RICORDIAMO CHE

• Una sfera di centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raggio R ha equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

• Un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + z^2 + \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0$ rappresenta una sfera $\mathcal{S}$ se e solo se $\delta := \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - 4\boldsymbol{d} > 0$. Inoltre, $\mathcal{S}$ ha centro $C(x_0, y_0, z_0) = (-\boldsymbol{a}/2, -\boldsymbol{b}/2, -\boldsymbol{c}/2)$ e raggio $R = \frac{1}{2}\sqrt{\delta}$.

8.1. Esercizio. Trovare le coordinate del centro e il raggio delle seguenti sfere:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 1 = 0$ $\qquad$ $C(6, -2, 0)$ $\qquad$ $R = \sqrt{41}$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z - 3 = 0$ $\qquad$ $C(0, 3, -4)$ $\qquad$ $R = 2\sqrt{7}$

2x^2+2y^2+2z^2 $- 16x + 6y - 14z + \frac{61}{[illegible]} = 0$ $\qquad$ $C(4, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ $\qquad$ $\delta = 0 = R$ (non è una sfera)

8.2. Esercizio. Trovare per quali valori del parametro reale k il piano $2x - z + k = 0$ risulta rispettivamente secante, tangente o esterno alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 3 = 0$.

Posto $k_1 = -\sqrt{65} - 5$ e $k_2 = \sqrt{65} - 5$ si ha che il piano risulta:

$k < k_1$ (esterno), $k = k_1$ (tangente), $k_1 < k < k_2$ (secante), $k = k_2$ (tangente), $k_2 < k$ (esterno);

8.3. Esercizio. Si consideri il piano $\pi : 3x - y - 2z + 5 = 0$ e la sfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5 = 0$. Dopo aver verificato che π è tangente a $\mathcal{S}$, trovare le coordinate del punto A di contatto.

Il centro della sfera è $C(3, 0, 0)$. Siccome $d(C, \pi) = \sqrt{14} = R$ si ha che il piano π è tangente a $\mathcal{S}$.

Il punto A si trova, oltre che sul piano π, anche sulla retta passante per il centro C e ortogonale al piano π stesso ovvero avente $(3, -1, -2)$ come parametri direttori. Quindi, $A(3t+3, -t, -2t)$. Imponendo che $A \in \pi$ si ottiene $t = -1$. Infine, si ha che **$A(0, 1, 2)$**.

8.4. Esercizio. Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $A(\frac{1}{2}, 1, 2\sqrt{3})$ alla sfera

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 48x - 16y - 13 = 0$$

$C(6, 2, 0)$ $\qquad$ $[AC] = (\frac{11}{2}, 1, -2\sqrt{3})$ $\qquad$ $\frac{11}{2}(x - \frac{1}{2}) + 1(y - 1) + (-2\sqrt{3})(z - 2\sqrt{3}) = 0$

$11(2x - 1) + 4(y - 1) + (-8\sqrt{3})(z - 2\sqrt{3}) = 0$ $\qquad$ $\mathbf{22x + 4y - 8\sqrt{3}z + 33 = 0}$

8.5. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera di centro $C(1, 0, -2)$ e raggio $R = 1$.

$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + [z - (-2)]^2 = 1^2$ $\qquad$ $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 4 = 0}$

8.6. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera di centro $C(-2, +1, +3)$ e passante per l'origine O.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(-2)x - 2(+1)y - 2(+3)z + 0 = 0$ $\qquad$ $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z = 0}$

8.7. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per i quattro punti A(0, 0, 1), B(1, −1, 1), C(−1, 2, 0) e D(2, 1, −1).

L'equazione della sefra è del tipo $x^2 + y^2 + z^2 + \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0$.

Imponendo il passaggio della sfera per i quattro punti si ha un sistema di quattro equazioni in quattro incognite ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$). Con un po' di conti si ottiene $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + 9x + 11y + 17z - 18 = 0}$.

