = 4 b = 4 c = 1 $d = 2\sqrt{5}$ $e = 6\sqrt{5}$ $f = 5 + 2\sqrt{3}$ $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) \Rightarrow \lambda_1 = 5$ , $\lambda_2 = 0$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 5$ cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 5I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 5I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\mathbf{x - 2y = 0}$ $\Rightarrow$ $(x, y) = t(2, 1)$ $\forall t \neq 0$

Dato che $\|(2, 1)\| = \sqrt{5}$, <u>scegliamo</u> **u** $= (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 5$.

Ora, <u>prendiamo</u> **v** $= (-u_y , u_x) = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, ) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 0$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$) $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 5(x')^2$ .

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = 2\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,2\sqrt{5} \quad 6\sqrt{5}\,]\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = [\,10 \quad 10\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso $2\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}y$ nel complesso $10x' + 10y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione

$$5(x')^2 + 10x' + 10y' + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$5(x' + 1)^2 - 5 + 10y' + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$5(x' + 1)^2 + 10y' + 2\sqrt{3} = 0$$

$$10y' + 2\sqrt{3} = -5(x' + 1)^2$$

$$y' + \frac{\sqrt{3}}{5} = -\frac{1}{2}(x' + 1)^2$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{3}}{5} \end{cases}$ otteniamo l'equazione $y'' = -\frac{1}{2}(x'')^2$.

Quindi, la conica è una **parabola**.

**Esercizio 6.** Classificare la conica: $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 12\sqrt{3}x + 20y + 36 = 0$.

a = 5 b = $-2\sqrt{3}$ c = 7 d = $12\sqrt{3}$ e = 20 f = 36 $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 32 = (\lambda - 4)(\lambda - 8) \Rightarrow \lambda_1 = 4$ , $\lambda_2 = 8$.

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 4$ cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 4I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - \sqrt{3}\,y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(\sqrt{3}, 1) \ \ \forall t \in R-\{0\}$

Dato che $\|(\sqrt{3}, 1)\| = 2$, <u>scegliamo</u> **u** = $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 4$.

Ora, <u>prendiamo</u> **v** = $(-u_y, u_x) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 8$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2$

nel complesso $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 4(x')^2 + 8(y')^2$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -12\sqrt{3}\,x + 20y$

nel complesso gx'+ hy' dove dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,-12\sqrt{3} \quad 20\,]\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = [\,-8 \quad 16\sqrt{3}\,]$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $-12\sqrt{3}\,x + 20y$

nel complesso $-8x' + 16\sqrt{3}\,y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione

$$4(x')^2 + 8(y')^2 - 8x' + 16\sqrt{3}y' + 36 = 0$$

$$(x')^2 - 2x' + 2(y')^2 + 4\sqrt{3}y' + 9 = 0$$

$$(x' - 1)^2 - 1 + 2(y' + \sqrt{3})^2 - 6 + 9 = 0$$

$$(x' - 1)^2 + 2(y' + \sqrt{3})^2 + 2 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' + \sqrt{3} \end{cases}$ otteniamo l'equazione $(x'')^2 + 2(y'')^2 = -2$ ovvero

$\frac{1}{2}(x'')^2 + (y'')^2 = -1$. Quindi, la conica è un'**ellisse immaginaria**.

**Esercizio 7.** Classificare la conica: $9x^2 + 6xy + y^2 - 6x - 2y - 39 = 0$.

$a = 9 \quad b = 6 \quad c = 1 \quad d = -6 \quad e = -2 \quad f = -39 \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10) \Rightarrow \lambda_1 = 10 \ , \ \lambda_2 = 0$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 10$ cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 10I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 10I) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 3x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - 3y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(3, 1) \ \ \forall t \in R-\{0\}$

Dato che $\|(3, 1)\| = \sqrt{10}$ , <u>scegliamo</u> $\mathbf{u} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 10$.

Ora, <u>prendiamo</u> $\mathbf{v} = (-u_y , u_x) = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 0$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$) $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 10(x')^2$

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -6x - 2y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove dove (**ricordiamo**) è $[\,d \ \ e\,]C = [\,g \ \ h\,]$. Quindi,

$$[\,-6 \quad -2\,]\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = [\,-2\sqrt{10} \quad 0\,]$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $-6x - 2y$

nel complesso $-2\sqrt{10}\,x'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione

$$10(x')^2 - 2\sqrt{10}x' - 39 = 0$$

$$10\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 - 1 - 39 = 0$$

$$10\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 - 40 = 0$$

$$\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 - 4 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{10}}{10} \\ y'' = y' \end{cases}$ otteniamo l'equazione $(x'')^2 - 4 = 0$ ovvero

$(x'' - 2)(x'' + 2) = 0$. Quindi, la conica è **unione di due rette reali distinte parallele**.

**Esercizio 8.** Classificare la conica: $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 12y + 12 = 0$.

a = 3  b = 2  c = 3  d = –4  e = –12  f = 12  $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_1 = 4 \;,\; \lambda_2 = 2$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 4$ cioè le autosoluzioni del sistema (A – 4I)X = **0**.