8.8. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera passante per l'origine e per il punto P(2, −3, −1) e con il centro sull'asse Z.

Il termine noto è d=0 in quanto la sfera passa per l'origine. Inoltre, il centro è C(0, 0, t). Per cui

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(0)x - 2(0)y - 2(+t)z + 0 = 0$ $\qquad$ $x^2 + y^2 + z^2 - 2tz = 0$

Imponendo il passaggio per P(2, −3, −1) si ha che $t = -7$. $\qquad$ $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + 14z = 0}$

8.9. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente all'asse X nel punto A(2, 0, 0) e tangente alla retta $x - z + 1 = y - 2z + 1 = 0$ nel punto B(−1, −1, 0).

Il centro della sfera si trova sul piano π passante per A e ortogonale all'asse X. $\quad$ $\mathbf{x - 2 = 0}$

Il centro si trova anche sul piano π' passante per B e ortogonale alla retta r. $\quad$ $\mathbf{x + 2y + z + 3 = 0}$

Quindi, il centro si trova sulla retta $s = \pi' \cap \pi$ di equazioni $\mathbf{x - 2 = 2y + z + 5 = 0}$.

Posto y = t, il centro della sfera è $C(+2, +t, -2t-5) \in s$.

A questo punto, l'equazione della sfera dipende da t e dal termine noto d

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(+2)x - 2(+t)y - 2(-2t-5)z + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2ty + 2(4t+5)z + d = 0$$

Infine, imponendo il passaggio per A e B si ha che $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 10z + 4 = 0}$

8.10. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $\pi : 2x + 3y - 7z = 0$ nel suo punto A(2, 1, 1) e passante per il punto B(1, −2, 3).

Il centro C appartiene alla retta ortogonale al piano π (quindi parallela al vettore (2, 3, −7)) e passante per A(2, 1, 1). Per cui, le coordinate di C sono (2t+2, 3t+1, −7t+1) per un opportuno valore di t.

A questo punto, l'equazione della sfera è

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(2t+2)x - 2(3t+1)y - 2(-7t+1)z + d = 0$$

I valori di t e del termine noto d si trovano imponendo il passaggio per A e B.

$$\mathbf{25x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 72x - 8y - 148z + 150 = 0}$$

8.11. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano $\pi : x - z - 1 = 0$ nel suo punto $A(0, 1, -1)$ e avente il centro sul piano XY.

Il centro C appartiene alla retta ortogonale al piano π (quindi parallela al vettore $(1, 0, -1)$) e passante per $A(0, 1, -1)$. Per cui, le coordinate di C sono $C(+t, +1, -t-1)$ per un opportuno valore di t.

Imponendo che C stia sul piano $XY : z = 0$ si ha che $-t-1 =$ ovvero $t= -1$. Quindi, $C(-1, +1, 0)$.

A questo punto, l'equazione della sfera è $x^2 + y^2 + z^2 - 2(-1)x - 2(+1)y - 2(0)z + d = 0$ ovvero $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + d = 0$. Infine, imponendo il passaggio per $A(0, 1, -1)$ si ha che $d=0$.

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0}$$

8.12. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera tangente nell'origine $O(0, 0, 0)$ al piano $\pi : x - 2y = 0$ e passante per il punto $A(2, 3, 1)$.

Il termine noto è $d=0$ in quanto la sfera passa per l'origine.

Il centro C appartiene alla retta ortogonale al piano π (quindi parallela al vettore $(1, -2, 0)$) e passante per $O(0, 0, 0)$. Per cui, le coordinate di C sono $C(+t, -2t, 0)$ per un opportuno valore di t.

A questo punto, l'equazione della sfera è

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(+t)x - 2(-2t)y - 2(0)z = 0$$

Il valore di t e si trova imponendo il passaggio per A $\quad \mathbf{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7x - 14y = 0}$

8.13. Esercizio. Scrivere le equazioni delle sfere di raggio $R = 2$ e passanti per la circonferenza $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + 2y - z = 0$. La sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ha centro in O e raggio $r=1$.