$(A - 4I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x - y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(1, 1) \quad \forall t \in R - \{0\}$

Dato che $\|(1, 1)\| = \sqrt{2}$, scegliamo **u** $= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 4$.

Ora, prendiamo **v** $= (-u_y, u_x) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 2$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione. Si osservi anche che $\theta = \pi/4$ radianti. Cioè, il RC(O, **u**, **v**) si ottiene *ruotando* il RC(O, **i**, **j**) attorno ad O di 45° in senso antiorario.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 3x^2 + 2xy + 3y^2$

nel complesso $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 4(x')^2 + 2(y')^2$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -4x - 12y$

nel complesso gx'+ hy' dove (**ricordiamo**) è [ d  e ]C = [ g  h ]. Quindi,

$$[\,-4 \quad -12\,]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = [\,-8\sqrt{2} \quad -4\sqrt{2}\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso di primo grado $-4x - 12y$

nel complesso $-8\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione $4(x')^2 + 2(y')^2 - 8\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' + 12 = 0$

$$2(x')^2 - 4\sqrt{2}x' + (y')^2 - \sqrt{2}y' + 6 = 0$$

$$2(x' - \sqrt{2})^2 - 4 + (y' - \sqrt{2})^2 - 2 + 6 = 0$$

$$2(x' - \sqrt{2})^2 + (y' - \sqrt{2})^2 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{2} \\ y'' = y' - \sqrt{2} \end{cases}$ otteniamo l'equazione $2(x'')^2 + (y'')^2 = 0$.

Quindi, la conica **ha un solo punto reale**.

Utilizzando i numeri complessi e indicata con i l'unità immaginaria (tale che $i^2 = -1$, ovvero $-i^2 = 1$), possiamo scrivere l'equazione $2(x'')^2 + (y'')^2 = 0$ come segue $(\sqrt{2}x'')^2 - (iy')^2 = 0$ ovvero $(\sqrt{2}x'' - iy')(\sqrt{2}x'' + iy') = 0$. Quindi, la conica è unione di due rette immaginarie coniugate incidenti in un punto reale.

**Esercizio 9.** Classificare la conica: $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y + 53 = 0$.

a = 4  b = –12  c = 9  d = –4  e = 6  f = 53  $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda = \lambda(\lambda - 13) \Rightarrow \lambda_1 = 13$ , $\lambda_2 = 0$

Troviamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 13$ cioè le autosoluzioni del sistema $(A - 13I)X = \mathbf{0}$.

$(A - 13I) = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 6y = 0 \\ -6x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{3x + 2y = 0} \Rightarrow (x, y) = t(2, -3) \ \forall t \in R-\{0\}$

Dato che $\|(2, -3)\| = \sqrt{13}$, <u>scegliamo</u> **u** = $(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}) = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_1 = 13$.

Ora, <u>prendiamo</u> **v** = $(-u_y , u_x) = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}) = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ come autoversore relativo a $\lambda_2 = 0$.

La matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ che ha come colonne le componenti di **u** e **v** è una matrice associata ad una rotazione.

La rotazione trasforma il complesso di secondo grado $ax^2 + bxy + cy^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

nel complesso (ricordiamo che $\lambda_2 = 0$) $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 13(x')^2$.

La rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $dx + ey = -4x + 6y$

nel complesso $gx' + hy'$ dove (**ricordiamo**) è $[\,d \quad e\,]C = [\,g \quad h\,]$. Quindi,

$$[\,-4 \quad 6\,]\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = [\,-2\sqrt{13} \quad 0\,].$$

Quindi, la rotazione trasforma il complesso dei termini di primo grado $-4x + 6y$

nel complesso $-2\sqrt{13}\,x'$.

Per cui, rispetto al RC(O, **u**, **v**) la conica ha equazione $13(x')^2 - 2\sqrt{13}x' + 53 = 0$

$$13(x' - \tfrac{\sqrt{13}}{13})^2 - 1 + 53 = 0$$

$$13(x' - \tfrac{\sqrt{13}}{13})^2 + 52 = 0$$

$$(x' - \tfrac{\sqrt{13}}{13})^2 + 4 = 0$$

Effettuando la traslazione $\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{13}}{13} \\ y'' = y' \end{cases}$ otteniamo l'equazione $(x'')^2 + 4 = 0$. Poiché questa equazione non ha soluzioni reali, la conica **non ha alcun punto reale**.

Utilizzando i numeri complessi, indicata con i l'unità immaginaria (tale che $i^2 = -1$, ovvero $-i^2 = 1$), possiamo scrivere l'equazione $(x'')^2 + 4 = 0$ come segue $(x'')^2 - (2i)^2 = 0$ ovvero $(x'' - 2i)(x'' + 2i) = 0$. Quindi, la conica è unione di due rette immaginarie coniugate non aventi punti (propri) in comune. Per cui le possiamo "*pensare*" come parallele.