Siccome il piano $\pi : x + 2y - z = 0$ passa per O anche la circonferenza ha centro in O e raggio $r=1$.

Il centro delle sfere $C(t, 2t, -t)$ appartiene alla retta passante per O e ortogonale a π.

La distanza al quadrato $6t^2$ di C da O deve essere $R^2 - r^2 = 2^2-1^2 = 3$. Da cui si ha $\mathbf{2t^2 = 1}$

$$(x - t)^2 + (y-2t)^2 + (z+t)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (2t)x - (4t)y + (2t)z - 1 = 0 \quad \text{con } 2t^2 = 1$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 \pm\sqrt{2}x \pm\sqrt{2}y \mp\sqrt{2}z - 1 = 0}$$

8.14. Esercizio. Verificare che le due sfere $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ e $\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 4x = 0$ si incontrano in una circonferenza $\mathcal{C}$. Poi, trovare l'equazione della sfera $\mathcal{S}_3$ passante per la circonferenza $\mathcal{C}$ e avente il suo centro C_3 sul piano $\pi : x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Dalla sua equazione, si vede subito che la prima sfera ha il centro $C_1 = O(0,0,0)$ e raggio $R_2 = \sqrt{2}$.

Dalla sua equazione, si vede subito la seconda sfera ha centro $C_2 = (-2, 0, 0)$ e passa per O e. Quindi, essa ha raggio $R_2 = d(C_2, O) = 2$. Siccome $R_2 - R_1 = 2 - \sqrt{2} < 2 = d(C_1 , C_2) = 2 < 2 + \sqrt{2} = R_2 + R_1$, le due sfere sono secanti lungo una circonferenza $\mathcal{C}$.

Si vede subito che la retta *r* passante per i due centri C_1 e C_2 è l'asse X : $y = z = 0$. Siccome anche il centro C_3 della sfera $\mathcal{S}_3$ si trova su questa retta *r*, mettendo a sistema le equazioni dell'asse X con l'equazione del piano π, si ottiene subito che $C_3(1, 0, 0)$.

Ora, mettendo a sistema le equazioni delle due sfere, si ha che le equazioni della circonferenza $\mathcal{C}$ sono $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 2x+1 = 0$ ovvero $y^2 + z^2 - \frac{7}{4} = x - \frac{1}{2} = 0$. Quindi, $\mathcal{C}$ è la circonferenza di equazione $y^2 + z^2 = \frac{7}{4}$ sul piano $x - \frac{1}{2} = 0$. Tale circonferenza ha centro $H(-1/2, 0, 0)$ e raggio $r = (\sqrt{7})/2$.

La distanza di C_3 da H è $d = 3/2$. Dunque, il raggio della sfera $\mathcal{S}_3$ è $R_3 = \sqrt{d^2 + r^2} = 2$.

Infine, abbiamo che l'equazione della sfera $\mathcal{S}_3$ è $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0}$.

8.15. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera $\mathcal{S}_2$ passante per il punto $A(2, -3, -1)$ e passante per la circonferenza $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \pi$ di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y = 3x - z = 0$.

Dalle sue equazioni, si vede subito che la circonferenza $\mathcal{C}$ passa per l'origine O. Quindi, anche la sfera $\mathcal{S}_2$ che stiamo cercando passa per l'origine O. Quindi, il suo termine noto è zero.

La sfera $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y = 0$ ha centro $C_1(1/2, -1, 0)$.

Il centro C_2 della sfera $\mathcal{S}_2$ si trova sulla retta passante per C_1 e ortogonale al piano $\pi : 3x - z = 0$ ovvero avente $(3, 0, -1)$ come parametri direttori. Quindi, $C_2(3t+1/2, -1, -t)$. Per cui l'equazione è

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(3t+1/2)x - 2(-1)y - 2(-t)z = 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 - (6t+1)x + 2y + 2tz = 0$

Imponendo il passaggio per A si ottiene $t = 3/7$. Infine, $\mathcal{S}_2$: $\mathbf{7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 25x + 14y + 6z = 0}$.

8.16. Esercizio. Scrivere l'equazione della sfera $\mathcal{S}$ tangente al piano $\pi : x + 2y + 3z - 7 = 0$ nel suo punto $P(2, 1, 1)$ e passante per l'origine $O(0, 0, 0)$.

Il termine noto è $d = 0$ in quanto la sfera passa per l'origine. Il centro C della sfera appartiene alla retta passante per $P(2, 1, 1)$ e ortogonale a π ovvero avente $(1, 2, 3)$ come parametri direttori. Quindi, $C(t+2, 2t+1, 3t+1)$. Per cui l'equazione è $x^2 + y^2 + z^2 - 2(t+2)x - 2(2t+1)y - 2(3t+1)z + 0 = 0$.

Imponendo il passaggio per P si ottiene $t = -(3/7)$. Infine, $\mathbf{7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 22x - 2y + 4z = 0}$.

8.17. Esercizio. Trovare la sfera $\mathcal{S}_2$ tangente la sfera $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ nel suo punto P(0, 0, 1) e passante per l'origine O(0, 0, 0).

La sfera $\mathcal{S}_1$ ha centro in $C_1(2, -1, 0)$. Il vettore $[PC_1]$ ha componenti (2, –1, –1). Il centro C_2 della sfera $\mathcal{S}_2$ appartiene alla retta passante per i punti C_1 e P. Quindi, $C_2(2t, -t, -t+1)$.

Siccome la sfera $\mathcal{S}_2$ passa per l'origine O il suo termine noto è zero. Per cui l'equazione di $\mathcal{S}_2$ è

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(2t)x - 2(-t)y - 2(-t+1)z = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto P si ottiene t = 1/2. Infine, $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - z = 0}$.

RICORDIAMO CHE

• Un piano π seca una sfera $\mathcal{S}$ lungo una circonferenza $\mathcal{C}$ se e solo se la distanza del centro C della sfera è (strettamente) minore del raggio R della sfera ovvero $\pi \cap \mathcal{S} = \mathcal{C} \Leftrightarrow d := d(C, \pi) < R$.

• Se un piano π seca una sfera $\mathcal{S}$ lungo una circonferenza $\mathcal{C}$, allora il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$ è dato da $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Infine, il centro H della circonferenza $\mathcal{C}$ si trova, oltre che sul piano π, anche sulla retta passante per il centro C della sfera $\mathcal{S}$ e ortogonale al piano π.

8.18. Esercizio. Determinare le coordinate del centro H e il raggio r della circonferenza

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 1 = x - 2y = 0$$

La sfera $\mathcal{S}$ ha il centro in C(1, 2, 0) e raggio $R = \sqrt{6}$. La distanza di C da π è $d = 3/\sqrt{5}$.

Siccome, $d = 3/\sqrt{5} < \sqrt{6} = R$, il piano π seca effettivamente la sfera $\mathcal{S}$ lungo una circonferenza $\mathcal{C}$.

A questo punto, da $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ si ottiene il raggio $\boldsymbol{r} = \sqrt{\mathbf{21/5}}$ della circonferenza $\mathcal{C}$.

Il centro H di $\mathcal{C}$ si trova sulla retta passante per C e ortogonale al piano $\pi : x - 2y = 0$ ovvero avente (1, –2, 0) come parametri direttori. Quindi, H(t+1, –2t+2, 0). Imponendo che H appartenga a $\pi : x - 2y = 0$ si ha t = 3/5. Per cui, **H(8/5, 4/5, 0)**.

8.19. Esercizio. Determinare le coordinate del centro H e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta secando la sfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 13 = 0$ col piano $\pi : y + 3 = 0$.

La sfera $\mathcal{S}$ ha il centro in C(2, 3, 1) e raggio $R = 1/\sqrt{2}$. La distanza di C da π è $d = 6$.

Siccome $d > R$ il piano è esterno alla sfera. Quindi, non si ottiene una circonferenza $\mathcal{C}$.

8.20. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza appartenente al piano $\pi : 2x - 3y - 2z = 0$, avente centro in $H(1, 0, 1)$ e raggio $r = 3$.

Avendo già il piano π contenente la circonferenza, è sufficiente prendere la sfera avente lo stesso centro e lo stesso raggio della circonferenza. Quindi, $C \equiv H(1, 0, 1)$ e $R = r = 3$. Per cui l'equazione della sfera è $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 = 3^2$ ovvero $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$.

Infine, le equazioni della circonferenza sono $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 2x - 3y - 2z = 0}$.

8.21. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza passante per i punti $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 3)$.

Il piano π passante per i tre punti ha equazione $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Imponendo il passaggio di una sfera $\mathcal{S}$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0$ per i tre punti A, B e C si ottiene un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$.

$A \in \pi \;\Rightarrow\; 1 + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = 0$; $B \in \pi \;\Rightarrow\; 4 + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} = 0$; $C \in \pi \;\Rightarrow\; 9 + 3\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 0$.

Scegliendo, a piacere, $\boldsymbol{d} = 0$ si ha $\boldsymbol{a} = -1$, $\boldsymbol{b} = -2$ e $\boldsymbol{c} = -3$. Quindi, $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0$.

Infine, la circonferenza è data da $\mathcal{C} : \mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 6x + 3y + 2z - 6 = 0}$.

8.22. Esercizio. Scrivere le equazioni della circonferenza $\mathcal{C}$ tangente alla retta $r : x = y = z$ nel suo punto $A(1, 1, 1)$ e passante per il punto $P(3, 1, 0)$.

Il piano π contenente la circonferenza $\mathcal{C}$ appartiene al fascio proprio di piani contenenti la retta r e passante per il punto P (non appartenente alla retta r). Facendo i conti si ha che $\pi : x - 3y + 2z = 0$.

I parametri direttori della retta r sono $(1, 1, 1)$. Il piano passante per A e ortogonale alla retta r è il piano $\alpha : x + y + z - 3 = 0$. Il punto medio della corda AP è $M(2, 1, ½)$. Il piano passante per M e ortogonale al vettore $[AP] = (2, 0, -1)$ è il piano $\beta : 4x - 2z - 7 = 0$.

Se $\mathcal{S}$ è una sfera passante per la circonferenza $\mathcal{C}$, allora il centro $C(x_0, y_0, z_0)$ della sfera $\mathcal{S}$ appartiene sia al piano α che al piano β. Imponendo che $C \in \beta$, otteniamo che $z_0 = 2x_0 - 7/2$. Infine, imponendo che $C \in \alpha$, otteniamo che $y_0 = -3x_0 + 13/2$. A questo punto, l'equazione di $\mathcal{S}$ è

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2(-3x_0 + 13/2)y - 2(2x_0 - 7/2)z + d = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(3, 1, 0)$ otteniamo $d = 3$.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2(-3x_0 + 13/2)y - 2(2x_0 - 7/2)z + 3 = 0$$

Scegliendo, a piacere, $x_0 = 0$ si ottiene la sfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 13y + 7z + 3 = 0$ che è una sfera di centro $C(0, 13/2, -7/2)$ e raggio $R = \sqrt{206}/2$ (si noti che la distanza tra C e π è $53\sqrt{13}/28 < R$).

Infine, le equazioni della circonferenza $\mathcal{C}$ sono $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 13y + 7z + 3 = x - 3y + 2z = 0}$.